

고무-코드 복합체 코드-끝 균열에 대한 파괴역학적 매개변수 J에 관한 연구

양경진* · 강기주**

The Study for Fracture Parameter J in Rubber-Cord Composites with a Penny-Shaped Crack on Cord-End

Kyeong-Jin Yang and Ki-Ju Kang

Key Words: J-integral(J-적분), Dimensional Analysis(차원해석), 분리변수(Separation Parameter), Rubber-Cord Composite(고무-코드 복합체), Energy Compliance Method(에너지컴플라이언스법).

Abstract

In this work, an equation of J-integral for a penny-shaped crack at the end of the cord embedded in rubber matrix is proposed. The dimensional analysis is applied to derived to the equation of J-integral. We assume that the energy parameter J is separated into the deformation and the geometry function, and which is proved using by separation parameter.

1. 서론

타이어나 전동장치로 사용되는 벨트는 고무-코드 복합체로 구성되어 있는데 대부분의 파손은 반복하중 하에 코드-끝(cord-end)에 균열이 생성된 후 층간균열로 발전하여 발생한다. 벨트의 가장자리 코드-끝은 높은 응력 집중과 제조 공정상의 문제로 인하여 발생하는 고무와 코드의 양한 접착력(adhesive) 때문에 균열 시작(crack initiation) 부위가 된다. 타이어의 층분리 파손(Belt Edge Separation)의 과정을 단순화하여 두 단계로 분류하면 첫째, 코드-끝 부분이 작은 원형 균열(penny-shaped crack) 역할을 하므로 이미 균열이

존재한다고 가정할 수 있고 이 균열이 주행중 반복하중에 의해 코드에 수직방향으로 진전하여 코드-끝 균열들이 서로 합쳐지는 단계와 둘째, 합쳐진 균열이 벨트 층과 층 사이로 진전(층간균열진전)하여 최종적으로 파단되는 단계로 구분할 수 있다.

본 연구에서는 고무-코드 복합체의 파손(failure) 과정중 층간 균열진전의 전 단계인 코드-끝에서의 균열진전에 관한 수명을 예측하고자 하였다. 비선형 재료에서 균열의 진전은 파괴역학적 매개변수 J-적분(J-integral)의 지배를 받는다. 고무의 비선형성과 대변형을 고려하여 코드-끝에서 생성된 원형균열에 대한 에너지 매개변수인 J식을 제안하였다.

2. 이론

3.1 에너지 매개변수 J식 유도

Fig. 1과 같이 고무로 둘러싸인 코드-끝에 원형균열이 존재하는 경우에 대한 에너지 매개변수

* 전남대학교 기계공학과 대학원

** 전남대학교 기계공학과, 회원

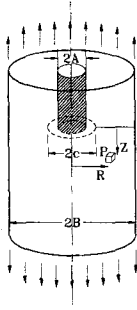


Fig. 1 Rubber-cord composites with a crack on the cord-end, D : specimen diameter, d : cord diameter, c : crack radius

J식을 유도한다. 임의의 점 P에서의 변형률에너지밀도 W 를 구하기 위해 고려해야 할 물리량은 다음과 같다.

$$W_0, c, R, Z, A, B, \epsilon_0$$

여기서 W_0 는 균열의 영향을 받지 않는 영역에서의 일정한 변형률에너지밀도(uniform strain energy density), ϵ_0 는 재료의 비선형성을 나타내는 변수로서 W_0 가 정의되는 영역에서의 변형률, R 과 Z 는 P점의 위치를 나타내는 변수, c 는 균열반경, A 는 코드 반경, B 는 시편의 반경이다⁽¹⁾. 위의 변수들에 대한 차원해석을 통하여 다음과 같은 일반식을 얻을 수 있다.

$$W = W_0 f\left(\frac{c}{R}, \frac{c}{Z}, \frac{c}{A}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) \quad (1)$$

변형률에너지밀도 W 는 재료의 비선형 대변형 특성으로 인하여 외부에 작용하는 하중의 크기 W_0 에 정비례하지 않는데 변수 ϵ_0 에 의해 이와같은 효과를 포괄하여 나타낸다⁽²⁾.

$r=c/R, z=c/Z, a=c/A, b=c/B$ 로 치환하여 위 식은 다음과 같이 된다.

$$W = W_0 f(r, z, a, b, \epsilon_0) \quad (2)$$

일정하중에서 ($W, \epsilon_0 = const.$) 단위균열진전당 P점에서의 변형률에너지밀도 변화량은 식 (2)을 미분하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dc} &= W_0 \left[\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial c} \right] \\ &= \frac{W_0}{c} \left[r \frac{\partial f}{\partial r} + z \frac{\partial f}{\partial z} + a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} \right] \quad (3) \\ &= \frac{W_0}{c} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \end{aligned}$$

여기서 g 는 대괄호 안의 식을 일반화한 함수이다. 단위균열진전당 시편 전체의 에너지 변화량은 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dc} = \int \frac{dW}{dc} \delta v \quad (4)$$

여기서 E 는 시편 전체에너지이고 δv 는 P점이 정의되는 미소 체적으로 원통 좌표계에서 $\delta v = R \delta R \delta Z \delta R$ 이다. 변형률에너지밀도가 θ 에 무관하므로 θ 방향에 대해 적분된 미소 체적을 고려하면 δv 는 다음과 같다.

$$\delta v = 2\pi R \delta Z \delta R = \frac{2\pi c^3}{r^3 z^2} \delta r \delta z \quad (5)$$

식(2)-(4)로부터 단위균열진전당 전체에너지 변화량은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dE}{dc} = 2\pi W_0 c^2 \sum_P \frac{1}{r^3 z^2} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \delta r \delta z \quad (6)$$

균열이 진전할 때 단위면적당 전체 에너지 변화량, 즉 에너지 매개변수 J 는 원형균열에 대해 $A = \pi c^2$ 이므로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dE}{dA} = W_0 c \sum_P \frac{1}{r^3 z^2} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \delta r \delta z \quad (7)$$

여기서 무차원 공간변수 r, z 에 대해 식(7)의 합을 수행하면 J 는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \frac{dE}{dA} = k\left(\frac{c}{A}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) c W_0 \quad (8)$$

3.2 J의 변수분리

식 (8)의 J 가 다음과 같이 변형함수와 기하학적 함수로 변수분리 된다고 가정한다⁽³⁾.

$$J = H(W_0) * G(\text{geometry}) \quad (9)$$

식 (8)과 식(9)을 비교하면 함수 H, W 는 다음과 같다.

$$H(W_0) = k_2(W_0) * W_0$$

$$G(\text{geometry}) = c * k_1\left(\frac{c}{A}, \frac{c}{B}\right) \quad (10)$$

$$\text{where } k\left(\frac{c}{A}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) = k_1\left(\frac{c}{A}, \frac{c}{B}\right) * k_2(W_0)$$

여기서 함수 $k_2(\epsilon_0)$ 는 $k_2(W_0)$ 로 나타낼 수 있

다. J 의 변수분리는 함수 $k(c/A, c/B, W_0)$ 의 변수분리를 의미한다. 여기서 변수분리의 타당성을 검증하기 위해 다음과 같은 J 의 분리변수 Q_{ij} 를 정의한다.

$$Q_{ij} = \frac{J(c_i, \dots) |_{W_0}}{J(c_j, \dots) |_{W_0}} = \frac{H(W_0) * G(c_i, \dots)}{H(W_0) * G(c_j, \dots)} \quad (11)$$

$$= \frac{G(c_i, \dots)}{G(c_j, \dots)}$$

만약 Q_{ij} 가 W_0 에 무관하게 일정한 값을 가진다면 식 (10)에 J 의 변수분리는 타당하다.

J 의 변수분리와 유사하게 함수 k_2 를 다음 식으로 가정하였다.

$$k_1\left(\frac{c}{A}, \frac{c}{B}\right) = F_1\left(\frac{c}{A}\right) * F_2\left(\frac{c}{B}\right) \quad (12)$$

변수분리의 타당성은 J 의 변수분리와 유사하게 다음과 같이 분리변수 G_{ij} 를 정의하여 검증될 수 있다.

$$G_{ij} = \frac{J(c_i, \dots) |_{W_0, c/B}}{J(c_j, \dots) |_{W_0, c/B}} = \frac{F_1\left(\frac{c_i}{A}\right) c_i}{F_1\left(\frac{c_j}{A}\right) c_j} \quad (13)$$

분리변수 G_{ij} 가 c/B 에 무관하게 일정한 값을 가진다면 매개변수 J 는 다음과 같이 단순한 함수 형태를 갖게 된다.

$$J = F_1\left(\frac{c}{A}\right) F_2\left(\frac{c}{B}\right) c * k_2(W_0) W_0 \quad (14)$$

3. 실험

본 연구에서는 J 의 변수분리 타당성을 검증하기 위해 봉형 고무-코드 복합체 시편을 제작하여 파괴시험을 수행하였다.

고무는 고온 고압 하에서 구리와 잘 반응하여 황동과 높은 접착력을 갖는데 이 특성을 이용하여 코드는 구리가 70% 함유된 황동을 이용하였고 코드-끝에 원형 균열이 쉽게 형성되도록 고무와의 접착력이 약한 알루미늄으로 코드-끝 면을 코팅하였다. 시편은 금호타이어 연구실 가류기를 이용하여 Fig. 2와 같이 제조되었고 반복하중을 가하여 균열을 생성하였다. 균열반경은 파괴시험을 수행한 후 일정각도로 8점에서 측정되었고 평균값을 균열반경으로 하였다. 시편의 균열반경은 각각 4.61, 5.17, 6.90, 7.70[mm]이고 8점에서 측정된 균열반경은 평균값에서 오차 5%내에 포함된

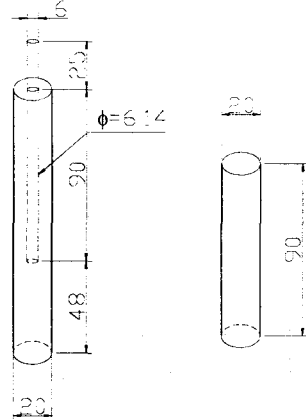


Fig. 2 Configuration for rubber and rubber-cord specimen. (dimension : mm)

다.

에너지 매개변수 J 는 Begley et al.(1972)가 이용한 에너지 컴플라이언스법(energy compliance method)을 이용하여 얻어졌다⁽⁴⁾. J 를 구하기 위해 $U^* - c$ 관계를 파괴시험 결과로부터 정리하면 Fig. 3과 같다. $\ln(U^*)$, $\ln(c-A)$ 축으로 실험 데이터를 정리한 결과 선형 근사(fitting)식과 잘 일치한다. 근사식을 이용하여 얻은 J 를 c 와 W_0 에 따라 Table 1에 정리하였다. 식 (11)과 Table 1의 결과를 이용하여 $Q_{ij} - W_0$ 관계를 Fig. 4에 나타내었다. Q_{ij} 가 W_0 에 무관하게 일정한 값을 가지므로 식 (10)의 변수분리는 타당하다.

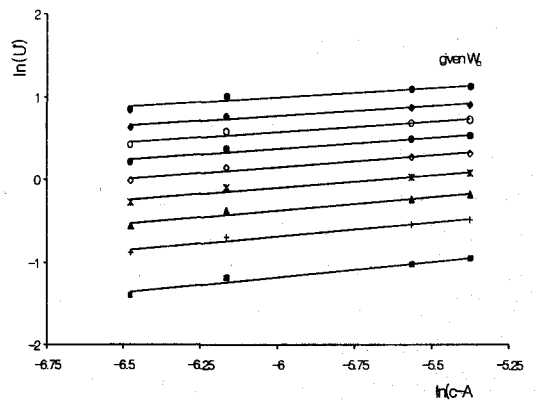


Fig. 3 $\ln(U^*) - \ln(c-A)$ relation for circular rubber-cord specimen at given W_0

Table 1. J values on the various W_0 and crack length

$W_0(kJ/m^3)$ \ $c(mm)$	4.61	5.17	6.90	7.70
24.2	2.15	1.58	0.81	0.65
40.7	3.24	2.35	1.19	0.94
56.6	4.23	3.06	1.53	1.20
74.9	5.29	3.79	1.87	1.47
96.7	6.45	4.61	2.25	1.76
120.1	7.71	5.48	3.65	2.07
148.5	9.05	6.41	3.07	2.39
176.8	10.11	7.11	3.36	2.60
215.6	12.28	8.61	4.06	3.14

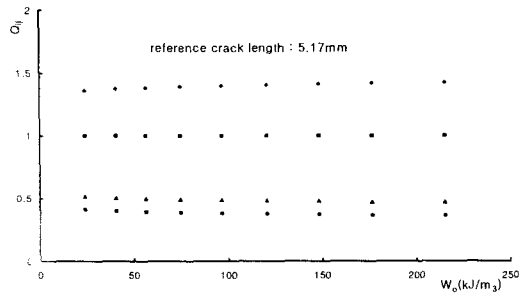


Fig. 4 Separation parameter Q_{ij} for J

4. 수치해석

함수 $k_1(c/A, c/B)$ 의 변수분리 타당성을 검증하기 위해 일정 외부하중과 코드 반경에 대해 B 값을 변화시키면서 수치해석을 수행하였다. 수치해석은 상용 유한요소해석 프로그램인 아바쿠스 (ABAQUS)를 이용하여 수행하였다. 수치해석은 코드반경 3[mm], 균열반경 4,5,6,7,8,9[mm], 시편 반경 10,14,18,22,26, 30[mm]에 대해 수행하였다. Fig -은 일정 외부하중 즉 일정한 W_0 에 대한 J 값을 이용하여 기하학적 분리변수 G_{ij} 를 c/B 에 대해 나타낸 결과이다. c/B 에 관계없이 G_{ij} 는 일정한 값을 나타내어 $k_1(c/A, c/B)$ 의 변수분리는 타당하다. Fig -은 여러 가지 기준 무차원변수 (nondimensional reference parameter) c_j/A 에 대해 $c_j S_{ij} / c_i$ 를 나타낸다. Fig -의 실선은 다음

식으로 근사한 결과이다.

$$\frac{c_j S_{ij}}{c_i} = \frac{F_1(\frac{c_i}{A})}{F_1(\frac{c_j}{A})} = C_j e^{m_j(\frac{c_j}{A})} \quad (15)$$

여기서 C_j 는 기준 무차원 변수의 영향을 받은 상수로 Table -와 같다. 그리고 m_j 는 기준 무차원 변수에 무관하게 일정한 값을 가지진다. 식 (15)로부터 코드의 영향을 나타내는 함수 $F_1(c/A)$ 는 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$F_1(c/A) = e^{m(\frac{c}{A})} \quad (16)$$

A. Ghfiri et al.는 고무와 같은 재료에서도 2차원의 센터 균열에 대해 시편폭의 효과를 나타내는 함수는 LEFM 결과와 비교적 잘 일치함을 보고한 바 있다⁽⁵⁾. 본 연구에서는 이를 확장하여 3차원의 원형 균열에 대해서도 LEFM 결과를 이용할 수 있는지 검증하기 위해 다음과 같은 관계식을 조사하였다⁽⁶⁾.

$$\frac{J}{F_1(\frac{c}{A})c} = C^* F_2(\frac{c}{B}) \quad (17)$$

여기서 C^* 는 외부하중과 재료에 의존하는 상수이다. Fig -은 동일한 외부 하중에 대해 $J/(F_1 c) - c/B$ 의 관계를 나타내는데 실선은 LEFM 결과에 상수 C 를 곱한 결과를 나타낸다. 식 (17)로부터 C^* 를 C 로 취하면 시편 반경의 효과를 나타내는 함수 F_2 는 LEFM 결과를 이용해도 큰 오차가 발생하지 않는다.

5. 결론

본 연구에서는 고무-코드 복합체 코드- 끝에 원형균열이 존재할 때 파괴 및 파괴균열진전을 지배하는 매개변수인 J-적분에 관한 연구를 수행하였다. 차원해석과 에너지방출률 개념으로부터 J의 일반식을 도출하였다. J는 변형함수와 기하학적함수로 변수분리됨을 실험을 통하여 검증하였고 수치해석을 통하여 기하학적함수 k_1 이 F_1 과 F_2 로 변수분리됨을 보였다. 특히 함수 $F_2(c/B)$ 는 기존의 LEFM 결과를 이용하여도 큰 오차가 발생하지 않았다.

후기

본 연구는 한국학술진흥재단 학술연구조성비 (과제번호 ME97-C-32)지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) E. H. Andrews, 1974, "A generalized theory of fracture mechanics," *J. Mater. Sci.*, Vol. 9, pp. 887-894.
- (2) R. S. Rivlin and A. G. Thomas, 1953, "Rupture of rubber. I. characteristic energy for tearing," *J. Polym. Sci.*, Vol. X, pp. 291-318.
- (3) M. H. Sharobeam and J. D. Landes, 1991, "The load separation criterion and methodology in ductile fracture mechanics," *Int. J. Fract.*, Vol. 47, pp. 91-104.
- (4) J. A. Begley and J. D. Landes, 1972, "The J integral as a fracture criterions," *ASTM STP* 514, pp. 1-20.
- (5) H. Ghfiri, M. Nait-Abdelaziz and G. Mesmacque, 1993, "Experimental determination of J on rubbery materials: influence of finite dimensions," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 44, No. 5, pp. 681-689.
- (6) H. Tada, P. Paris and G. Irwin, 1985, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del. Research Cor..