

출력 피드백을 이용한 회전형 역진자의 슬라이딩 모드 제어

하종헌* · 최정주* · 김종식**

Sliding Mode Control of Rotational Inverted Pendulums Using Output Feedback Compensator

Jong Heon Ha*, Joeng Ju Choi* and Jong Shik Kim**

Key Words: Rotational Inverted Pendulum(회전형 역진자), Sliding Mode Control(슬라이딩 모드 제어), Output Feedback(출력 피드백)

Abstract

A sliding mode control method using the parameterization of both the hyperplane and the compensator for output feedback and reduced observer is presented for rotational inverted pendulums. This control strategy overcomes the problem of unattainable velocity state which is resulted from severe noise of analogue sense and constructs numerical algorithms for designs of dynamic output feedback sliding mode hyperplane and controller. The result of the experiment shows the superior performance compared with the LQ controller and the robustness with respect to both tapping disturbances and certain initial conditions.

1. 서론

슬라이딩 모드의 가변 구조 제어는 불확실한 동적 시스템을 제어하기 위해 제안된 방법으로 모델 불확실성 및 외란에 강인성을 갖는다. 그러나 안정하며 바람직한 슬라이딩 운동을 제공하는 초평면을 적절하게 선정해야만 한다. 또한 많은 경우 전 상태 피드백을 이용하여 제어시스템을 설계하고 있지만, 실제 시스템에서 불가능한 경우가 많다. 그래서 이를 개선하기 위한 방법으로 Utkin⁽¹⁾, Slotine⁽²⁾, Walcott⁽³⁾ 등은 측정 불가능한 상태에 대해 슬라이딩 모드 관측기를 사용하였고, 또한 White⁽⁴⁾, Khazali 등에 의해 출력 피드백을 이용한 초평면 설계법이 개발되어 왔다. 출

력 피드백을 이용한 방법은 최근에 Edwards⁽⁵⁾가 Ryan과 Corless의 기본 제어 구조를 이용한 방법을 제시했으며, Bag⁽⁶⁾에 의해 보상기와 스위칭 함수행렬 모두를 파라미터화 하는 명확한 해법을 도출하였고 제한 요소가 적고 슬라이딩 운동의 존재 조건을 보증하는 제어기 설계의 직관적인 절차를 용이하게 하였다.

본 논문은 회전형 역진자 시스템에서 진자의 위치를 측정하는 아날로그 계측기의 심각한 잡음의 영향을 줄이기 위해 진자의 각속도를 추약 관측기(reduced order Luenberger observer)⁽⁷⁾를 이용하여 상태를 추출하고 출력 피드백을 이용한 초평면 및 보상기 동역학의 파라미터를 설계한다. 또한 시뮬레이션과 실험을 통하여 본 논문에서 제안한 출력 피드백 슬라이딩 모드 제어시스템이 특정 초기 위치에서의 우수한 레귤레이션 성능과 임의의 태핑(tapping) 외란에도 강인하고 하 안정 위치에서 분기하는 스윙업(swing-up)을 실현시킬 수 있음을 보인다.

* 부산대학교 대학원

** 부산대학교 기계공학부

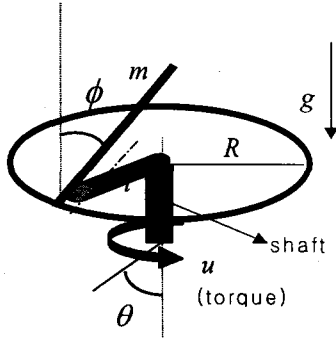


Fig. 1 Schematic of the rotational inverted pendulum

2. 회전형 역진자 시스템 모델링

Fig. 1은 회전형 역진자 시스템의 개략도이다. 시스템의 제어입력은 DC모터의 출력 토크이고 출력은 각각의 엔코더로 측정된 진자의 각도 ϕ 와 수평링크(arm)의 각도 θ 이다. 직접적으로 모터 축에 연결된 수평링크의 끝부분에 진자가 연결되어 있으며 진자의 평면은 수평링크의 길이 R 의 회전반경이고 또한 그것에 수직이며 마찰을 무시한 동역학을 고려한다. 수평링크와 진자의 운동에너지와 위치에너지를 고려하여 Lagrange 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} J_{arm} + m(R^2 + l^2 \sin^2 \phi) & mlR \cos \phi \\ mlR \cos \phi & J_{pen} + ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ml^2 \sin 2\phi \dot{\phi} & -mlR \sin \phi \dot{\phi} \\ -ml^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

위의 식에서 $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ 의 행렬 계수(coefficient)는 각각의 상태의 연성항으로 표현된 일반적인 비선형 항이다. 그리고 회전형 역진자 시스템을 독립상태에서 즉, $\phi=0$, $\dot{\phi}=0$ 에서 선형화 하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} J_{arm} + mR^2 & mlR \\ mlR & J_{pen} + ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

또한 위 식을 다음과 같은 상태방정식으로 표현한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{FH}{F^2 - EG} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EH}{F^2 - EG} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{G}{F^2 - EG} \\ \frac{F}{F^2 - EG} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = [\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T, \quad u(t) = \tau,$$

$$E = J_{arm} + mR^2, \quad F = mlR,$$

$$G = J_{pen} + ml^2, \quad H = -mgl$$

3. 출력 피드백을 이용한 슬라이딩 모드 제어기 설계

3.1 초평면 설계

출력정보를 이용해 초평면을 선정하고, 적절한 추약관측기의 파라미터화로 초평면 및 보상기 동역학의 변수들을 설정하기 위해, 다음과 같이 선형화 된 상대방정식을 고려한다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ 이고, $f(t, x, u)$ 는 불확실 항이다. 그리고 $m \leq p < n$ 이며 다음과 같은 가정을 한다.

행렬 CB 의 계수(rank)는 m 이고, B 와 C 는 완전(full) 계수이며, 시스템 행렬 $A; B, C$ 의 영점은 좌반평면에 놓여져 있고, $f(t, x, u) = B\xi(t, x, u)$ 로 표현되어지는 정합 불확실 항이다.

또한 변환행렬을 통해 주어진 시스템 행렬 A, B, C 를 다음과 같은 표준형으로 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad T]$$

여기서 $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 는 정칙행렬이며 $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 는 직교행렬이다. 그리고 A_{11} 을 다음과 같이 나타낸다.

$$A_{11} = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11}^0 & A_{12}^0 & | \\ \hline 0 & A_{22}^0 & | \\ \hline 0 & A_{21}^0 & | \end{array} \right] \begin{matrix} A_{12}^m \\ A_{22}^m \end{matrix} \quad (5)$$

여기서 $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $A_{11}^0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 이며 $A_{22}^0 \in \mathbb{R}^{(n-p-r) \times (n-p-r)}$, $A_{21}^0 \in \mathbb{R}^{(p-m) \times (n-p-r)}$ 이다.

스위칭 함수 $s(t) = FCx(t)$ 의 형태이고 슬라이딩 모드 초평면 S 를 다음과 같이 선정한다.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : FCx = 0\} \quad (6)$$

여기서 $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 이고, F 는 다음 식이 만족되도록 선정한다.

$$\begin{bmatrix} p-m & m \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix} = FT \quad (7)$$

그러므로 스위칭 함수 행렬 FC 는 다음과 같다.

$$FC = [F_1 C_1 \quad F_2] \quad (8)$$

여기서 $C_1 = [0_{(p-m) \times (n-p)} \quad I_{(p-m)}]$ 이다.

이때 차수가 줄어진 슬라이딩 운동을 결정하는 시스템 행렬 A_{11}^s 는 다음과 같다.

$$A_{11}^s = A_{11} - A_{12} F_2^{-1} F_1 C_1 \quad (9)$$

여기서 $F_2^{-1} F_1$ 을 K 로 정의함으로써 적절한 초평면 선정의 문제는 A_{11} , A_{12} , C_1 에 대한 출력 피드백 문제로 귀결된다. 만일 영점을 가지는 시스템에 대해서는 식 (5)에서 A_{12} 와 A_{12}^m 을 다음과 같이 다시 분할시켜 고려한다.

$$A_{12} = \begin{bmatrix} A_{121} \\ A_{122} \end{bmatrix}, \quad A_{12}^m = \begin{bmatrix} A_{121}^m \\ A_{122}^m \end{bmatrix} \quad (10)$$

또한 다음과 같이 새로 정의한 부시스템 \tilde{A}_{11} , \tilde{C}_1 을 나타낸다.

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{22}^0 & A_{122}^m \\ A_{21}^0 & A_{22}^m \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{C}_1 = [0_{(p-m) \times (n-p-r)} \quad I_{(p-m)}]$$

Edwards⁽⁵⁾에 의해 식 (9)를 풀어 정리하면 A_{11}^s 의 고유값 집합에 A , B , C 의 영점이 포함된다.

그리고 만일 \tilde{A}_{11} , A_{122} , \tilde{C}_1 이 Kimura-Davison 조건을 만족한다면, 출력 피드백 극배치 기법은 적절한 극점을 배치할 수 있으나 그렇지 않으면 적절한 차원의 보상기가 다음과 같이 추가되어야 한다.

$$\dot{x}_c(t) = Hx_c(t) + Dy(t) \quad (12)$$

여기서 $H \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ 이다.

그리고 새로운 보상기가 첨가된 상태공간에서 초평면 S_c 는 다음과 같다.

$$S_c = \{(x, x_c) \in \mathbb{R}^{n+q} : F_c x_c + FCx = 0\} \quad (13)$$

여기서 $F_c \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 이다. 그리고 다음 식을 만족하는 $D_1 \in \mathbb{R}^{q \times p-m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ 를 정의한다.

$$[D_1 \quad D_2] = DT \quad (14)$$

또한 편의상 입력에 관계된 행렬 A_{122} 를 다음과 같이 나누면,

$$A_{122} = \begin{bmatrix} A_{1221} \\ A_{1222} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow n-p-r \\ \uparrow p-m \end{matrix} \quad (15)$$

이 때 보상기의 파라미터 H , D 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁸⁾

$$H = A_{22}^0 + L^0 A_{21}^0 \quad (16)$$

$$D_1 = A_{122}^m + L^0 A_{22}^m - (A_{22}^0 + L^0 A_{21}^0) L^0 \quad (17)$$

$$D_2 = A_{1221} + L^0 A_{1222} \quad (18)$$

여기서 $L^0 \in \mathbb{R}^{(n-p-r) \times (p-m)}$ 은 $A_{22}^0 + L^0 A_{21}^0$ 을 안정하게 하는 제어게인 행렬이다.

이제 $\tilde{A}_{11} - A_{122} K$ 가 안정한 피드백 행렬 K 를 선정하고 다음과 같이 분리한다.

$$K = \begin{bmatrix} n-r-p & p-m \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $K = K_2 - K_1 L^0$, $K_c = K_1$ 로 정의한다.

또한 $r > 0$ 일 때 x_r 을 추정하기 위해 다음의 측약관측기 식을 사용한다.

$$\dot{z}_r(t) = A_{11}^0 z_r(t) + A_{12}^0 x_c(t) + (A_{121}^m - A_{12}^0 L^0) x_{12}(t) + A_{121} x_2(t) \quad (20)$$

식 (12)에 식 (20)을 확장시켜 새로운 보상 시스템을 유도하면,

$$\hat{x}_c(t) = \hat{H} \hat{x}_c(t) + \hat{D} y(t) \quad (21)$$

여기서

$$\hat{H} \triangleq \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ 0 & H \end{bmatrix},$$

$$\hat{D} \triangleq \begin{bmatrix} (A_{121}^m - A_{12}^0 L^0) & A_{121} \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} T^T$$

그리고 $\hat{x} = [\hat{x}_c \quad T^T y]^T$ 를 정의하면 설계된 슬라이딩 평면 S_c 는 다음과 같다.

$$S_c = \{ \hat{x} \in \mathbb{R}^n : S\hat{x} = 0 \} \quad (22)$$

여기서

$$S = F_2 [0_{m \times r} \quad K_C \quad K \quad I_m] \quad (23)$$

3.2 제어 법칙 설계

앞 절의 이론을 기초로 슬라이딩 제어법칙을 유도하면 다음과 같다.

$$u(t) = L\hat{x}(t) + u_n(t) \quad (24)$$

여기서

$$L = -\Lambda^{-1} S \hat{A} + \Lambda^{-1} \Phi S \quad (25)$$

$$u_n(t) = \begin{cases} \rho \Lambda^{-1} \text{sgn}(Ps(t)) & , s(t) \neq 0 \text{일때} \\ 0 & , s(t) = 0 \text{일때} \end{cases} \quad (26)$$

여기서 \hat{A} 는 식 (18)과 식 (21)을 시스템 행렬에 첨가하여 정리한 보상 시스템 행렬이다. 또한

$\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 는 안정 설계 행렬이고 P 는 Lyapunov 방정식 $P\Phi + \Phi^T P = -I$ 을 만족하는 양의 한정 해이다. 그리고, $\Lambda = SB$ 이며 ρ 는 다음과 같다.

$$\rho = \frac{(k\|A\|\|u_f(t)\| + \|A\|\Phi(y) + \gamma_2)}{(1 - kx(\Lambda))} \quad (27)$$

여기서 γ_2 는 작은 양의 상수이고, k 과 $kx(\Lambda)$ 는 1보다 작은 양의 실수로 아래의 조건을 만족하며 $x(\Lambda)$ 는 조건 수(condition number)이다.

$$k\sqrt{\lambda_{\min}(B^T B)}, kx(\Lambda)\|B^{-1}\| < 1$$

또한 $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 초평면 절환 주파수가 무한히 큰 입력을 요구하여 심각한 채터링을 유발할 수 있으므로 시그모이드(sigmoid) 함수 $v_\delta(s)$ 를 사용하여 채터링 현상을 제거한다.⁽⁹⁾

$$v_\delta(s) = \frac{Ps(t)}{\|Ps(t)\| + \delta} \quad (28)$$

여기서 δ 는 작은 양의 상수이다.

4. 시뮬레이션 및 실험 결과

4.1 시뮬레이션 결과

출력 피드백을 이용한 회전형 역진자 시스템의 슬라이딩 모드 제어기에 대한 검증을 위해 전 상태 피드백 제어기인 LQ 제어기를 설계하고 시뮬레이션을 통해 비교 검토한다. Table 1과 Table 2에는 각각 시스템 파라미터와 출력 피드백 슬라이딩 모드 제어기의 설계 파라미터들이 요약되어 있다. Fig. 2와 Fig. 3은 각각 초기위치가 0.3, 0.6 rad인 회전형 역진자 시스템을 출력 피드백을 이용한 슬라이딩 모드 제어기와 LQ 제어기와의 시뮬레이션 성능을 비교한 것이다. LQ 제어기의 설계 파라미터는 시행 착오적인 방법에 의해 우수한 성능을 갖도록 다음과 같이 선정하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1$$

Fig. 2에서 초기 위치가 0.3 rad일 때 출력 피드백 슬라이딩 모드 제어기가 전 상태 피드백을 하는 LQ 제어기보다 정상상태 도달 시간은 약간 빠르나 오버슈트가 크고 더 큰 제어입력을 사용한다. 초기값이 0.6 rad인 Fig. 3에서는 거의 같은 성능을 보이나 역시 제어입력 값은 출력 피드백 슬라이딩 모드 제어가 많이 사용되었다.

Table 1 Parameters of the plant

Parameter	J_{arm}	J_{pen}	m	R	l
Value	0.0845	0.009	0.11	0.292	0.25
Unit	kgm^2	kgm^2	kg	m	m

Table 2 Parameters of the controller

Parameter	Value
Q	diag([4 100 0.1 10])
\hat{H}	[-20]
\hat{D}	[0 -388.25 6.94]
S	[7.68 -1.75 179.76 1]
L	[9.3 -1.58 217.79 1.56]
Φ	-10
ρ	1
δ	0.001

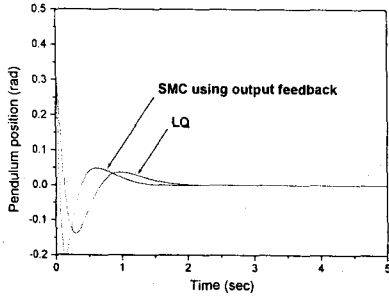


Fig. 2 Simulation results of pendulum position with $\phi(0)=0.3$ rad

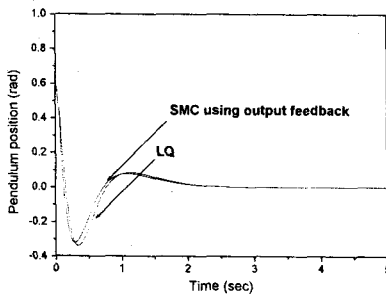


Fig. 3 Simulation results of pendulum position with $\phi(0)=0.6$ rad

4.2 실험 결과

Fig. 4는 실험 시스템 구성을 나타낸다. 2축 매니플레이터에서 2축만을 사용하여 시스템을 구성하였고, 잡음의 영향을 줄이기 위해 시스템 응답 성능을 떨어뜨리지 않는 범위 내에서 차단주파수가 100 rad/sec이고 감쇠계수가 0.7인 저주파 통과 필터를 사용하였으며 표본 추출 시간 (sampling time)은 0.001초로 선정하였다.

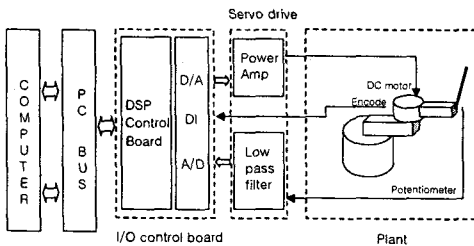
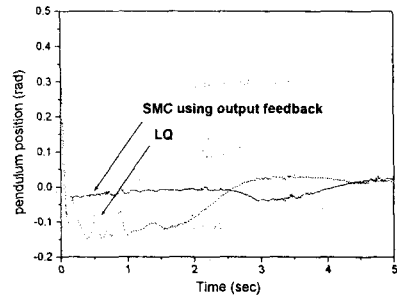
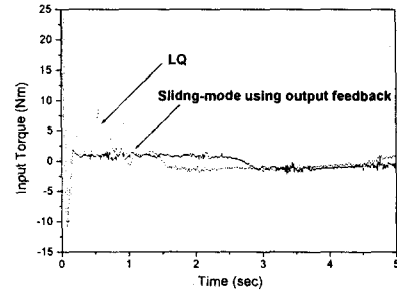


Fig. 4 Configuration of the control system



(a) Output comparison



(b) Control input comparison

Fig. 5 Experimental results of output and control input with $\phi(0)=0.3$ rad

Fig. 5와 Fig. 6은 각각 초기위치가 0.3 rad, 0.6 rad인 경우의 레귤레이션 성능과 강인성 비교를 나타내었다. Fig. 5에서 필터링(filtering) 되지 않은 잡음에 의해 LQ 제어시스템의 출력값과 제어 입력 값이 심하게 변하고 있는 것을 알 수 있으므로, 잡음 외란과 선형화 시킨 플랜트가 가지는 모델오차에 대해 LQ 제어가 출력 피드백을 이용한 슬라이딩 제어기보다 성능이 훨씬 떨어지는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 6의 경우, LQ 제어기는 수평링크의 초기 설정 한계 범위 $-\pi < \theta < \pi$ 를 넘어서 제어가 되었고 출력 피드백을 이용한 슬라이딩 모드 제어는 한계 범위 내에서 진자의 자세제어가 이뤄졌다. 또한 가벼운 태핑(tapping) 외란에서도 LQ 제어기보다 강인한 성능을 보임을 알 수 있다. Fig. 7에서는 하 안정 위치에서 뱅뱅(bang-bang) 제어로 스윙(swing)하여 도립 위치 근처의 0.2 rad에서 슬라이딩 모드로 스위칭 함으로써 임의의 초기 속도, 초기 위치에서도

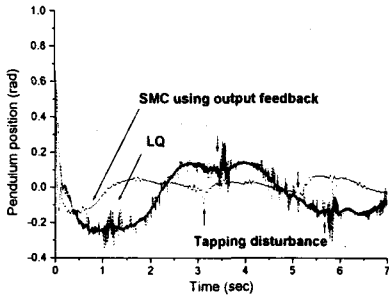


Fig. 6 Experimental results of pendulum position with tapping disturbance in case of $\phi(0)=0.6$

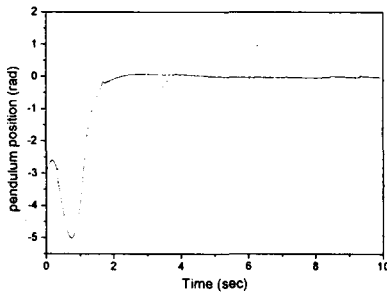


Fig. 7 Experimental results of pendulum position for SMC Swing-up control

강인함을 증명하였다.

5. 결론

본 논문에서는 회전형 역진자 시스템을 모델링 하였으며 출력 정보를 이용하여 강인성을 지닌 우수한 성능의 슬라이딩 모드 제어를 설계할 수 있음을 보였다. 또한 보상기와 스위칭 함수 행렬 모두를 파라미터화 하는 명확한 해법을 유도함으로써 출력 피드백 슬라이딩 모드 제어의 수치적 알고리즘을 제시하였다. 그리고 심한 잡음을 가진 아날로그 센서를 사용한 회전형 역진자 시스템에 적용하여 실험적으로 전상대 피드백 제어기인 LQ 제어기와 비교함으로써 제안된 출력 피드백 슬라이딩 제어기가 우수한 성능과 강인성을 가짐을 검증하였다. 출력 피드백을 이용한 슬라이딩 모드 제어는 전 상태를 추출할 수 없는 시스템에서 더욱 유용하며 외란에 대해 강

인성을 가지는 넓은 제어범위의 합리적인 제어시스템 구현이 가능함을 보였다.

참고문헌

- (1) Utkin, V. I., 1992, "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag.
- (2) Slotine, J. J. E., Hedrick, J. K. and Misawa, E. A., 1987, "On Sliding Observers for Nonlinear Systems", *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 109, pp. 245-252.
- (3) Walcott, B. L., and Zak, S. H., 1998, "Combined observer-controller synthesis of uncertain dynamical systems with applications", *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 18, pp. 88-104.
- (4) White, B. A., 1990, "Applications of output feedback in variable structure control systems", *Deterministic control of uncertain systems*, Chapter 8, Peter peregrinus, pp 144-169.
- (5) Edwards, C., and Spurgeon, S. K., 1995, "Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information", *INT. J. Control*, Vol. 62, pp. 1129-1144.
- (6) Bag, S. K., Spurgeon, S. K., and Edwards, C., 1997, "Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems", *Proceedings of IEE*, Part D, Vol 144, pp. 209-216.
- (7) Luenberger, D. G., 1971, "An Introduction to Observers", *IEEE Tran. on Auto. Control*, Vol. AC-16, No. 6, pp. 506-602.
- (8) Edwards, C., and Spurgeon, S. K., 1998, "Compensator based output feedback sliding mode controller design", *INT. J. Control*, Vol. 71, No. 4, pp. 601-614.
- (9) K-K. D. Young, 1993, "Variable structure control for robotics and aerospace application.", Elsevier Science Publishers B. V.
- (10) 김 종식, 1988, *선형 제어시스템 공학*, 청문각.
- (11) Utkin, V. I., Chen, D. S., 1998, "Sliding mode control of pendulum systems", *Movic*, Vol 2, pp. 787-792.