

스캐닝 레이저 도플러 진동 측정기를 이용한 모드 측정

강 민 식*

Measurement of Mode Shape By Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer

Kang, Min Sig

Key Words: mode shape, scanning laser Doppler vibrometer, Fourier transform, Hilbert transform, envelope, instantaneous phase

Abstract

When spatially dense velocity distribution is measured by a scanning laser Doppler vibrometer, the Fourier transform method provides the real and imaginary parts of the mode shapes in the form of a polynomial. However the Fourier transform method is often impractical because the independent decomposition property of cosine and sine components into real and imaginary parts, respectively, does not hold due to the leakage problem which commonly occurs in the Fourier transform of harmonic signals. To deal with this problem, a Hilbert transform method is newly proposed in this article. The proposed method is free from the leakage problem and relatively robust to the scanning error. A simulation example is provided to verify the effectiveness of this method.

기호설명

- $E(t)$: $v(s, t)$ 의 점근선 신호
- $v(s, t)$: s 의 위치에서 측정된 진동속도
- $\hat{v}(s, t)$: $v(s, t)$ 의 Hilbert 변환
- $V_a(s)$: 복소모드의 실수부
- $V_b(s)$: 복소모드의 허수부
- $\theta(t)$: $v(s, t)$ 의 순간위상 신호
- Ω : 스캔 속도
- $\mathcal{H}[*]$: *의 Hilbert 변환

1. 서 론

구조물의 실험적 진동해석에서 레이저 도플러 진동계(laser Doppler vibrometer: LDV)는 종래 많이 사용되어왔던 변위계나 가속도계에 비해 많은 장점을 갖고 있다. LDV는 대상 구조물에 직접 부착하지 않으며 비교적 먼 거리에서 진동을 측정할 수 있으므로, 센서의 부착에서 오는 구조물 특성의 변화를 피할 수 있고, 센서 부착이 어려운 열악한 환경에서도 측정이 가능하여 적용이 확대되어가고 있는 추세이다. 특히 LDV의 레이저 빔(beam)으로 구조물 표면을 스캔(scan)하여 진동을 측정하는 다음 신호해석을 통해 모드를 추출하는 방법은 기존의 고정점 진동 측정방법에 비해 구조물 표면의 공간상 분해능을 높일 수 있어 새로운 모드해석 방법으로 소개되고 있다⁽¹⁻⁵⁾. 이러한 스캐닝 레이저 도플러 진동측정기(scanning laser Doppler vibrometer: SLDV)를 이용한 모드해석 방법은 측정된 신호를 복조(demodulation)하는 방법과, Fourier 변환하여 스펙

* 경원대학교 기계설계학과

트럼상의 실수부와 허수부, 또는 크기와 위상 정보를 이용하여 모드를 추출하는 방법이 소개되고 있다⁽¹⁻⁴⁾. Fourier 변환을 이용하는 방법은 기본적으로 신호에 포함된 여현파(cosine wave)와 정현파(sine wave) 성분이 각각 스펙트럼상의 실수부와 허수부로 독립적으로 분해되는 특성을 이용한다. 그러나 실제 신호해석에서는 신호를 샘플링(sampling)하여 이산 Fourier 변환(discrete Fourier transform: DFT)을 하므로, DFT가 위의 특성을 만족해야 적용할 수 있다. 조화함수의 DFT에서 데이터의 길이가 조화함수의 주기의 정배수가 되지 않으면 누설(leakage)문제가 발생하며, 이 누설이 발생하면 위의 독립적 분해 특성을 만족할 수 없다⁽⁶⁾. 그러나 측정된 신호는 여러 조화함수의 합으로 표현되므로 각 조화함수 주기의 공배수에 해당하는 주기를 설정하는 것은 거의 불가능하다.

본 연구에서는 이러한 Fourier 변환을 이용한 모드함수 결정법의 문제점을 해결하기 위해 Hilbert 변환을 이용하는 방법을 제안한다. 제안된 방법의 특성을 파악하기 위해 전산해석을 수행하였으며, Fourier 변환을 이용하는 방법과의 비교 결과를 제시하였다.

2. SLDV를 이용한 모드함수 결정

구조물이 자체의 어느 한 고유 진동수 ω_b 로 가진 되고 있을 경우, 구조물 임의의 한 점에서 측정된 진동은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$v(s,t) = V_a(s) \cos \omega_b t + V_b(s) \sin \omega_b t \quad (1)$$

여기서 $v(s,t)$ 는 LDV의 스캔선(scan line)을 따라 거리 s 에서 측정된 진동의 속도이며, $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 는 복소모드(complex mode shape)의 실수부와 허수부에 해당한다. 식(1)로 표현되는 신호를 이용하여 구조물의 모드를 추출하는 방법은 다음과 같이 복조(demodulation)방식, 이산 Fourier 변환 방식 등이 소개되어있다⁽¹⁻⁴⁾. 이를 간단히 살펴보면 다음과 같다.

2.1 복조방식에 의한 모드 결정

식(1)의 신호는 일종의 변조(modulation)된 형태

로 이 신호에 정현파와 여현파를 곱하여 복조할 수 있다. 즉, 식(1)에 여현파를 곱하고 정리하면

$$v(s,t) \cos \omega_b t = \frac{1}{2} V_a(s) + \frac{1}{2} V_a(s) \cos 2\omega_b t + \frac{1}{2} V_b(s) \sin 2\omega_b t \quad (2-1)$$

그리고 정현파를 곱하고 정리하면

$$v(s,t) \sin \omega_b t = \frac{1}{2} V_b(s) + \frac{1}{2} V_a(s) \sin 2\omega_b t - \frac{1}{2} V_b(s) \cos 2\omega_b t \quad (2-2)$$

식(2-1)과 (2-2)에서 $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 는 LDV의 스캔 속도에 따른 시간의 함수가 된다. 따라서 만일 LDV의 스캔속도가 느려서 $V_a(t)$ 와 $V_b(t)$ 의 주파수 성분이 $2\omega_b$ 에 비해 충분히 낮을 경우, 식(2-1)과 (2-2)의 신호를 저역필터(lowpass filter)를 통과시켜 $V_a(t)$ 와 $V_b(t)$ 를 얻을 수 있으며, LDV의 시간에 따른 구조물 표면상의 스캔위치는 이미 알고 있으므로 $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 를 얻을 수 있다.

2.2 Fourier 변환을 이용한 모드 결정

앞의 복조방식에서와는 달리 일정한 주기함수 형태로 스캔할 경우 Fourier 급수로 나타낼 수 있다. 일반적으로 원형(circular) 또는 직선(line) 형태의 스캔이 많이 이용된다.

2.2.1 원형 스캔 방식

LDV가 일정한 각속도 Ω 로 구조물 표면을 원형으로 스캔할 경우, 즉

$$s(t) = \cos(\Omega t + \gamma) \quad (3)$$

식(3)에서 γ 는 원을 따라 나타낸 공간상의 위상을 나타내며, 스캔 반지름은 표준화(normalize)된 값이다. 따라서 $V_a(t)$ 와 $V_b(t)$ 는 Fourier 급수로 나타낼 수 있으며, 이를 식(1)에 대입하고 정리하면 다음 식과 같이 스펙트럼이 $\omega_b \pm k\Omega$ 에서 측과대(sideband)를 보인다.

$$v(s,t) = V_{a0} \cos(\omega_b t - \alpha_0) + V_{b0} \sin(\omega_b t - \alpha_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=\pm 1}^p \left[\frac{V_{ak} + V_{bk}}{2} \cos\{(\omega_b - k\Omega)t + k\gamma_k - \alpha_k\} \right] \\
& + \sum_{k=\pm 1}^p \left[\frac{V_{ak} - V_{bk}}{2} \cos\{(\omega_b + k\Omega)t - k\gamma_k - \alpha_k\} \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

따라서 신호 $v(s, t)$ 를 Fourier 변환하고 각 측과 대에서 스펙트럼의 크기와 위상을 읽어 V_{ak} 와 V_{bk} 를 결정하면, 모드함수 $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 를 결정할 수 있다.

2.2.2 직선 스캔방식

LDV 빔이 구조물 표면을 직선형태로 다음 함수와 같이 스캔할 경우

$$s(t) = \cos(\Omega t) \quad (5)$$

여기서 구조물의 크기는 표준화되어 $-1 \leq s \leq 1$ 로 가정한다. 식(1)의 진동 신호는 시간만에 관련된 함수가 된다.

$$v(s, t) = V_a(\cos \Omega t) \cos \omega_b t + V_b(\cos \Omega t) \sin \omega_b t \quad (6)$$

식(6)의 모드함수 $V_a(\cos \Omega t)$ 와 $V_b(\cos \Omega t)$ 는 주기 함수이므로 Fourier 급수로 전개할 수 있으며, 전개한 각 항은 Chebyshev 다항식으로 나타나므로, 각 모드함수는 다음과 같이 s 에 관한 n -차 다항식으로 근사화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_a(s) &= v_{a0} + v_{a1}s + v_{a2}s^2 + \dots + v_{an}s^n \\
V_b(s) &= v_{b0} + v_{b1}s + v_{b2}s^2 + \dots + v_{bn}s^n \quad (7)
\end{aligned}$$

식(5)를 식(7)에 대입하고, 그 결과를 다시 식(6)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
v(s, t) &= A_0 \cos \omega_b t + B_0 \sin \omega_b t \\
& + \sum_{i=1}^n A_i \{ \cos(\omega_b - i\Omega)t + \cos(\omega_b + i\Omega)t \} \\
& + \sum_{i=1}^n B_i \{ \sin(\omega_b - i\Omega)t + \sin(\omega_b + i\Omega)t \} \quad (8)
\end{aligned}$$

식(8)의 계수 A_i , B_i 와 식(7)의 계수 v_{ak} , v_{bk} 는 다음의 행렬변환 관계를 갖는다.

$$\{\tilde{v}_{ak}\} = [T]\{\tilde{A}_k\}, \quad \{\tilde{v}_{bk}\} = [T]\{\tilde{B}_k\} \quad (9)$$

식(9)에서 $[T]$ 는 상수변환행렬이다⁽²⁾. 식(8)에서 $v(s, t)$ 의 Fourier 변환은 원형 스캔에서와 같이 $\omega_b \pm k\Omega$ 에서 측과대가 생기며, 각 해당 주파수에

서 실수부의 첨두값(peak value)들로부터 A_k 를 정하고, 허수부의 첨두값들로부터 B_k 를 결정할 수 있다. 따라서 식(9)로부터 식(7)의 다항식 형태의 모드함수를 얻을 수 있다.

이상의 원형 또는 직선 스캔에서와 같이 Fourier 변환에 의한 방식은 식(8)과 같이 여현과와 정현과 성분이 섞여있는 신호를 Fourier 변환하면 여현과 성분과 정현과 성분이 각각 실수부와 허수부로 독립적으로 분해되는 특성을 이용하는 방법이다. 그러나 실제 신호의 Fourier 변환은 LDV에서 측정된 신호 $v(s, t)$ 를 일정 샘플링 간격으로 샘플링하고, 이 이산 데이터를 DFT를 통해 얻게된다. 그러나 DFT에서는 한정된 길이의 신호만을 변환하므로 누설(leakage)문제가 불가피하다. 조화함수의 DFT에서 데이터의 길이가 조화함수의 주기의 정배수가 되지 못하면 누설문제는 피할 수 없다⁽⁶⁾. 따라서 식(4)나 (8)과 같이 다수의 조화함수가 포함된 경우 데이터의 길이를 누설현상이 발생하지 않도록 설정하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 이상과 같은 Fourier 변환을 통한 방법은 적용상의 어려움이 존재한다. 이러한 문제점을 해결할 수 있는 방법으로 다음의 Hilbert 변환을 통한 모드 결정방법을 제시하고자 한다.

3. Hilbert 변환을 이용한 모드함수 결정

식(6)과 같이 주어지는 진동신호에서 모드함수 $V_a(\cos \Omega t)$ 와 $V_b(\cos \Omega t)$ 의 최고 주파수가 가진 주파수 ω_b 보다 작을 경우 $V_a(\cos \Omega t)$ 와 $V_b(\cos \Omega t)$ 는 각각 여현과와 정현과 함수의 점근선(envelope)에 해당되며, 따라서 시간 축에서 신호의 점근선을 얻을 수 있는 Hilbert 변환을 적용하여 모드함수 $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 를 구할 수 있다.

Hilbert 변환은 크기는 변화시키지 않고 위상만 $-\pi/2$ 만큼 변화시키는 필터의 일종으로 이해할 수 있다⁽⁷⁾. 이 특성을 이용하여 모드함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

앞의 가정과 같이 $V_a(\cos \Omega t)$ 와 $V_b(\cos \Omega t)$ 의 최고 주파수가 가진 주파수 ω_b 보다 작을 경우, 식(6)의

$\tilde{v}(s, t)$ 를 $v(s, t)$ 의 Hilbert 변환이라 하면

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s, t) &\equiv \mathcal{H}[v(s, t)] \\ &= V_a(\cos \Omega t) \sin \omega_b t - V_b(\cos \Omega t) \cos \omega_b t \quad (10) \end{aligned}$$

따라서 다음의 복소함수 $z(s, t)$ 를 정의하면

$$z(s, t) \equiv v(s, t) + j\tilde{v}(s, t) = E(t)e^{j\theta(t)} \quad (11)$$

식(11)에서 $E(t)$ 과 $\theta(t)$ 는 신호 $v(s, t)$ 의 점근 신호와 순간위상신호로서 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} E(t) &\equiv \sqrt{v^2(s, t) + \tilde{v}^2(s, t)} \\ &= \sqrt{V_a^2(\cos \Omega t) + V_b^2(\cos \Omega t)} \quad (12-1) \\ \theta(t) &= \tan^{-1} \left[\frac{V_a(\cos \Omega t) \sin \omega_b t - V_b(\cos \Omega t) \cos \omega_b t}{V_a(\cos \Omega t) \cos \omega_b t + V_b(\cos \Omega t) \sin \omega_b t} \right] \\ &= \omega_b t + \tan^{-1} \frac{V_b(\cos \Omega t)}{V_a(\cos \Omega t)} \quad (12-2) \end{aligned}$$

따라서 식(12-1)과 (12-2)에서 $V_a(s)$ 와 $V_b(s)$ 는 다음의 관계에서 구할 수 있다.

$$V_a(s)|_{s=\cos \Omega t} = E(t) \cos\{\theta(t) - \omega_b t\} \quad (13-1)$$

$$V_b(s)|_{s=\cos \Omega t} = E(t) \sin\{\theta(t) - \omega_b t\} \quad (13-2)$$

(i) 앞의 주파수에 대한 가정은 실제 구조물의 모드형태함수가 완전한 연속함수이며, LDV의 반사경 구동계의 대역폭(bandwidth)에 지배받는 스캔 속도 Ω 가 구조물 고유진동수 ω_b 에 비해 작으며, 또한 Ω 는 측정자가 자유로이 선정할 수 있는 변수이므로 그리 제한적인 가정은 아니다. 이 가정은 Fourier 변환을 이용하여 해석에서도 요구되는 조건으로, 만일 이 가정이 만족되지 못하면 Fourier의 측과대 주파수가 음의 주파수 영역에 존재하는 경우가 되어 해석이 불가능하다.

(ii) 실모드(real mode)인 경우 $V_b(s)$ 가 존재하지 않으므로 순간위상신호는 $\theta(t) = \omega_b t$ 가 되나, 스캔선이 $V_a(s) = 0$ 인 노드점(node point)를 지나서 순간 180° 만큼 위상변화가 생기므로, $V_a(s)$ 의 부호변화를 알 수 있다.

(iii) Fourier 변환을 통한 모드함수 해석은 LDV가 식(3)이나 (5)와 같이 조화함수 형태로 스캔할 경우를 가정하므로 만일 실제 측정시 LDV 반사경 구동계가 완벽한 조화함수를 실현하지 못할 경우 오차가 발생한다. 그러나 Hilbert 변환을 이

용한 방법은 앞의 $V_a(\cos \Omega t)$ 와 $V_b(\cos \Omega t)$ 의 주파수 대역에 대한 가정만을 필요로 하므로 이러한 스캔 부정확도에 강인한 특성을 보인다.

(iv) Hilbert 변환을 이용하여 구한 모드는 식(7)과 같이 다항식으로 근사화시켜 나타낼 수 있다.

4. 컴퓨터 시뮬레이션

임의의 복소모드를 갖는 빔 형태의 구조물을 대상으로 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 가정된 모드는 실수부와 허수부가 각각 다음 식과 같이 다항식으로 표현된다고 가정하자.

$$V_a(x) = x - 2x^2 - 3x^3 + 4.5x^4 \quad (14-1)$$

$$V_b(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^3 \quad (14-2)$$

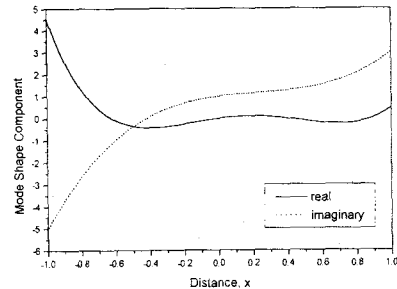


Fig. 1 True real and imaginary mode shape components

식(14)에서 x 는 스캔선을 따라 정의된 직선거리이며 $-1 \leq x \leq 1$ 이다. 그림 1은 식(14)의 모드를 보여준다. 이 구조물을 일정크기의 100Hz 여현파 형태로 가진하면서 ($\omega_b = 100\text{Hz}$) 식(5)와 같이 각 속도 $\Omega = 2\text{Hz}$ 로 LDV를 스캔하며 속도를 측정할 경우 측정된 신호는 그림 2와 같다. 여기서 신호의 샘플링 간격은 $\Delta t = 0.002\text{sec}$ 이다. 해석을 위해 취한 데이터의 길이는 1초로, 이 데이터의 길이는 측정 표면을 4번 스캔한 길이에 해당하며, 스펙트럼의 주파수 분해능은 1Hz 로 스캔 주파수의 $\Omega = 2\text{Hz}$ 의 절반에 해당한다. 그림 3-1과 3-2는 측정된 신호를 DFT한 결과의 실수부와 허수부로 뚜렷이 구별된 측과대를 보이며, 중앙의 가진 주파수 100Hz 를 중심으로 대칭의 관계를 갖는다.

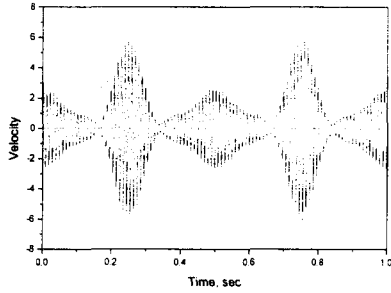


Fig. 2 Measured velocity using SLDV

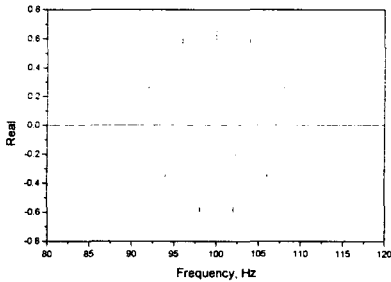


Fig 3.1 Real part of DFT when $\omega_b = 100\text{Hz}$

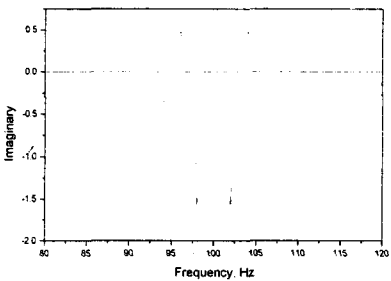


Fig. 3.2 Imaginary part of DFT when $\omega_b = 100\text{Hz}$

이 경우는 앞에서 설명 바와 같이 모든 측파대의 주파수가 주파수 분해능의 정확한 정수배에 해당되어 누설문제가 발생하지 않는 경우이다. 그림 3의 실수부와 허수부의 측파대에서 첨두값을 읽은 다음 식(9)에 대입하여 얻은 식(7)의 다항식 계수는 식(19)의 계수와 일치하는 결과를 준다. 그림 4는 Hilbert 변환을 이용하여 구한 모드의 실수부와 허수부로 그림 1의 모드와 거의 일치하

는 결과를 보인다. 단, $x=1$ 에서의 오차는 데이터의 시작과 끝나는 지점에서 구한 점근선의 오차에서 기인한다.

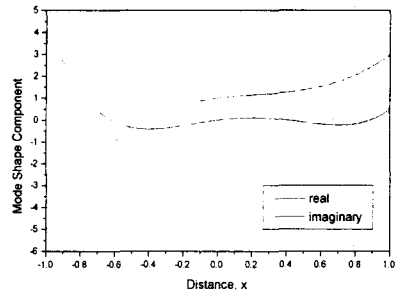


Fig. 4 Real and imaginary mode shape components estimated by Hilbert transform method

이 오차는 간단한 데이터의 재배열 및 추가를 통해 줄일 수 있다. 지금까지의 데이터 해석에서 모든 조건은 유지되고, 고유진동수와 가진주파수만 100.2Hz 로 변화된 경우를 해석해보자. 이 경우는 스펙트럼에서 누설이 발생하는 조건으로, 그림 5와 같이 누설에 의해 정현파와 여현파 성분의 독립적 분리가 이루어지지 않아 그림 3과는 매우 다른 결과를 보인다. 그림 5에서는 측파대의 구분이 어려워 식(9)에서 필요한 첨두치를 구할 수 없다. 따라서 이 경우 Fourier 변환 방식은 더 이상 적용이 어렵다. 그림 6은 동일한 경우 Hilbert 변환을 이용하여 구한 모드로 그림 1의 모드와 거의 유사한 결과를 보이며, 이를 다항식으로 근사화하면 식 (19)의 계수와 매우 정확하게 일치된다.

5. 결론

스캐닝 레이저 도플러 진동 측정계를 이용한 실험적 모드해석에서 Fourier 변환을 이용하는 방법의 문제점을 분석하였으며, 이 문제점을 해결할 수 있는 방법으로 Hilbert 변환 방법을 제안하였다. Hilbert 변환방법의 적용성 검증을 위해 시뮬레이션을 수행했으며, 그 결과 Fourier 변환의 문제점과 Hilbert 변환 방법의 장점을 확인하였다.

다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. P. Sriram, "Mode shape measurement using a scanning laser Doppler vibrometer," The international J. of analytical and experimental modal analysis, vol.7, no.3, pp.169-178, 1992 .
2. A.B. Stanbridge and D. J, Ewins, "Modal testing using a scanning laser Doppler vibrometer," Mechanical systems and signal processing, vol.13, no.2, pp.255-270, 1999.
3. A.B. Stanbridge, M. Martarelli & D. J, Ewins, "Measureing area mode shapes with a scanning laser Doppler vibrometer," Proc. Of IMAC XVII, pp.980-984, 1999.
4. A.B. Stanbridge, and D. J, Ewins, "Measurement of translational and angular vibration using a scanning laser Doppler vibrometer," Shock and vibration, vol.3, no.2, pp.141-152, 1996.
5. A.B. Stanbridge, M. Martarelli & D. J, Ewins, "The scanning laser Doppler vibrometer applied to impact modal testing," Proc. Of IMAC XVII, pp.986-991, 1999.
6. J.S. Bendat and A.G. Piersol, Random Data Analysis and measurement procedures, second edition, John Wilely & Sons, 1986.
7. M. Feldman, "Non-linear free vibration identification via the Hilbert transform," Journal of Sound and Vibration, vol.208, no.3, pp.475-489, 1997.

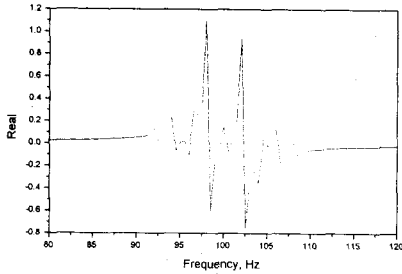


Fig. 5.1 Real part of DFT when $\omega_b = 100.2Hz$

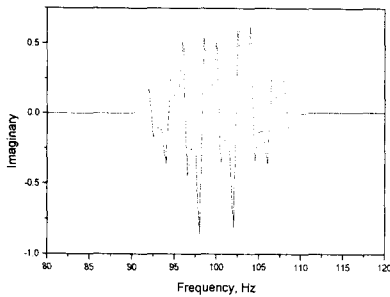


Fig. 5.2 Imaginary part of DFT when $\omega_b = 100.2Hz$

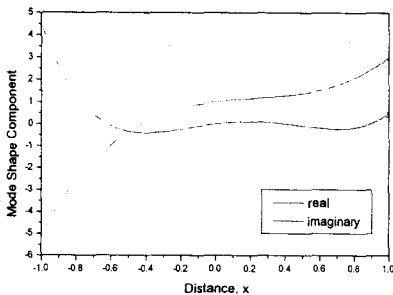


Fig. 6 Real and imaginary mode shape components estimated by Hilbert transform

후기

본 연구는 1999년도 한국과학재단의 특정기초 연구(1999-2-302-015-3)에 의하여 수행되었습니다.