

5-bar 병렬 로봇의 동역학 해석 및 제어

정영훈*, 이재원** 주해호**

Dynamics Analysis and Control of Five Bar Parallel Robot

Young-Hoon Chung*, Jae-Won Lee**, Hae-Ho Joo**

Key Words : 5 bar parallel robot, Manipulability, Condition number, Computed-torque controller, Jacobian

Abstract

This paper propose the method to obtain the inverse kinematics and the Jacobian of the 5-bar parallel robot and apply the nonlinear controller to the 5-bar parallel robot with the dynamic analyses using the Jacobian of the passive joints with respect to the active ones and singular value decomposition(SVD). It also experimentally shows that we can do high-speed and accuracy tasks using nonlinear control method. And it explains the relation between the property of the position control and manipulability using a new performance index.

1. 서론

요즘 로봇의 구조가 open chain구조에서 closed chain구조로 변화가고 있고, closed chain을 이용한 mechanism의 예는 많다. 기구학적 강성등의 우수성 때문에 이러한 구조를 가진 로봇이 많이 등장하고 있다.

직렬구조 로봇에 대한 기구학적 성능 지수에 대한 연구가 진행되었고^{[1][2]}, F.C Park^[3]은 open chain 구조 로봇에 대한 조작도 타원에 대한 이론을 병렬형 구조를 가진 시스템에 확장시켰다

Closed chain구조의 로봇이 이러한 실제적인 여러 가지 장점을 많이 가지고 있지만, 동역학 해석에 관련된 이론은 open chain구조의 동역학 해석에 대한 연구에 비해 그다지 많이 연구되지 않았다. Closed chain구조를 가진 로봇의 동역학을 체계적으로 계산하는 기법은 Smith^[4]에 의해서 제안되었고, Paul^[5]은 Smith에 의해 제안된 방법에Lagrangian multipliers를 포함하여 동역학을 Singh^[6]는 singular value

decomposition(SVD)을 이용하여 구속조건이 있는 시스템의 동역학을 풀었다. Kleinfinger 과 Khalil^[7]도 역시 괄목할 만한 동역학 계산 기법을 제시 하였다.

Nakamura^[8]는 구동 조인트에 대한 수동조인트의 자코비안 행렬을 이용하여 역동역학을 계산하는 시간을 줄였다.

본 논문에서는 closed chain을 가지는 5-bar 병렬로봇의 기구학적 해석과 동역학 해석을 통해 5-bar 병렬로봇을 분석하고, 모델기반 비선형 제어를 설계하여 고속, 고정밀도 작업을 동시에 할 수 있도록 하고자 한다.

2. 기구학 해석

Fig. 1은 5-bar 병렬 로봇의 구조도를 나타내고 있다. 로봇은 2개의 구동조인트(θ_1, θ_3)와 2개의 수동조인트(θ_2, θ_4)를 가지며, 그리고 motor 1과 motor 2 사이의 거리는 d 이다. $l_i(i=1, \dots, 4)$ 은 링크의 길이를 나타내고, $l_{ci}(i=1, \dots, 4)$ 는 링크의 질량중심을 나타낸다.

* : 영남대학교 기계공학과 대학원

** : 영남대학교 기계공학과

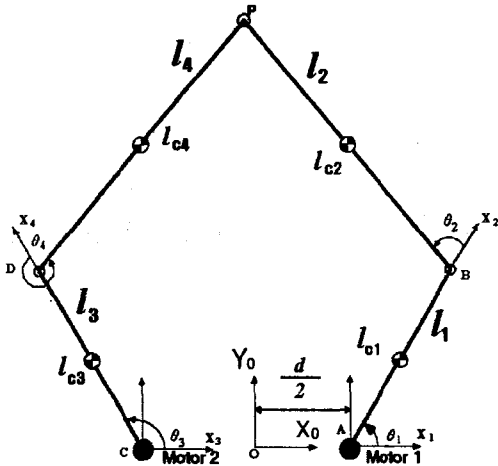


Fig. 1 Schematic and Coordinate of five bar parallel robot

2.1 정기구학 해석

정기구학 해석은 구동조인트(θ_1, θ_3)가 주어질 경우 로봇의 끝점의 위치(P)와 자세를 구하는 것이다. 로봇의 끝점의 위치는 쉽게 표현할 수 있지만, 수동조인트의 값을 구해야만 한다. 이를 구하기 위해서 로봇의 끝점 P를 가상적으로 자른 후, 왼쪽 체인과 오른쪽 체인은 한 점 P에서 만난다는 기하학적 구속조건으로부터 식(1)을 유도할 수가 있다.

$$P_x : \frac{d}{2} + l_1 C_1 + l_2 C_{12} = -\frac{d}{2} + l_3 C_3 + l_4 C_{34} \quad (1)$$

$$P_y : l_1 S_1 + l_2 S_{12} = l_3 S_3 + l_4 S_{34}$$

그리고 $l_1 = l_3, l_2 = l_4$ 일 때 식(1)은 식(2)에서 식(4)과 같이 표현이 된다.

$$\frac{-d - l_1 C_1 + l_1 C_3}{l_2} = C_{12} - C_{34} = \alpha \quad (2)$$

$$\frac{-l_1 S_1 + l_1 S_3}{l_2} = S_{12} - S_{34} = \beta \quad (3)$$

$$\gamma = \text{atan2}(\alpha, \beta) \quad (4)$$

식(2)에서 식(4)를 정리하면 다음과 같은 수동조인트의 각도를 구할 수가 있다.

$$\theta_2 = -\gamma + \text{asin}(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)/2}) - \theta_1 \quad (5)$$

$$\theta_4 = -\gamma - \text{asin}(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)/2}) - \theta_3 + 2\pi \quad (6)$$

식(5)와 (6)에서 보듯이 수동 조인트의 각도는 구동조인트의 비선형 함수로 표현이 되는 것을 알 수가

있다.

2.2 역 기구학 해석

역 기구학은 기준 좌표계(O)에 대한 끝점 P가 주어질 경우 구동조인트 변수(θ_1, θ_3)를 구하는 것이다. 왼쪽 체인에서 본 끝점 P의 위치는, 식(7)과 같이 표현되고 구동조인트와 수동조인트를 분리시킨 후(식(8)), 제곱해서 해서 더한 후 정리하면 식(9)가 된다.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} + l_3 C_3 + l_4 C_4 \\ l_3 S_3 + l_4 S_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$P_x + (\frac{d}{2} - l_3 C_3) = l_4 C_4 \quad (8)$$

$$P_y - l_3 S_3 = l_4 S_4$$

$$[P_x + (\frac{d}{2} - l_3 C_3)]^2 + [P_y - l_3 S_3]^2 = l_4^2 \quad (9)$$

식(9)를 정리해서 구하면 식(10)과 같다.

$$\theta_3 = 2 \text{atan2}(\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 - (\alpha_1^2 - \beta_1^2)}, \alpha_1 + \beta_1) \quad (10)$$

$$\text{여기서, } \alpha_1 = P_x^2 + P_y^2 + P_x d + (\frac{d}{2})^2 + l_3^2 - l_4^2$$

$$\beta_1 = 2l_3 P_x + l_3 d, \quad \gamma_1 = 2l_3 P_y$$

같은 방법으로 오른쪽 체인에 하면 식(11)과 같다.

$$\theta_1 = 2 \text{atan2}(\gamma_2 \pm \sqrt{\gamma_2^2 - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)}, \alpha_2 + \beta_2) \quad (11)$$

$$\text{여기서, } \alpha_2 = P_x^2 + P_y^2 + l_1^2 - l_2^2 - P_x d + (\frac{d}{2})^2$$

$$\beta_2 = 2P_x l_1 + l_1 d, \quad \gamma_2 = 2P_y l_1$$

식(10)과 (11)에서 보듯이 4개의 역 기구학 해를 가짐을 볼 수가 있다.

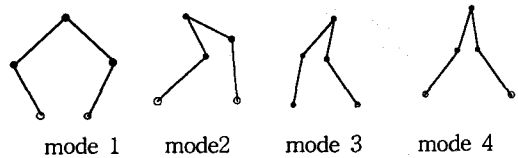


Fig. 2 Solutions of inverse kinematics

2.3 Jacobian 해석

자코비안은 로봇의 끝점의 속도(\dot{P})와 구동조인트의 각속도($\dot{\theta}_a$)와의 관계를 나타낸다. Fig.1의 오른쪽 체인에서 본 끝점 P의 좌표는 식(12)과 같이 표현할 수가 있다. 속도관계는 식(13)과 같고, 수동조인트의

각속도가 나타나는 것을 볼 수가 있다.

$$P = r_1 + r_2 = \begin{bmatrix} \frac{d}{2} + l_1 C_1 \\ l_1 S_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 C_{12} \\ l_2 S_{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\dot{P} = \dot{r}_1 + \dot{r}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \\ l_1 C_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -l_2 S_{12} \\ l_2 C_{12} \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (13)$$

식(13)에서 수동조인트의 각속도($\dot{\theta}_2$)를 제거하기 위하여, 한 점을 중심으로 회전하는 강체의 속도벡터와 위치벡터가 직교하는 성질을 이용한다. 식(13)의 양변에 r_2 를 내적 하면 식(14)와 같이 구동조인트의 각속도($\dot{\theta}_1$)만으로 나타나게 된다. 여기서 $r_2 \cdot \dot{r}_2$ 은 직교성에 의해서 0이 된다.

$$r_2 \cdot \dot{P} = r_2 \cdot \dot{r}_1 + r_2 \cdot \dot{r}_2 = l_1 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \quad (14)$$

같은 방법으로 왼쪽체인에 대해서,

$$r_4 \cdot \dot{P} = r_4 \cdot \dot{r}_3 + r_4 \cdot \dot{r}_4 = l_3 l_4 S_4 \dot{\theta}_3 \quad (15)$$

식(14)와 (15)를 행렬 행태로 나타내고 정리하면 자코비안이 구해진다.

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} r_2^T \\ r_4^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 l_2 S_2 & 0 \\ 0 & l_3 l_4 S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$= J \dot{\theta}_a$$

$$\text{여기서, } J = \frac{1}{S_{(34-12)}} \begin{bmatrix} l_1 S_2 S_{34} & -l_3 S_4 S_{12} \\ -l_1 S_2 C_{34} & l_3 S_4 C_{12} \end{bmatrix}$$

3. 동역학 해석

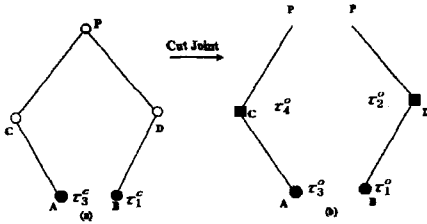


Fig. 3 Closed chain - Open chain

구동조인트에 대한 수동조인트의 자코비안 행렬을 이용하여 역동역학을 계산하는 알고리즘을 설명하면 아래와 같다.

Step 1. Fig.3 과 같이 closed chain를 가상적으로 잘라서 open chain구조의 로봇으로 간주한다. 그리고

수동조인트들은 가상적으로 구동기(τ_a)가 있다고 가정한다. Fig.3에서 ●은 구동조인트이고, ○은 수동조인트이다. 그리고 ■은 가상구동 조인트이다.

Step 2. 실제의 closed chain구조를 가진 로봇의 끝점이 추적해야 될 특정한 형상을 open chain으로 간주된 로봇의 끝점(Fig.3(b))이 이를 추적하는데 필요한 토크 $r^o = [\tau_1^o, \tau_3^o, \tau_2^o, \tau_4^o]^T$ 를 계산한다.

Step 3. 식(17)을 이용하여, step 2에서 구한 open chain의 토크(r^o)로부터 식(18)과 같은 관계를 이용하여 실제 closed chain의 토크($r_a^c = [\tau_1^c, \tau_3^c]^T$)를 계산한다.

$$\delta q = W \delta \theta_a \quad (17)$$

$$\text{여기서, } W = \begin{bmatrix} I \\ \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_a} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_p \end{bmatrix} : I \text{ 단위행렬,}$$

여기서, θ_a : 구동조인트, θ_p : 수동조인트

$$r_a^c = W^T r^o \quad (18)$$

4. 제어기 설계

본 연구 대상인 5-bar 병렬 로봇의 동역학식은 미분 방정식(식(19))과 대수 방정식(식(20))으로 표현이 된다.

$$M^c(q) \ddot{q} + V^c(q, \dot{q}) + \Phi^T \lambda = \tau^c \quad (19)$$

$$\text{여기서, } \tau^c = [\tau_1^c, \tau_3^c, 0, 0]^T, q = [\theta_1, \theta_3, \theta_2, \theta_4]$$

$$\Phi_a \dot{q} = 0 \quad (20)$$

식(18)에서 r_a^c 은 실제 closed chain의 r^c 에서 구동토크들만 모은 토크벡터이다. Closed chain구조를 가진 로봇의 경우, 동역학 모델기반의 비선형 제어를 설계함에 있어서 어려운 점은 구속조건으로 인한 동역학 계산시간에 있다. 하지만 3절에서 설명한 구동조인트에 대한 수동조인트의 자코비안 관계를 이용하면 동역학을 계산하는 시간을 줄일 수 있기 때문에 동역학 모델기반의 실시간 제어를 설계할 수 있다. 제어기 설계과정은 아래와 같다. Fig.3(b)와 같이 가상적으로 잘려진 조인트에는 미지의 구속력이 작용하지 않는 것으로 가정한다. 따라서 Fig.3(b)의 동역학식은 식(21)과 같이 미분 방정식으로 표현된다.

$$M^o(q) \ddot{q} + V^o(q, \dot{q}) = r^o \quad (21)$$

$$\text{여기서, } r^o = [\tau_1^o, \tau_3^o, \tau_2^o, \tau_4^o]^T$$

식(21)에서 M^o 와 V^o 은 식(19)의 M^c 와 V^c 과 각각 같다. 그리고 로봇끝점(Fig.3(b))이 궤적을 잘 추적할 수 있도록 동역학 모델기반의 제어기인 Computed-Torque Controller를 식(22)와 식(23)와 같이 설계한다.

$$\tau^o = M^o u + V^o(q, \dot{q}) \quad (22)$$

$$u = \ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) \quad (23)$$

이렇게 설계한 제어기는 open chain으로 간주된 로봇이 원하는 궤적을 잘 따라가도록 τ^o 을 계산할 것이다. 하지만 τ^o 은 Fig.3(a)의 실제 closed chain구조 로봇의 τ_a^c 와는 다르다. 왜냐하면 구속조건을 고려하지 않고 계산된 토크이기 때문이다. step 3에서 처럼 계산된 τ^o 로 부터 실제 closed chain의 τ_a^c 을 계산하기 위해서 구속조건을 고려해야 하는데, 식(17)에서 W 를 계산하면 된다. 식(18)에서 구한 실제 closed chain의 구동토크 벡터 τ_a^c 는 식(19)의 closed chain의 토크인 τ^c 로 표현하기 위해서 permutation 행렬을 곱한다.

$$\tau^c = P \tau_a^c \quad (24)$$

$$\text{여기서, } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

이렇게 해서 구한 τ^c 은 실제 closed chain의 로봇이 특정한 궤적을 잘 따라 가도록 할 토크이다.

식(18)와 식(22)-(23)를 식(24)에 대입하여 정리 해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau^c &= P W^T \tau^o \\ &= P W^T (M^o u + V^o(q, \dot{q})) \end{aligned} \quad (25)$$

제어블록 선도는 Fig.4에 나타나 있다.

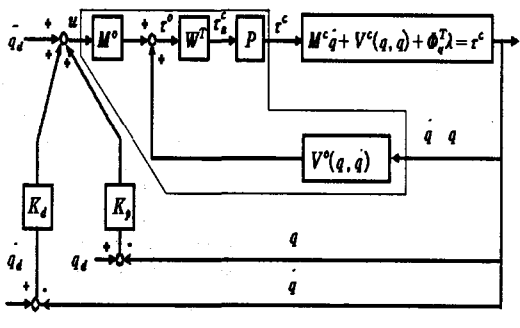


Fig.4 Control block diagram

4.1 Simulation

식(25)의 Computed-Torque Controller를 가지고 5-bar 병렬 로봇의 끝점이 원을 따라 가도록 하고, simulation을 통해서 그 제어기 성능을 확인해 보자.

시뮬레이션 조건은 Fig.2에서 첫 번째 그림의 형상으로 로봇의 끝점 P가 지름이 0.1m이고, 중심이 (0m, 0.27m)인 원을 그리는 작업이다. 로봇 끝점의 원을 그리는 시작점은 A점 (0.05m, 0.27m)에서 출발한다.

로봇의 끝점의 평균속도가 0.3142(m/s)일 경우에 대해서 시뮬레이션 하였다. Sampling time은 400Hz으로 하였다. Fig.5와 Fig.6은 실험결과를 나타낸 그래프이다.

Fig.5의 실선은 로봇의 끝점이 따라가야 할 궤적이고 점선은 실제 로봇끝점이 따라간 궤적이다.

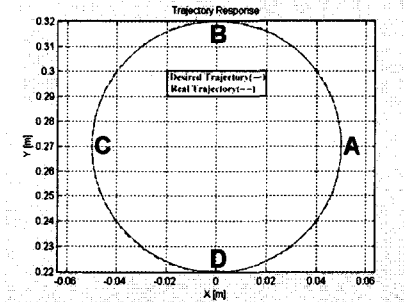


Fig.5 Tracking performance

평균속도를 0.3142(m/s)하여 시뮬레이션 해본 결과 끝점이 아주 잘 따라가고 있다. Fig.6의 에러에 대한 그래프를 보면, 가장 많은 에러가 발생한 부분이 0.7 초 근방인 것을 알 수가 있다. 이때 로봇 끝점P의 위치는 Fig.5의 그래프에서 대략 D점(0m, 0.22m)되는 부분이다. 점D (0m, 0.22m)를 기준으로 좌우 근방에서 최대 에러가 발생되는 것을 Fig.6에서 볼 수가 있다.

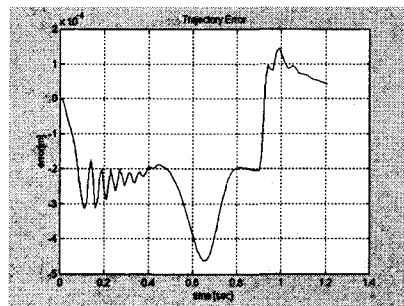


Fig.6 Tracking error

5. 피드백 제어 실험

5.1 실험 장치

Fig.7의 5-bar 병렬로봇의구동기로는 AC모터를 사용하였고, 모터에는 각도를 측정할 수 있는 엔코더가 부착 되어있다

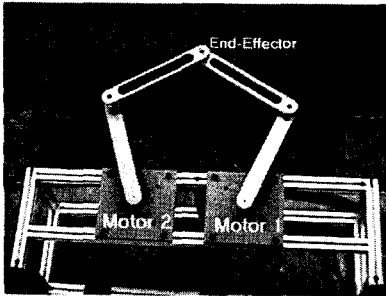


Fig.7 5-bar parallel robot

5.2 실험 결과 및 고찰

PD 제어를 이용하여 Fig.7에 적용하였다. Sampling time은 400Hz로 하였다.

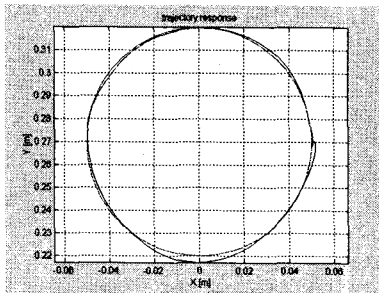


Fig.8 Tracking Performance of PD controller

일반적으로 산업용 로봇의 경우 PD제어를 사용하고 있기 때문에 computed torque controller와 비교해 볼 것이다.

Fig.8은 로봇끝점의 평균 속도가 0.3142(m/s)로 원을 그리는 작업을 수행한 결과이다. Fig.8과 Fig.9를 비교해 보면 Computed torque controller에 비해서 선형 PD controller로 작업을 할 때 많은 에러가 발생한 것을 볼 수가 있다.

5.2.2 Computed torque Controller

Computed Torque controller를 이용하여 로봇 끝점

의 평균속도가 0.3142(m/s)일 때 궤적추종에 대한 결과는 Fig.9와 Fig.10에 나타나 있다

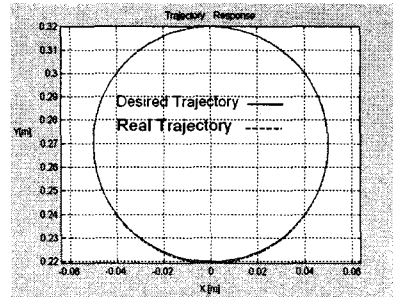


Fig.9 Tracking performance of computed torque controller

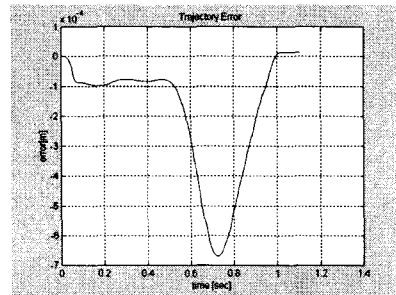


Fig.10 Tracking error of computed torque controller

로봇의 끝점이 1초 동안에 Fig.5과 같은 원을 그렸는데, 그 궤적오차가 아주 작고 우수한 것을 알 수가 있다. 실험결과와 시뮬레이션결과와 비교해보면 거의 비슷한 궤적 추적결과를 보이고 있다.(Fig.5와 Fig.9) 동역학 모델의 단순화를 하지 않고, 그 동역학 모델에 기반으로 한 비선형 실시간 제어를 실제 실험을 통해서 그 성능을 확인할 수가 있었다. 고속, 고정밀도 작업을 동시에 할 수 있는 가능성을 제시하였다.

5.3 위치제어 특성과 Manipulability와의 관계

5.3.1 조작성지수(W_p), 등방성지수(K)와 제어특성

조작도 성능을 평가하기 위해 많이 사용되는 지수로서 조작성 지수(W_p)^[1]나 등방성 지수(K)^[2]가 있다. 위의 두가지 성능지수는 제어성능에도 영향을 미친다. 본 논문에서는 그것을 실험적으로 증명하고 새로운 성능지수를 제안 하고자 한다. 새로운 성능지수를 제안하기 전에 기존의 기구학적 성능지수인 조작성지수

(W_p)^[1]와 등방성지수(K)^[2]에 대해서 간단히 언급한다. 로봇의 끝점이 Fig.5와 같은 원을 그릴 때 위의 두 가지 기구학적 성능지수(W_p , K)에 대해서 살펴 보자.

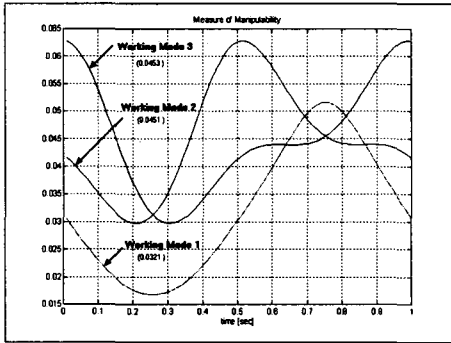


Fig.11 Measure of Manipulability (W_p)

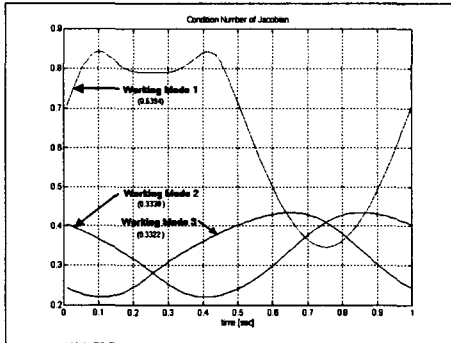


Fig.12 Condition number (K)

Fig.11는 로봇끝점이 Fig.5에서 점A(0.05m, 0.27m)에서 출발하여 원을 그릴때 working mode에 따른 W_p 을 계산한 그래프이다. W_p 으로 볼 때는 working mode 2,3이 working mode 1보다 좋다는 것을 알 수가 있다(Fig.11).

하지만 Jacobian 행렬의 condition number인 등방성 지수(K)를 보면 다르다.

Fig.12에서 보듯이 Fig.11와는 달리 condition number인 등방성 지수(K)로 비교해보면 working mode 1이 훨씬 좋다는 것을 볼 수가 있다.

5.3.2 위치 제어특성과 조작도 타원과의 관계

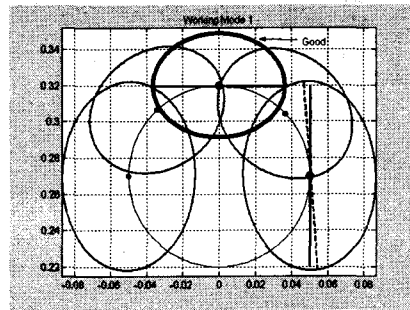
기구학적 성능지수와 제어특성은 “조작도 타원(manipulability ellipsoid)의 장축방향과 로봇 끝점이 추적해야할 궤적의 접선방향의 각도는 로봇의 제어성능에 영향을 미친다” 라고 말할 수가

있다. C값이 크면 위치어러도 많이 생긴다고 말할 수가 있다

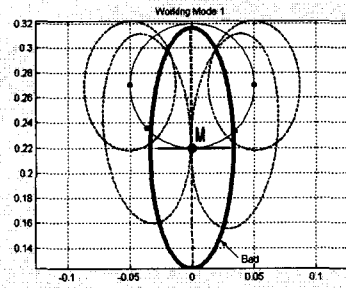
$$C = |\theta_t - \theta_i| \quad (26)$$

여기서, $(0 \leq C \leq \frac{\pi}{2})$

식(26)에서 θ_t 는 조작도 타원의 장축이 로봇끝점의 직교 좌표계상에서 X축과 이루는 각도를 말한다. 그리고 θ_i 는 로봇의 끝점이 추적 해야할 궤적의 접선이 직교 좌표계에서 X축과 이루는 각도를 말한다. C는 예각의 값이다. Working mode 1에 대해서 C값을 계산해보고 실제 실험을 통해서 그 관계를 확인해보자.



(a)



(b)

Fig.13 Manipulability ellipsoid of working mode 1

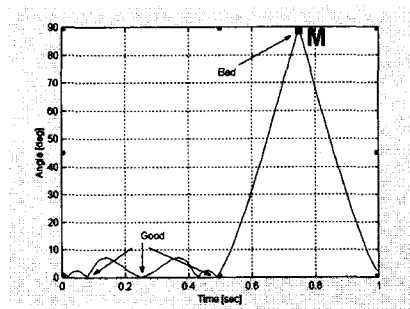


Fig.14 C value of working mode 1

Fig.13(a)와 Fig.13(b)은 working mode 1에 대한 조

작도 타원을, Fig.14는 로봇 끝점이 Fig.5과 같은 원을 그릴 때 C값을 보여 주고 있다. Fig.13(b)에서 보면 점M(0, 0.22)에서 타원의 장축방향(점선)과 궤적(원) 접선 방향(실선)이 서로 거의 직각을 이루고 있음을 볼 수가 있다. 즉, Fig.14에서 C값은 0.7초 근방에서 최대가 되는데, 이 부분은 Fig.13(b)의 점 M(0m,0.22m) 가 되는 부분이다. Fig.8의 실험 결과에서 보듯이 (0m, 0.22m)에서 궤적추적 에러가 가장 많이 발생하는 것을 볼 수가 있다. 이러한 사실로부터 어떤 특정한 작업을 위해 경로를 계획 할 때 논문에서 제안한 C값을 근거로 알맞은 경로 계획을 세울 수가 있고 실제 궤적성능을 충분히 예측할 수가 있다.

6. 결론

5-bar 병렬로봇에 대한 기구학해석에서 동역학 해석 그리고 비선형 제어기 설계를 수행하여 고속, 고정밀도 작업실현의 가능성을 제시하였다.

기구학 해석부분에서 병렬형 로봇의 Jacobian 행렬을 구하는데 위치벡터와 속도벡터의 직교성을 이용하여 보다 효율적이면서 쉽게 Jacobian을 구할 수 있도록 하였다. 기존의 기구학적 성능지수와 본 연구에서 제안한 성능지수(C)에 근거로 하여 작업목적에 알맞은 working mode를 선택하였다.

구동조인트에 대한 수동조인트의 자코비안 관계를 이용하여 동역학을 구하므로써 동역학 모델기반의 실시간 제어를 설계할 수 있게 하였다.

기존에는 실시간 제어를 하기 위해서 동역학 모델의 어느 정도 간략화 한 후에 제어를 설계하였기 때문에 병렬 구조를 지닌 로봇의 최대 장점인 고속, 고정밀도의 장점을 제대로 살리지 못했지만 본 연구에서는 동역학 모델 로봇의 장점을 최대한 살릴 수 있었다. 그리고 새로운 성능지수인 C(식(29))를 제안하여 궤적추적 에러가 어느 부분에서 많이 발생할지를 예측할 수 있게 하였다.

참고문헌

[1] Salisbury, J.K. and Craig, J.J., 1982, "Articulated hands : force control and kinematics issues" Int. J. Robotics Research, Vol. 6, NO. 2, pp. 72-83.
 [2] Yoshikawa, T.,1985, "Manipulability of robotic mechanism", Int.J. Robotics Research Vol. 4, No. 2, pp. 3-9

[3] F.Park, "Manipulability of closed kinematic chains" Tran. ASME, J.Mech. design. Vol. 120, pp542- 548.

[4] Smith,A.A. "Reaction force analysis in generalized machine system", ASME J. Eng.for Industry (2), 1973, pp 617-623.

[5] Paul,B. "Analytical dynamics of mechanisms -a computer oriented overview", Mechanism and Machine Theory 10 (6), 1975, pp481-507

[6] R.P.Singh,P.W.Links,Singular Value Decomposition for Constrained Dynamical Systems" Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52. pp943-948

[7]W. Khalil and J.F. Kleinfinger. "A new geometric notation for open and closed-loop robots", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp 1174-1179. 1986.

[8] Y.Nakamura and M.Ghodoussi. "Dynamics computation of closed-link robot mechanism with nonredundant and redundant actuators", IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol. 5, No. 3 , 294-302, 1989