

# 고유구조지정법을 이용한 유연구조물의 스피로버억제

박 운 식\* · 최 재 원\*\*

## Spillover Suppression in a Flexible Structure using Eigenstructure Assignment

Un Sik Park and Jae Weon Choi

**Key Words:** Large flexible structures(거대우주구조물), Spillover suppression(스피로버억제), Eigenstructure assignment(고유구조지정법)

### Abstract

Since large space structures(LSS) such as a space station, a solar power station satellite, etc., are theoretically distributed parameter and infinite-dimensional system, they have to be modeled into large finite-dimensional systems for control system design. Besides, there are fundamental problems in active vibration control of the large flexible structures. For example, a modeled large finite-dimensional system must be controlled with a much smaller dimensional controller. This causes the spillover phenomenon which degrades the control performances and reduces the stability margin. Furthermore, it may destabilize the entire feedback control system. In this paper, we proposed a novel control method for spillover suppression in the control of large flexible structures by using eigenstructure assignment. Its effectiveness in spillover suppression is investigated and verified by the numerical experiments using an example of the simply supported flexible beam which is modeled to have four controlled modes and eight uncontrolled modes.

### 1. 서 론

우주기지나 태양열 발전위성과 같은 거대우주 구조물은 거대화 및 경량화의 요구로 인해 유연구조물의 특성을 띄게 된다.<sup>(1)</sup> 유연구조물은 적은 감쇠로 인하여 잔여진동이 오래 지속되는 특성을 보이는데, 이는 거대우주구조물과 같은 시스템의 전체성능에 악영향을 미치게 된다. 따라서, 유연구조물에 능동진동제어 개념이 도입되게 되었고, 많은 연구가 이루어졌다.

하지만, 유연구조물의 제어에는 무한차원 혹은 고차의 구조물 시스템을 저차의 제어기로 제어해

야 한다는 근본적인 문제점을 항상 가지고 있다. 이러한 문제점으로 인해 스피로버(spillover)라는 바람직하지 않은 현상이 항상 구조물제어에는 나타나게 된다. 스피로버는 제어입력에 의해 제어하지 않는 잉여모드를 가진하게 되는 제어 스피로버와 이렇게 여기된 잉여모드의 응답이 센서출력에 나타나게 되고 관측기의 상태추정과정에 영향을 주는 관측 스피로버로 나눌 수 있다. 일반적으로 제어 스피로버는 제어시스템의 성능을 저하시키고, 관측 스피로버의 경우는 피드백시스템 전체를 불안정하게 할 수 있는데 이를 스피로버 불안정(spillover instability) 현상이라고 하고, 이러한 문제를 해결하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>(2,3)</sup>

본 논문에서는 관측기 설계에서 발생하는 관측 스피로버를 외란으로 간주하고 이를 억제할 수

\* 부산대학교 기계공학부

\*\* 회원, 부산대학교 기계공학부

있는 관측기를 새로운 고유구조지정법을 이용하여 구현하였고, 이는 복잡한 수치계산을 필요로 하지 않는 해석적이고 시스템적이며 구현이 간단한 방법이다. 제안된 방법을 유연한 단순지지보에 적용한 시뮬레이션을 통하여 그 효용성을 검증한다.

## 2. 스피로버 해석

거대우주구조물을 다음과 같이 선형 시불변 시스템으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^l$ 는 각각 상태, 제어 입력, 및 출력벡터를 나타내며,  $A, B, C$ 는 각각 시스템, 입력, 및 출력행렬을 나타내는 적절한 차원의 상수행렬이다. 그리고,  $(B, A)$ 는 가제어하며  $(C, A)$ 는 가관측하고,  $B$ 는 완전 열계수(full column rank)행렬이라고 가정한다.

유한요소해석과 같은 이산화기법을 이용하여 얻어진 식 (1)과 같은 근사화 모델은 제어를 설계하기에는 아직도 고차의 시스템이므로, 모델 저차원화 기법을 이용하여 시스템의 상태  $x(t)$ 를 다음과 같이 제어모드와 잉여모드에 대한 상태로 나눌 수 있다.

$$x(t) = [x_c(t) \ x_r(t)]$$

따라서, 식 (1)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & A_{rc} \\ A_{cr} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

여기서,  $A_c \in R^{n_c \times n_c}$ 과  $A_r \in R^{n_r \times n_r}$ 은 제어모드와 잉여모드의 시스템행렬을 각각 의미하고,  $A_{cr} \in R^{n_c \times n_r}$ 과  $A_{rc} \in R^{n_r \times n_c}$ 은 잉여모드와 제어모드 간의 상호관계를 나타내는 상관(correlation)행렬이다.

여기서, 적절한 상태변환을 통해 제어모드와 잉여모드를 비연성(decouple)화시키면 다음과 같은 새로운 상태공간표현을 얻을 수 있다.

$$u(t) = [v_c(t) \ v_r(t)]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dot{v}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0 \\ 0 & \bar{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ v_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \bar{B}_r \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

여기서,  $v_c(t) \in R^{n_c}$ 와  $v_r(t) \in R^{n_r}$ 은 각각 제어모드와 잉여모드를 나타낸다. 이 때, 출력은 다음과 같다.

$$y(t) = \bar{C}_c v_c(t) + \bar{C}_r v_r(t) \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)로 표현되는 시스템에 상태피드백 제어기  $u(t) = -\bar{G} v_c(t)$ 를 설계하려면 센서로 측정되지 않는 상태를 추정하기 위해 다음과 같은 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_c(t) &= \bar{A}_c(t) \hat{v}_c(t) + \bar{B}_c u(t) + \bar{K}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{v}_c(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\hat{v}_c(t) \in R^{n_c}$ 는 추정된 상태이고,  $\bar{K}$ 는 관측기 게인을 나타낸다. 그리고, 관측기의 출력은 다음과 같다.

$$\hat{y}(t) = \bar{C}_c(t) \hat{v}_c(t) \quad (6)$$

상태추정오차를  $e_c(t) = \hat{v}_c(t) - v_c(t)$ 라고 정의하면, 식 (3)과 식 (5)로부터 다음과 같은 상태추정오차에 대한 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\bar{A}_c - \bar{K} \bar{C}_c) e_c(t) + \bar{K} \bar{C}_r v_r(t) \quad (7)$$

식 (7)에서 만약 잉여모드  $v_r(t)$ 에 대한 항이 없다면, 관측기 게인  $\bar{K}$ 를 적절히 설계함으로써 안정한 관측기를 얻을 수 있다. 그리고, 분리정리(separation principle)에 의해 안정한 관측기는 피드백 제어시스템에 영향을 미치지 않는 것으로 알려져 있다.

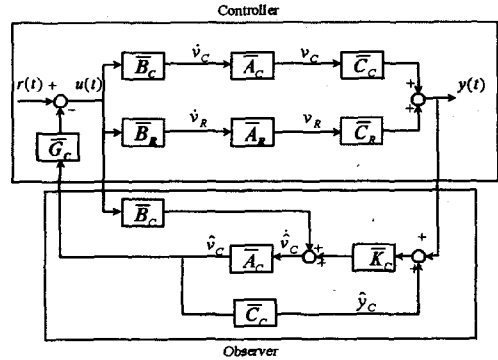


Fig. 1 Spillover mechanism

그림 1은 스피로버가 발생하는 기구(mechanism)를 도시한 것이고, 제어모드, 상태추정오차, 및 잉여모드로 이루어지는 전체 피드백시스템을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dot{e}_c(t) \\ \dot{v}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{G} & -\bar{B}_c \bar{G} & 0 \\ 0 & \bar{A}_c - \bar{K} \bar{C}_c & \bar{K} \bar{C}_r \\ -\bar{B}_r \bar{G} & -\bar{B}_r \bar{G} & \bar{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ e_c(t) \\ v_r(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)에서 스피로버현상에 대해 자세하게 살펴보기로 한다. 먼저, 잉여모드  $v_r(t)$ 에 대한 동역학

을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_r(t) &= \bar{A}_r v_r(t) - \bar{B}_r \bar{G}(v_c(t) + e_c(t)) \\ &= \bar{A}_r v_r(t) - \bar{B}_r \bar{G} \hat{v}_c(t) \\ &= \bar{A}_r v_r(t) + \bar{B}_r u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 안정한 잉여모드  $v_r(t)$ 가 입력행렬  $\bar{B}_r$ 를 통해 들어오는 제어입력  $u(t)$ 에 의해 여기된다. 이것을 제어 스피로버(control spillover)라고 하는데, 진동억제와 같은 제어성능을 높이기 위해 과도한 제어입력을 주는 경우에 제어 스피로버는 더욱 크게 일어난다.

다음으로 식 (8)에서 다음과 같은 상태추정오차  $e_c(t)$ 에 대한 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\bar{A}_c(t) - \bar{K} \bar{C}_c) e_c(t) + \bar{K} \bar{C}_c v_r(t) \quad (10)$$

식 (10)에서 관측기의 상태추정과정이 제어 스피로버에 의해 여기된 잉여모드  $v_r(t)$ 가 행렬  $\bar{K} \bar{C}_c$ 을 통해 들어오게 되어 영향을 받게 된다. 이러한 상태추정과정에서 잉여모드에 의한 간섭은 식 (4)에서 알 수 있듯이 센서의 출력에 잉여모드의 출력이 포함되어 있기 때문에 발생하는 것으로 이를 관측 스피로버(observation spillover)라고 한다. 만약 과도한 제어입력을 사용하여 잉여모드를 크게 여기시키게 되면 식 (10)에서는 커다란 외란으로 작용하게 된다. 이러한 과정이 심해지면 관측기의 상태추정과정이 불안정하게 되고 이것이 전체 피드백시스템을 불안정하게 하는 스피로버 불안정(spillover instability)현상을 불러일으키게 된다.

다음 장에서는 스피로버현상을 억제하기 위하여 식 (10)과 같이 관측기 상태추정과정에 나타나는 관측 스피로버항을 외란으로 간주하고 이를 억제할 수 있는 관측기를 고유구조지정법을 이용하여 설계하는 방법을 제시한다.

### 3. 고유구조지정법을 이용한 스피로버억제

이 장에서는 먼저 스피로버억제를 위한 고유구조 조건에 대하여 살펴보고, 이 조건을 만족하도록 관측기의 좌고유벡터를 설계하는 새로운 고유구조지정법에 대하여 설명한다.

#### 3.1 스피로버 억제조건

식 (10)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_c(t) &= (\bar{A}_c - \bar{K} \bar{C}_c) e_c(t) + \bar{K} \bar{C}_c v_r(t) \\ &= \bar{A}_c e_c(t) + \bar{E} v_r(t) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서 관측 스피로버항  $\bar{K} \bar{C}_c v_r(t)$ 을 관측기  $\bar{A}_c$ 에 대한 외란입력항  $\bar{E} v_r(t)$ 로 간주하고 이를 억제할 수 있는 관측기의 고유구조를 설계한다.

먼저, 모드분해를 통해 다음과 같은 고유구조를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_c &= \Phi_o \Lambda_o \Psi_o^T \\ \Phi_o &= \{\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_c}\} \\ \Psi_o &= \{\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{n_c}\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $\Lambda_o \in R^{n_c \times n_c}$ 는 고유값으로 이루어진 대각행렬이고,  $\Phi_o$ 와  $\Psi_o$ 는 각각 관측기  $\bar{A}_c$ 의 우모드행렬과 좌모드행렬이다. 식 (12)를 이용하면 식 (11)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{e}_c(t) = (\Phi_o \Lambda_o \Psi_o^T) e_c(t) + \bar{E} v_r(t) \quad (13)$$

초기값  $e_c(0)$ 가 영이라면 식 (13)의 해는 다음과 같다.

$$e_c(t) = \Phi_o \int_0^t e^{\Lambda_o(t-\tau)} \Psi_o^T \cdot \bar{E} v_r(\tau) d\tau \quad (14)$$

식 (14)에서 관측기의 상태추정과정이 관측 스피로버의 영향을 받지 않기 위해서는 다음과 같은 고유구조 조건을 만족해야 함을 알 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$\Psi_o^T \cdot \bar{E} = \Psi_o^T \cdot (\bar{K} \bar{C}_c) = [0] \quad (15)$$

식 (14)의 고유구조 조건은 관측기의 좌고유벡터  $\psi_j$ 가 관측 스피로버항  $\bar{K} \bar{C}_c$ 의 열벡터로 이루어지는 벡터공간과 수직이 되어야 함을 의미한다.

만약, 이러한 조건이 만족된다면 관측 스피로버는 완전히 제거될 수 있지만, 이러한 경우는 일반적으로 발생하기 어렵다. 그 이유는 일반적으로 잉여모드의 차수가 제어모드의 차수보다 훨씬 크므로( $n_r > n_c$ ), 자유도의 부족으로 인해 두 벡터공간의 완전한 직교관계를 얻기는 매우 어렵기 때문이다. 따라서, 본 논문에서는 관측 스피로버의 영향이 큰 모드에 대하여 부분적으로 다음과 같은 조건을 만족하도록 좌고유벡터를 설계하여 스피로버억제가 가능하도록 한다.

$$\phi_i^T \cdot \bar{e}_j = 0 \quad (16)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_c, \quad j = 1, 2, \dots, n_r$$

여기서,  $\bar{e}_j$ 는 외란입력행렬( $\bar{E} \in R^{n_c \times n_r}$ )의  $j$ 번째 열벡터를 나타낸다.

하지만, 기존의 좌고유구조지정법을 이용하여 식 (16)의 조건을 만족하는 좌고유벡터를 설계하기는 매우 어렵다. 그 이유를 살펴보기 위해 식 (11)을 이용하여 식 (16)을 다음과 같이 다시 나타낸다.

$$\psi_i^T \cdot (\bar{K} \bar{c}_i) = 0 \quad (17)$$

식 (17)에서 알 수 있듯이 관측 스피오버항에 관측기 계인이 포함되어 있으므로 스피오버억제를 위한 관측기 설계는 식 (17)을 만족하는 관측기 계인  $\bar{K}$ 와 좌고유벡터  $\psi_i$ 를 동시에 결정해야 하는 문제가 되며, 기존의 고유구조지정법을 이용하는 경우에는 복잡하고 반복적인 수치계산이 요구되지만 다음 장에서는 이를 해석적으로 해결할 수 있는 새로운 고유구조지정법을 제시한다.

### 3.2 스피오버억제 관측기설계

이 장에서는 앞 장에서 언급하였듯이 복잡한 수치계산이 필요하지 않는 시스템적이고 해석적으로 스피오버억제가 가능한 새로운 고유구조지정법을 제시한다.

먼저,  $\Lambda_o = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 를 중복되지 않는 자기공액(self-conjugate)인 고유값으로 이루어진 대각행렬이라고 한다. 이 때, 식 (11)의 관측기에 대해 좌, 우고유값문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_o) \phi_i &= (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c) \phi_i = 0 \\ \phi_i^T (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_o) &= \phi_i^T (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

관측기의 좌고유구조를 지정하기 위해서는 다음과 같이 쌍대관계에 있는 제어기의 우고유구조를 지정함으로써 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\phi_i^T (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c + \bar{K} \bar{C}_c)\}^T &= \\ (\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T + \bar{C}_c^T \bar{K}^T) \phi_i &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)는 우고유값문제의 형태를 나타내므로, 관측기의 좌고유구조지정법은 제어기의 우고유구조 지정 문제로 바꾸어 적용할 수 있다. 여기서, 제어기의 우고유구조지정법은 페루프 시스템이 스피오버억제 조건을 만족하는 우고유벡터를 가지도록 제어기 계인  $\bar{K}^T$ 를 선정하는 문제로 귀착된다.

먼저, 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \quad (20)$$

식 (20)에서 행렬  $S_{\lambda_i}$ 의 영공간의 기저들로 이루

어지는 다음과 같은 행렬을 얻을 수 있다.

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \quad (21)$$

또한, 식 (19)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ \bar{K}^T \phi_i \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

식 (22)에서 매개변수 벡터  $h_i \in \mathbb{R}^l$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$h_i = \bar{K}^T \phi_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (23)$$

그러면, 식 (22)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$[\lambda_i I_{n_c} - \bar{A}_c^T \mid \bar{C}_c^T] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ h_i \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

식 (21)과 식 (24)로부터, 다음의 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \dots \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} z_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (25)$$

여기서,  $z_i$ 는 열공간  $N_{\lambda_i}$ 로부터 획득가능한 고유벡터  $\phi_i^d$ 와 열공간  $M_{\lambda_i}$ 로부터 획득가능한 매개변수 벡터  $h_i^d$ 를 생성할 수 있는 선형조합 계수벡터를 의미한다. 식 (25)에서 계수벡터  $z_i$ 를 구하기 위해 먼저 스피오버억제 조건을 만족하는 바람직한 고유벡터  $\phi_i^d$ 와 매개변수 벡터  $h_i^d$ 를 선정하여야 한다.

바람직한 고유벡터와 매개변수 벡터는 다음과 같은 스피오버억제 조건을 만족해야 한다.

조건 1) 바람직한 모드행렬  $\Psi_o^d = [\phi_1^d \phi_2^d \dots \phi_{n_c}^d]$ 는 직교(orthogonal) 혹은 일원(unitary)행렬이 되어야 한다.

$$\bar{c}_{n_j}^T \cdot h_i^d = 0$$

여기서,  $\bar{c}_{n_j}$ 는  $\bar{C}_c = [\bar{c}_{n_1} \bar{c}_{n_2} \dots \bar{c}_{n_m}]$ 의  $j$ 번째 열벡터이고,  $h_i^d$ 는  $H^d = [h_1^d h_2^d \dots h_{n_c}^d]$ 의  $i$ 번째 열벡터를 의미한다.

위의 스피오버억제를 위한 조건들은 설명하면 다음과 같다. 조건 2)를 만족하는  $h_i^d$ 를 구하면 식 (23)를 만족하는 많은 경우의 고유벡터가 존재하게 되는데 조건 1)을 만족하는 고유벡터를 선정함으로써 스피오버와 같이 모델링오차에 기인한

시스템 불확실성에 대해 민감하지 않도록 관측기를 설계할 수 있다. 또한 식 (16)의 조건을 매개변수 벡터  $h_i^d$ 를 이용하여 조건 2)와 같이 수정함으로써 스펙오버역제를 위한 관측기를 설계하기 위해 해석적인 고유구조지정법을 적용하는 것이 가능해진다. 조건 2)에서  $h_i^d$ 는 다음과 같은 식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$h_i^d = \begin{bmatrix} \text{Null}(\bar{c}_{r1}^T) & \text{Null}(\bar{c}_{r2}^T) \\ \dots & \text{Null}(\bar{c}_{r1}^T) \end{bmatrix} \cdot \alpha_i \quad (26)$$

$$i=1, 2, \dots, n_c$$

여기서,  $\alpha_i$ 는 가중치 벡터를 나타낸다.

만약, 위의 스펙오버역제 조건들을 만족하는  $\phi_i^d$ 와  $h_i^d$ 를 구할 수 있으면 식 (25)로부터 다음과 같은 계수벡터  $z_i$ 를 구할 수 있다.

$$z_i = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ \dots \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_i^d \\ \dots \\ h_i^d \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (27)$$

여기서,  $[\cdot]^T$ 는 주어진 행렬의 의사역행렬을 의미한다. 식 (27)에서 의사역행렬은 바람직한 고유벡터  $\phi_i^d$ 가 주어진 획득가능한 벡터공간  $N_{\lambda_i}$ 에 속하지 않으면 최소자승의 관점에서 가장 오차가 적은 획득가능한 고유벡터  $\phi_i^d$ 가 다음과 같이 구해진다는 것을 의미한다.

$$\phi_i^d = N_{\lambda_i} z_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (28)$$

마찬가지로 획득가능한 매개변수 벡터  $h_i^d$ 는

$$h_i^d = M_{\lambda_i} z_i, \quad i=1, 2, \dots, n_c \quad (29)$$

로부터 구할 수 있다.

식 (23)을 이용하면 제어기 게인  $\bar{K}^T$ 는 다음과 같은 식으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$\bar{K}^T = H^a (\Psi_0^a)^{-1} \quad (30)$$

여기서,  $\bar{K}$ 는 관측기 게인이다.

이 장에서는 스펙오버역제를 위하여 완전히 해석적이고 구현이 간단한 새로운 고유구조지정법을 제안하였으며, 이 방법은 시스템적인 설계방법으로써 각 모드별로 스펙오버를 고려할 수 있다는 장점이 있다.

#### 4. 시뮬레이션

이 장에서는 다음과 같이 4차의 제어모드와 8

차의 잉여모드를 가지는 유연한 단순지치보에 대하여 논문에서 제시하는 스펙오버역제를 위한 고유구조지정법을 적용하여 관측기를 설계하고 그 효율성을 살펴본다.

$$\dot{v}_c(t) = \bar{A}_c v_c(t) + \bar{B}_c u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.6943 & 0 & -0.0047 & 0 \\ 0 & -6.3439 & 0 & -0.0073 \end{bmatrix} v_c(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5211 & 0.5211 \\ 0.4179 & -0.4179 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{v}_r(t) = \bar{A}_r v_r(t) + \bar{B}_r u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0065 & 0 & 0 & 0 & -0.001 \\ 0 & -0.1043 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5247 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6223 & 0 \end{bmatrix} v_r(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.4179 & -0.4179 \\ -0.5211 & 0.5211 \\ 0.2319 & 0.2319 \\ -0.2319 & 0.2319 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \bar{C}_c v_c(t) + \bar{C}_r v_r(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5211 & 0.4179 \\ 0 & 0 & 0.5211 & -0.4179 \end{bmatrix} v_c(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_r(t)$$

먼저, 제어기 설계에 있어서 페루프 고유값을 다음과 같이 지정한다.

$$\Lambda_{\text{controller}} = [-3.8 \quad -4.0 \quad -4.2 \quad 4.9]$$

이 때, 제어기 게인은 다음과 같다.

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 10.9224 & 19.3525 & 7.4486 & 11.4526 \\ 11.1229 & -14.7373 & 7.5014 & -10.3159 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{G}\|_{\text{fro}} = 34.4102$$

관측기 설계에서도 관측기 고유값을 다음과 같이 지정한다.

$$\Lambda_{\text{observer}} = [-10.5 \quad -11 \quad -11.5 \quad -12]$$

여기서, 본 논문에서 제시하는 스펙오버역제 방법을 검증하기 위하여 두 가지 경우의 수치예제를 들고자 한다. 먼저, 첫번째 경우에는 일반적인 고유구조지정법을 이용하여 관측기를 설계한 경우 스펙오버 불안정현상이 일어나는 것을 보이고, 두번째 경우에는 3장에서 살펴 본 스펙오버역제를 위한 고유구조지정법을 적용하여 스펙오버 불안정현상이 해소됨을 보인다.

경우 1. 스피오버 불안정현상이 나타나는 경우

일반적인 고유구조지정법을 적용하여 관측기를 설계하면, 다음과 같은 획득가능한 좌모드행렬을 얻을 수 있다.

$$\Psi_o^a = \begin{bmatrix} 65.0694 & 69.9818 & 81.2671 & 54.4606 \\ 157.9645 & 102.8248 & 200.1102 & 59.8676 \\ 184.9395 & 227.3159 & 241.9754 & 169.5290 \\ 261.4521 & 194.5013 & 346.9806 & 108.5258 \end{bmatrix}$$

$$k(\Psi_o^a) = 1412.02$$

여기서,  $k(\cdot)$ 는 조건수(condition number)를 나타내며, 시스템의 불확실성에 대한 민감도를 나타낸다. 이 때, 관측 스피오버항  $\overline{K} \overline{C}$ , 과 그 크기는 다음과 같다.

$$\overline{K} \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 38.8870 & 21.1692 & -21.5807 & 9.4212 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.0744 & 12.6486 & 3.3710 & 5.6292 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22.0006 & -6.8693 & 12.2094 & -3.0571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4011 & -21.8891 & -1.8875 & -9.7416 \end{bmatrix}$$

$$\|\overline{K} \overline{C}\|_{\infty} = 63.5102$$

식 (8)에서 보인 전체 피드백 시스템의 고유값을 구하면 다음과 같다.

$$A_{\text{composite}} = \begin{bmatrix} -27.5276 \pm 3.3158i \\ -3.1740 \pm 11.6502i \\ 0.1278 \pm 9.0056i \\ -0.2096 \pm 1.2944i \\ -0.0941 \pm 2.0636i \\ -0.0405 \pm 0.6250i \\ -0.0236 \pm 1.1554i \\ -0.0184 \\ -0.0045 \end{bmatrix}$$

위의 고유값중에서 한 개의 음이 아닌 고유값이 존재하므로 전체 시스템이 불안정하다는 것을 알 수 있다. 즉, 앞에서 안정하게 지정하였던 페루프 고유값들이 스피오버현상에 의해 변경(shift)되어 안정여유가 줄어들면서 스피오버 불안정현상을 보인다.

경우 2. 스피오버가 억제되는 경우

스피오버억제 조건을 만족하는 획득가능한 좌모드행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Psi_o^a = \begin{bmatrix} -24.6405 & 25.1415 & 1.2776 & -0.5217 \\ 4.9863 & 3.0496 & -9.4753 & -9.6486 \\ -76.7027 & 74.8595 & 4.1498 & -1.4829 \\ 9.0389 & 5.2878 & -17.9232 & -15.9697 \end{bmatrix}$$

$$k(\Psi_o^a) = 174.0702$$

그리고, 획득가능한 매개변수 행렬  $H^a$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H^a = \begin{bmatrix} 0.2478 & 0.2516 & -0.1891 & -0.1963 \\ -0.2142 & 0.2101 & 0.2735 & -0.2655 \end{bmatrix}$$

이 때, 관측 스피오버항  $\overline{K} \overline{C}$ , 과 그 크기는 다음과 같다

$$\overline{K} \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 26.6181 & 0.7487 & -14.7719 & 0.3332 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1518 & 23.5516 & 0.0842 & 10.4815 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18.0266 & -0.2473 & 10.0040 & -0.1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0882 & -28.0685 & -0.0490 & -12.4916 \end{bmatrix}$$

$$\|\overline{K} \overline{C}\|_{\infty} = 54.4149$$

전체 피드백 시스템의 고유값을 살펴보면 다음과 같이 안정하게 나타남을 알 수 있다.

$$A_{\text{composite}} = \begin{bmatrix} -28.3653 \pm 0.6363i \\ -1.3723 \pm 11.8422i \\ -0.8390 \pm 8.8641i \\ -0.2051 \pm 1.3006i \\ -0.0962 \pm 2.0605i \\ -0.0391 \pm 0.6250i \\ -0.0244 \pm 1.1551i \\ -0.0191 \\ -0.0043 \end{bmatrix}$$

두 경우의 수치예제를 통해서 알 수 있듯이 본 논문에서 제시하는 고유구조지정법을 이용하여 설계된 관측기는 스피오버 억제 성능을 가지며 이는 유연구조물의 제어에 있어 중요하게 고려되어야 할 부분이다.

## 5. 결론

본 논문에서는 유연구조물의 진동제어에서 발생하는 스피오버현상을 억제하기 위하여 새로운 고유구조지정법을 적용하였고, 시뮬레이션을 통해 그 효용성을 검증하였다.

## 참고문헌

- (1) D. C. Hyland, J. L. Junkins, and R. W. Longman, 1993, "Active Control Technology for Large Space Structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, pp. 801-821.
- (2) M. J. Balas, 1978, "Active Control of Flexible Systems," *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 23, pp. 415-436.
- (3) M. J. Balas, 1978, "Feedback Control of Flexible Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, pp. 673-679.
- (4) J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, 1995, "Design of an Effective Controller via Disturbance Accommodating Left Eigenstructure Assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 2, pp. 347-354.