

재질이 주기적으로 불균일한 보에서 굽힘 탄성파의 전파속도

김진오* · 문병환**

Speed of Bending Waves Propagating in a Bar with Periodically Nonuniform Material Properties

Jin Oh Kim and Byung Hwan Moon

Key Words: Bending Wave(굽힘 탄성파), Wave Speed(파동 속도), Flat-Panel Speaker(평판 스피커), Perturbation Technique(섭동기법)

Abstract

A bar with periodically nonuniform material properties is selected as a one-dimensional model of a flat-panel speaker. This paper describes a theoretical approach to the bending waves propagating in the nonuniform bar. The phase speed of the wave is obtained using perturbation techniques for small amplitude, sinusoidal modulation of the flexural rigidity and mass density. It is shown that the wave speed is decreased due to the nonuniformity of the material properties by the amount proportional to the square of the modulation amplitude.

1. 서론

일정한 간격으로 보강된 판 구조물-예를 들면 비행기 동체-에서 진동에 의한 소음 방사 현상은 오래 전부터 연구대상으로 다루어졌다.^(1,3) 그러한 연구는 주로 소음 방사를 억제하기 위한 것이었고, 연구 결과에 따르면 보강 간격의 불규칙성이 소음 방사를 제한할 수 있음이 보여진다.⁽⁴⁾ 따라서 그와 반대로 보강 간격의 규칙성, 즉 주기성을 유지하면 판의 진동이 효율적으로 소리를 발생시킨다는 원리에 근거하여, 새로운 형태의 스피커인 '평판 스피커'가 출현하였다.^(5,6)

지난 수십 년간 사용되어온 상자형 스피커는 보이스코일에 전달되는 전기신호에 의해 원뿔형 막이 진동하여 소리를 방사하는 방식으로서, 그

음향특성을 해석하고 설계하는 체계적인 방법들이 이미 확립되어 있다.^(7,8) 이에 비해 얇고 가벼운 평판 스피커는 트랜스듀서의 가진이 판을 따라 전파하면서 평판 내에 분포된 보강재의 가진을 유발하여 인접 공기를 떨어주는 방식인데, Fig. 1에 보인 바와 같이 평판 내부가 복잡한 형상으로 이루어지기 때문에 그 이론적 뒷받침이 완성되어 있지 않았다.

기존의 연구보고들은 주기적으로 보강된 구조물을 주기적으로 지지된 조건으로 가정하여 해석하거나,^(1,2) 주기에 해당하는 간격의 균일한 요소들이 결합되었다고 가정하여 결합부에서의 파동

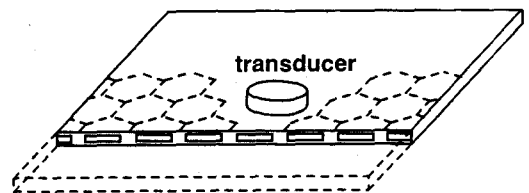


Fig. 1 Schematic diagram of the flat-panel speaker.

* 회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

E-mail : jokim@saint.ssu.ac.kr

TEL: (02) 820-0662 FAX: (02) 820-0668

**

숭실대학교 대학원 기계공학과

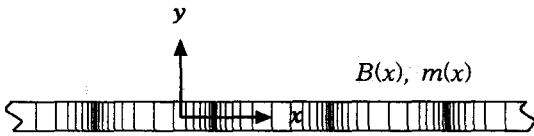


Fig. 2 One-dimensional bar model with periodically nonuniform material properties.

전달로 해석한 것이었다.⁽³⁾ 이러한 불균일 평판의 분포 진동모드를 해석하기 위한 첫 시도로, 최근에 저자들은 2차원인 구조인 평판 대신 1차원 구조인 보를 대상으로 굽힘 진동을 해석하였다.⁽⁹⁾ 그 결과 재질의 주기성에 따라 분할된 분포진동 모드가 저차 모드에서 공존하는 것을 밝혔고, 불균일 평판의 진동을 해석할 수 있는 초석을 마련하였다. 반면에 파동은 다루어지지 않았다.

본 논문에서는 평판 스피커용 불균일 평판에서 전파하는 파동을 해석한 결과를 제시한다. 다만, 해석의 복잡성을 피하기 위하여 앞선 논문⁽⁹⁾에서와 같이, Fig. 1에 보인 바와 같이 2차원적으로 주기성을 갖는 평판 대신 Fig. 2에 보인 바와 같이 1차원적으로 주기성을 갖는 평판 또는 보를 대상으로 한다. 길이방향으로 주기적으로 변화하는 재질 물성치를 조화함수 형태로 표현한다. 이는 필요에 따라 조화함수의 Fourier 급수를 형성함으로써 임의의 주기함수를 수학적으로 표현하는 데에 활용될 수도 있다. 앞선 논문⁽⁹⁾에서 진동해석에 사용하여 해의 정확성을 검증한 바 있는 섭동기법⁽¹⁰⁾을 본 논문에서도 채택하고, 주기적 변화량 크기를 섭동량으로 취급하여 재질이 주기적으로 불균일한 보에서 전파하는 굽힘 탄성파의 전파속도 근사해를 구한다.

2. 문제의 정식화

Fig. 2에 보인 바와 같이 굽힘 강성이 $B(x)$, 단위길이당 질량이 $m(x)$ 인 무한 탄성 보의 횡방향 운동방정식은 횡방향 변위를 $y(x,t)$ 라고 할 때 다음과 같이 표현된다.⁽¹¹⁾

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[B(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

연속파가 전파할 때 각 위치에서의 운동은 시간에 따라 조화운동을 하므로 변위 $y(x,t)$ 를 다음과 같이 변수분리하여 표현할 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

이를 식 (1)에 대입하면 운동방정식을 $Y(x)$ 로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[B(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 m(x) Y(x) \quad (3)$$

보의 재질이 길이방향으로 위치에 따라 주기적으로 변화하는 상황에서, $B(x)$ 와 $m(x)$ 를 각각 다음과 같이 조화함수를 이용하여 표현한다.

$$B(x) = B_0(1 + \varepsilon \sin \alpha x) \quad (4)$$

$$m(x) = m_0(1 + \varepsilon \gamma \sin \alpha x) \quad (5)$$

여기서 ε 는 평균값 B_0 를 기준으로 한 강성 변화 폭이고, $\varepsilon \gamma$ 는 평균값 m_0 를 기준으로 한 밀도 변화 폭이다. 또한 α 는 물성치의 단위길이당 변화 횟수이다. 이와 같이 굽힘 강성과 밀도가 위치 x 에 따라 변화하는 경우, 엄밀해를 구할 수 없으므로 다음과 같이 근사해를 구한다.

3. 섭동기법에 의한 근사해

식 (3)으로 표현된 미분방정식은 식 (4),(5)로 표현된 물성치로 인해 엄밀해를 구할 수 없으므로 근사해법을 사용하게 되는데, 물성치가 위치 x 에 따라 섭동량만큼 주기적으로 변화하고 있어 섭동기법을 채택한다. 이를 위해 파동의 변위 진폭 $Y(x)$ 를 다음과 같이 섭동량 ε 의 급수로 전개한다.

$$Y(x, \varepsilon) = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + \dots \quad (6)$$

식 (4)-(6)을 식 (3)에 대입하고 ε 의 오름차순으로 정리하여, ε 의 차수별 운동방정식에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

3.1 선도차수 $O(\varepsilon^0)$ 의 해

ε 의 0승에 해당하는 항들을 모으면 다음과 같이 선도차수의 운동방정식을 얻게된다.

$$\frac{d^4 Y_0(x)}{dx^4} - \beta_0^4 Y_0(x) = 0 \quad (7)$$

여기서

$$\beta_0^4 = \frac{\omega^2 m_0}{B_0} \quad (8)$$

식 (7)의 해를 구하기 위해서 $Y_0(x)$ 를 다음의 형태로 놓는다.

$$Y_0(x) = A_0 e^{ikx} \quad (9)$$

여기서 k 는 파동수(wavenumber), 즉 단위길이 당 파의 개수로서, 매질의 불균일성에 의해 변할 수 있는 물리량이므로, 다음과 같이 섭동량 ε 의 급수 형태를 취한다.

$$k = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots \quad (10)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하고 식 (9)를 식 (7)에 대입하여, 선도차수에 대한 미분방정식의 해를 구하면 k_0 에 대해 네 개의 근이 얻어지는데, 이중 파동이 x 좌표의 양(+)의 방향으로 전파하는 상황을 나타내는 근은 다음과 같다.

$$k_0 = \beta_0 \quad (11)$$

따라서 선도차수의 해 $Y_0(x)$ 는 다음과 같다.

$$Y_0(x) = A_0 e^{i(\beta_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots)x} \quad (12)$$

여기서 A_0 는 파동의 진폭이다.

3.2 제1차수 $O(\varepsilon^1)$ 의 해

ε 의 1승에 해당하는 항들을 모으면 다음과 같

이 제1차수의 운동방정식을 얻게된다

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 Y_1(x)}{dx^4} - \beta_0^4 Y_1(x) \\ &= -\sin ax \frac{d^4 Y_0(x)}{dx^4} - 2a \cos ax \frac{d^3 Y_0(x)}{dx^3} \\ & \quad + a^2 \sin ax \frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + \beta_0^4 \gamma \sin ax Y_0(x) \end{aligned} \quad (13)$$

선도차수의 해 $Y_0(x)$ 를 식 (13)의 우변에 대입하고 조화함수를 지수함수로 대치하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 Y_1(x)}{dx^4} - \beta_0^4 Y_1(x) \\ &= \frac{A_0 i}{2} \beta_0^2 [(\beta_0 + a)^2 - \gamma \beta_0^2] \cdot e^{i(\beta_0 + a) + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots} x \\ & \quad - \frac{A_0 i}{2} \beta_0^2 [(\beta_0 - a)^2 - \gamma \beta_0^2] \cdot e^{i(\beta_0 - a) + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots} x \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)의 제차해와 특이해를 고려하면, $Y_1(x)$ 의 일반해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$\begin{aligned} Y_1(x) = & B_1 e^{i(\beta_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots)x} \\ & + B_2 e^{i(\beta_0 + a) + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots} x \\ & + B_3 e^{i(\beta_0 - a) + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots} x \end{aligned} \quad (15)$$

그런데 식 (12)와 (15)의 지수들은 ε 의 급수 전개로 표현되므로, 식 (6)을 식 (3)에 대입할 때 이들이 고려되었어야 한다. 고차 해들은 마찬가지로 고려되어야 하나 본 논문에서 다루는 제2차수 까지의 해에는 영향을 미치지 않으므로 생략한다. 식 (12)와 (15)를 식 (6)에 대입한 후 식 (4)-(6)을 식 (3)에 대입하고 ε 의 오름차순으로 정리하여, ε 의 차수별 운동방정식에 대해 단계적으로 다시 해를 구한다. 이 경우에 선도차수의 해는 변함이 없고, 식 (11)과 (12)가 여전히 유효하다.

제1차수의 항들을 모으면, 식 (15)의 세 개의 지수함수 형태로 귀결된다. 세 지수함수의 계수들은 각각 다음 식들을 형성한다.

$$4\beta_0^3 k_1 A_0 = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} [(\beta_0 + a)^4 - \beta_0^4] B_2 \\ = \frac{A_0 i}{2} \beta_0^2 [(\beta_0 + a)^2 - \gamma \beta_0^2] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [(\beta_0 - a)^4 - \beta_0^4] B_3 \\ = -\frac{A_0 i}{2} \beta_0^2 [(\beta_0 - a)^2 - \gamma \beta_0^2] \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)이 성립하기 위해서는

$$k_1 = 0 \quad (19)$$

이 된다. 식 (17)과 (18)에서는 B_2 와 B_3 가 각각 다음과 같이 구해진다.

$$B_2 = \frac{A_0 i}{2} \frac{\left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{\beta_0}{a} + 1\right)^2 - \gamma \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]}{\left(2\frac{\beta_0}{a} + 1\right) \left[\left(\frac{\beta_0}{a} + 1\right)^2 + \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]} \quad (20)$$

$$B_3 = \frac{A_0 i}{2} \frac{\left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{\beta_0}{a} - 1\right)^2 - \gamma \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]}{\left(2\frac{\beta_0}{a} - 1\right) \left[\left(\frac{\beta_0}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]} \quad (21)$$

미지의 항을 없애기 위하여, B_1 을 계수로 갖는 항은 식 (12)에서 고려되고 있다고 간주하여

$$B_1 = 0 \quad (22)$$

로 한다.

식 (21)은 β_0 가 $a/2$ 에 접근할 때 분모가 0이 되어, 정의되지 않는다. 이는 공진에 해당하는 것으로서, 수학적으로 다른 해법이 필요한데 본 논문에서는 다루지 않는다.

식 (20)-(22)를 식 (15)에 대입하여 얻는 식이 파동 진폭에 대한 제1차수의 해로서, 섭동량에 따른 진폭의 보정값이다. 파동 전파속도에 대한 보정값은 $k_1 = 0$ 으로 되어 얻어지지 못했으므로, 다음 차수의 해를 구한다.

3.3 제2차수 $O(\epsilon^2)$ 의 해

ϵ 의 2승에 해당하는 항들을 모으면 다음과 같이 제2차수의 운동방정식을 얻게된다

$$\frac{d^4 Y_2(x)}{dx^4} - \beta_0^4 Y_2(x) = RHS \quad (23)$$

식 (23)의 우변은 다섯 개의 지수함수 형태로 귀결된다. 이에 따라 $Y_2(x)$ 의 일반해는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} Y_2(x) = & C_1 e^{i(\beta_0 + \epsilon^2 k_2 + \dots)x} \\ & + C_2 e^{i[(\beta_0 + a) + \epsilon^2 k_2 + \dots]x} \\ & + C_3 e^{i[(\beta_0 - a) + \epsilon^2 k_2 + \dots]x} \\ & + C_4 e^{i[(\beta_0 + 2a) + \epsilon^2 k_2 + \dots]x} \\ & + C_5 e^{i[(\beta_0 - 2a) + \epsilon^2 k_2 + \dots]x} \end{aligned} \quad (24)$$

이를 식 (23)에 대입하고, 이 중 첫째 지수함수의 계수를 모으면 다음 식을 형성한다.

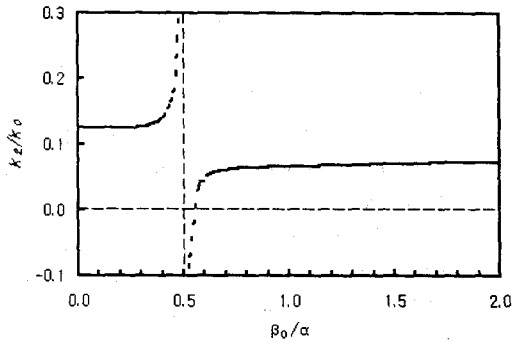
$$\begin{aligned} 4\beta_0^3 k_2 A_0 + \frac{i}{2}(\beta_0 + a)^4 B_2 - \frac{i}{2}(\beta_0 - a)^4 B_3 \\ - i\alpha(\beta_0 + a)^3 B_2 - i\alpha(\beta_0 - a)^3 B_3 \\ + \frac{i}{2}\alpha^2(\beta_0 + a)^2 B_2 - \frac{i}{2}\alpha^2(\beta_0 - a)^2 B_3 \\ - \frac{i}{2}\gamma\beta_0^4 B_2 + \frac{i}{2}\gamma\beta_0^4 B_3 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

따라서 식 (20),(21)의 B_2, B_3 를 식 (25)에 대입하면 k_2 가 다음과 같이 구해진다.

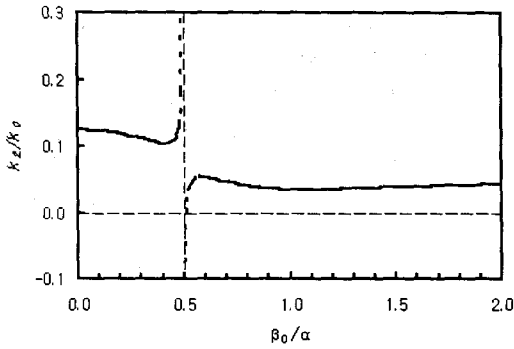
$$\frac{k_2}{k_0} = \frac{1}{16} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{\beta_0}{a} + 1\right)^2 - \gamma \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]^2}{\frac{\beta_0}{a} \left(2\frac{\beta_0}{a} + 1\right) \left[\left(\frac{\beta_0}{a} + 1\right)^2 + \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]} - \frac{\left[\left(\frac{\beta_0}{a} - 1\right)^2 - \gamma \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]^2}{\frac{\beta_0}{a} \left(2\frac{\beta_0}{a} - 1\right) \left[\left(\frac{\beta_0}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{\beta_0}{a}\right)^2\right]} \right\} \quad (26)$$

이는 파동 전파속도에 대한 보정값이다. 파동 진폭에 대한 해를 구할 수도 있으나 관심사가 아니므로 생략하고, 파동 전파속도를 구한다.

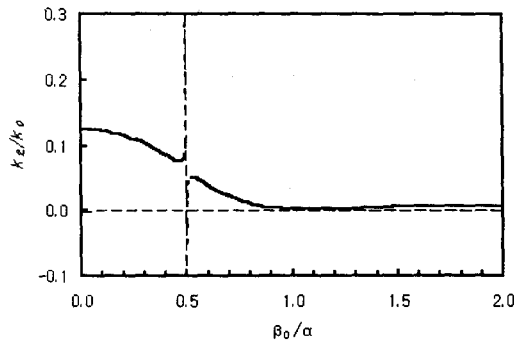
식 (26)은 β_0 가 $a/2$ 에 접근할 때 분모가 0이 되어, 정의되지 않는다. 이에 대해서는 수학적으로 다른 해법이 필요한데, 본 논문에서는 다루지 않는다.



(a)



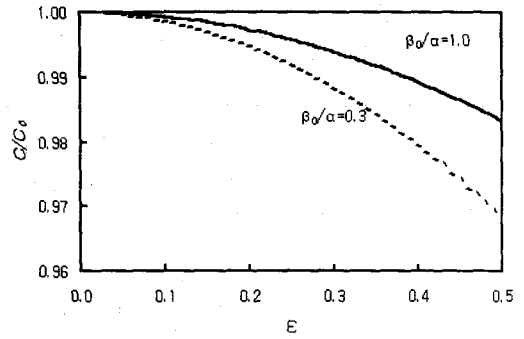
(b)



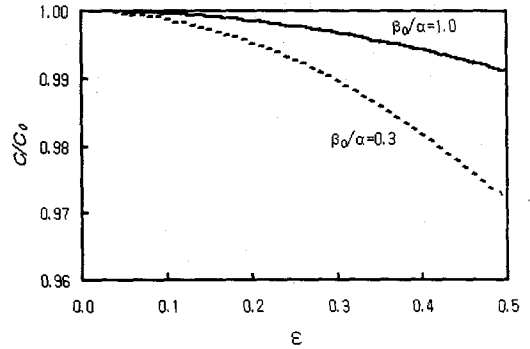
(c)

Fig. 3 Wave speed corrections depicted as a function of the wavenumber ratio; (a) $\gamma = 0$, (b) $\gamma = 0.5$, (c) $\gamma = 0.8$.

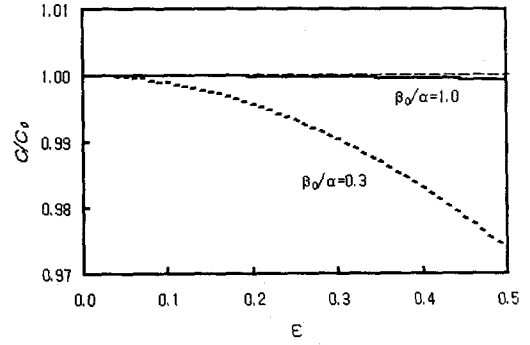
식 (26)에 표현된 k_z/k_0 는 γ 및 β_0/α 의 값에 따라 결정된다. Fig. 3의 (a), (b), (c)는 각각 γ 가 0, 0.5, 0.8인 경우에 대해서 k_z/k_0 를 β_0/α 의 함수로 도시한 것이다. $\beta_0/\alpha = 0.5$ 부근에서는 식 (26)이 유효하지 않으므로, $|\beta_0/\alpha - 0.5| < 0.1$ 범



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 Normalized wave speed depicted as a function of the modulation amplitude; (a) $\gamma = 0$, (b) $\gamma = 0.5$, (c) $\gamma = 0.8$.

위에서는 그래프를 점선으로 나타내었다. 이 결과에서 알 수 있듯이, 식 (26)이 정의되지 않는 $\beta_0/\alpha = 0.5$ 부근을 제외하면 k_z/k_0 는 0보다 큰 값을 갖는다.

3.4 파동 전파속도

지금까지 얻은 결과로부터 파동 전파속도에 대한 근사해를 구성한다. 전파속도 c 는 파동의 주파수 ω 와 파동수 k 사이에 $c = \omega/k$ 의 관계가 있다. 따라서 불균일 보에서의 파동 전파속도 c 를 균일 보에서의 파동 전파속도 c_0 ($= \omega/k_0 = [\omega^2 B_0/m_0]^{1/4}$)로 정규화하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{c}{c_0} = \frac{k_0}{k} = 1 - \varepsilon^2 \frac{k_2}{k_0} + O(\varepsilon^3) \quad (27)$$

식 (26)에 표현된 k_2/k_0 를 식 (27)에 대입하면 정규화된 파동 전파속도를 얻게된다. 앞 절에서 언급된 바와 같이 k_2/k_0 는 0보다 큰 값을 가지므로, 식 (27)로부터 $c < c_0$ 임을 알 수 있다.

Fig. 4는 파동 전파속도를 몇 가지 경우에 대하여 ε 의 함수로 도시한 것이다. 이에 따르면, 주기적 불균일 재료의 보에서의 굽힘 탄성파의 전파속도는 γ 나 β/α 값에는 그다지 민감하지 않으며, ε 의 제곱에 비례하는 양만큼 영향을 받는다. 다만, 재료의 주기성으로 인한 전파속도 감소량이 균일한 평판에서의 전파속도의 3% 이내의 범위에 있으므로, 이 정도를 오차로 감수한다면 균일한 재료의 평판에서의 전파속도를 근사적으로 사용⁽⁵⁾할 수도 있겠다.

5. 결론

평판스피커용 평판의 음향 발생 원리를 규명하는 연구의 일환으로, 재질이 주기적으로 불균일한 평판을 일차원으로 모델링한 보에서 전파하는 굽힘 탄성파에 관한 해석을 행하였다. 길이방향으로 주기적으로 변하는 재료 물성치를 조화함수 형태로 표현하였고, 주기적 변화량 크기를 섭동량으로 취급하여 파동 전파속도의 근사해를 구하였다.

재질이 균일한 보에서의 전파속도와 비교할 때 재료의 주기성이 파동 전파속도를 감소시키는 것을 확인하였고, 그 감소량이 재료 변화량 크기의 제곱에 비례함을 알게 되었다.

참고문헌

- (1) Sen Gupta, G., 1970, "Natural Flexural Waves and the Normal Modes of Periodically Supported Beams and Plates," *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 13, pp. 89-101.
- (2) Mead, D. J., 1970, "Free Wave Propagation in Periodically Supported Infinite Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11, pp. 181-197.
- (3) Williams, F. W., Wanxie, Z., and Bennett, P. N., 1993, "Computation of the Eigenvalues of Wave Propagation in Periodic Substructural Systems," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 422-426.
- (4) Hawwa, M. A. and Nayfeh, A. H., 1997, "Flexural Wave Propagation in a Fluid-Loaded Elastic Plate with Periodically Varying Rigidity," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 415-419.
- (5) Harris, N. and Hawksford, M. O., 1997, "The Distributed-Mode Loudspeaker as a Broad-Band Acoustic Radiator," *Audio Engineering Society 103rd Convention Preprint 4526 (D-6)*.
- (6) Colloms, M., 1997, *High Performance Loudspeakers*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, pp. 39-50.
- (7) 김정호, 김준태, 김진오, 민진기, 1997, "진동/음향 해석에 의한 스피커의 음향특성 연구," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제10호, pp. 1742-1756.
- (8) 김준태, 김정호, 김진오, 1998, "직접방사형 스피커의 음향특성 해석 및 설계," 한국소음진동공학회지, 제8권, 제2호, pp. 274-282.
- (9) 김진오, 문병환, 김준태, 1999, "재질이 주기적으로 불균일한 보의 굽힘 진동 해석," 한국음향학회지, 제18권, 제3호, pp. 73-78.
- (10) Nayfeh, A. H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York, pp. 418-426.
- (11) Meirovitch, L., 1986, *Elements of Vibration Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, p. 222.