

# 정적 대변형에 중첩된 미소 동적 하중을 견디는 고무재료의 점탄성 구성방정식에 관한 연구

김 봉 규\* · 윤 성 기\*\*

## A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory loads superimposed on large static deformation

Bong-Kyu Kim and Sung-Kie Youn

**Key Words :** viscoelasticity, constitutive model, rubber, small oscillatory load, large static deformation

### Abstract

A viscoelastic constitutive equation of rubber that is under small oscillatory load superimposed on large static deformation is proposed. The proposed model is derived through linearization of Simo's viscoelastic constitutive model and reference configuration transformation. The proposed constitutive equation is extended to a generalized viscoelastic constitutive equation that includes widely used Morman's model as a special case using objective stress increment. Static deformation correction factor is introduced to consider the influence of pre-strain on the relaxation function. The proposed constitutive model is tested for dynamic behavior of rubber specimens with different carbon black contents. It is concluded from the test that the viscoelastic constitutive equation for filled rubber must include the influence of the static deformation on the time effects. The suggested constitutive equation with static deformation correction factor shows good agreement with test values.

### 1. 서론

제진 및 방진용으로 사용되는 대부분의 고무들은 정적 대변형에 추가되는 동적 하중을 받고있다. 이러한 하중 하의 고무의 거동은 선형화된 조화 정상 응답(linearized steady state harmonic response)을 표현하는 점탄성 구성방정식을 통하여 기술할 수 있고 대변형하의 고무의 비선형 거동을 생각하면 매우 복잡하다는 것을 알 수 있다. 따라서 정적 대변형 하의 고무의 동적거동을 정확히 기술하는 구성방정식은 방진 및 제진 고무 부품의 동적 거동의 예측과 설계에 필수적이다.

점탄성 물질의 변형 이력(deformation history)의 영향은 소멸 기억 가정(fading memory hypothesis)<sup>(1)</sup>에 의하여 없어지므로 정적변형에 의한 정적 응력

은 정적 변형 상태 만의 함수이다. 즉 점탄성 효과는 정적 변형에 추가된 작은 동적 변형 만의 함수이다. 또 만약 정적으로 변형된 상태를 기준 상태(reference configuration)로 사용하면 비교적 쉽게 추가된 변형이 작다는 가정으로부터 선형화된 구성방정식을 이끌어 낼 수 있다. 따라서 변형 이력을 정적 변형 상태를 기준으로 기술하는 것은 효과적이고 쉬우며 당연하다고 할 수 있다. 그러나 일반적으로 대부분의 비선형 점탄성 구성방정식 들<sup>(2,3)</sup>은 변형 전 상태(undeformed state)를 기준 상태를 기준 상태로 사용하고 있다.

정적변형에 중첩된 동적하중을 견디는 점탄성 재료의 구성방정식으로는 Morman의 구성방정식<sup>(4-6)</sup>이 널리 사용되고 있다. Morman 모형은 Coleman과 Noll의 모형<sup>(7)</sup>을 열역학의 원리를 이용하여 간단한 Lianis의 모형<sup>(8)</sup>에서 출발하여 점탄체의 거동은 시간효과와 정적 대변형의 효과로 분리될 수 있음을 가정하여 유도되었다. 분리가 능성(separability) 가정에 의하여 완화 함수

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

(relaxation function)는 변형에 무관한 간단한 함수로 기술된다. Morman 모형의 핵심적 가정인 분리가능성은 충전되지 않은 고무(unfilled rubber)에는 적용할 수 있으나<sup>(9)</sup> 충전된 고무에는 적용할 수 없음<sup>(10)</sup>이 실험을 통하여 관찰되었다. 공학적으로 사용되는 대부분의 고무는 그 기계적 성질을 향상시키기 위하여 카본 블랙(carbon black)과 같은 충전제를 함께 사용한다. 따라서 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 견디는 점탄성체의 구성방정식에서 정적 대변형의 영향을 고려하는 것은 공학적으로 매우 중요하다.

본 논문에서는 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 견디는 점탄성체의 보다 효율적인 구성방정식을 제안한다. Simo의 비선형 점탄성 구성방정식을 선형화하고 기준 상태를 정적으로 변형된 상태로 변환하여 선형화 된 Simo의 점탄성 구성방정식(LSVM, linearized Simo's viscoelastic model)을 유도한다. 또 유도된 구성방정식은 객관 응력 증분(objective stress increment)을 사용하여 LSVM와 Morman의 모형을 포함하는 일반화된 점탄성 구성방정식으로 확장될 수 있음을 보인다. 점탄성체의 동적 거동에 미치는 정적변형의 영향은 정적 변형 보정 계수를 도입하여 고려하였다. 제안된 구성방정식의 타당성은 서로 다른 충전제의 양을 가지는 고무 시편의 동적 압축 실험(dynamic compression)을 통하여 확인한다.

## 2. 점탄성 구성방정식

### 2.1 선형화된 Simo의 점탄성 구성방정식

정적 변형에 추가된 동적 변형을 표현하기 위하여 먼저  $\Phi_t$ ,  $\Phi_{t_0}$ ,  $\Phi_t$ 를 각각 변형 전 상태, 정적으로 변형된 상태, 현재 상태라고 하자. 시간  $\eta$ 일 때 텐서  $T$ 의 값을 상태(configuration)  $\Phi_\xi$ 를 기준으로  ${}_\xi T(\eta)$ 로 표기한다. 또 표기의 편의를 위하여 본 논문에서는 다음과 같은 간략화 된 표기법이 동시에 사용되었다.

$$T(\eta) = {}_t T(\eta), \quad {}_t T_0 = {}_t T(t_0) \quad (1)$$

$${}_0 T(\xi) = {}_0 T(\xi), \quad {}_\xi T = {}_\xi T(t) \quad (2)$$

Simo의 비선형 점탄성 구성방정식<sup>(2)</sup>은 아래와 같이 써진다.

$$S = JC^{-1} \frac{\partial U}{\partial J} + J^{-2/3} DEV \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) \right] + J^{-2/3} DEV \left[ \int_0^\eta g(t-\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} DEV \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) d\xi \right] \quad (3)$$

여기서  $DEV[\bullet] = (\bullet) - \frac{1}{3}[C:(\bullet)]C^{-1}$ 이고  $\bar{E}$ 는 Green 변형율의 체적 보존 부분이고  $U$ 와  $\Psi$ 는 각각 자유 에너지 함수(free energy function)의 체적과 편차 부분이다. 완화 함수  $g(t)$ 는 선형점탄성 구성방정식의 전단 완화 계수(shear relaxation modulus)  $G(t)$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$g(t) = \frac{G(t)}{G_\infty} - 1 \quad (4)$$

여기서  $G_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ 이다. 식(3)에 연쇄의 법칙을 연속적으로 사용하면 다음과 같은 2-nd PK 응력의 증분  $\Delta S$ 의 관계식을 얻는다<sup>(11)</sup>.

$$\begin{aligned} \Delta S = & \left[ \left( J^2 \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + JP \right) C^{-1} \otimes C^{-1} + JPC \right] : \Delta E + \\ & - J^{-2/3} \frac{2}{3} \left[ DEV \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) \otimes C^{-1} : \Delta E \right. \\ & \left. + C^{-1} \otimes DEV \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} \right) \right] : \Delta E \\ & + \tilde{\mathcal{E}} : \Delta E + J^{-2/3} \int_0^\eta g(t-\xi) \tilde{\mathcal{E}} : \Delta \dot{E} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 탄성 텐서(elasticity tensor)  $\tilde{\mathcal{E}}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} = & -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{E}} : C \right) \left( C + \frac{2}{3} C^{-1} \otimes C^{-1} \right) \\ & + J^{-2/3} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{E}^2} - \frac{1}{3} \left( \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{E}^2} : C \right) \otimes C^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + C^{-1} \otimes \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{E}^2} : C \right) \right) \right] \\ & + \frac{1}{9} \left( C : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{E}^2} : C \right) C^{-1} \otimes C^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

식(5)의 기준 상태(reference configuration)를 정적으로 변형된 상태로 변환하면 다음과 같은 선형화된 Simo의 점탄성 구성방정식(LSVM, linearized Simo's viscoelastic model)을 얻는다<sup>(11)</sup>.

$$\begin{aligned} \Delta_0 S = & \left( J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + P \right) \varepsilon_{kk} I - 2P \varepsilon \\ & - \frac{2}{3} \left[ \text{dev}(\hat{\sigma}) \otimes I + I \otimes \text{dev}(\hat{\sigma}) \right] \varepsilon \\ & + \ell : \varepsilon + \int_0^t g(t-\xi) \dot{\ell} : \dot{\varepsilon} \, d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

Truesdell 탄성 텐서는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\ell} = & \frac{2}{3} (\hat{\sigma} : I) \left( \dot{I} - \frac{1}{3} I \otimes I \right) \\ & + \bar{J} - \frac{1}{3} [(\bar{J} : I) \otimes I + I \otimes (\bar{J} : I)] \\ & + \frac{1}{9} (I : \bar{J} : I) I \otimes I \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\bar{J}_{ijkl} = \frac{1}{J} \bar{F}_{iJ} \bar{F}_{jK} \bar{F}_{kL} \bar{F}_{lM} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{E}^2} \right)_{ijkl}$  이고  $\dot{I}$ 는 4차

단위 텐서이다. 식(7)로 표현되는 LSVM은 정적 대변형이 없으면 선형점탄성 구성방정식으로 환원된다<sup>(11)</sup>.

동적으로 부가되는 변형이  $\varepsilon = \varepsilon^* e^{i\omega t}$ 로 표현되는 정상 조화 변형이라면 식(7)에서 다음과 같은 복소 구성방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta_0 S^* = & \left( J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + P \right) \varepsilon^*_{kk} I - 2P \varepsilon^* \\ & - \frac{2}{3} \left[ \text{dev}(\hat{\sigma}) \otimes I + I \otimes \text{dev}(\hat{\sigma}) \right] \varepsilon^* \\ & + (1 + i\omega g^*) \dot{\ell} : \varepsilon^* \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $g^*$ 는  $g(t)$ 의 Fourier 변환이다.

## 2.2 구성방정식의 일반화

객관 응력 증분(objective stress increment)을 사용하면 식(7)로 쓰이는 구성방정식을 보다 일반적인 점탄성 구성방정식으로 확장할 수 있다. 먼저 점탄성체가 비압축성이라고 가정하면 식(7)은 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>(11)</sup>.

$$\begin{aligned} \overset{r}{\Delta} \sigma &= \Delta \sigma - \varepsilon : \sigma_0 - \sigma_0 : \varepsilon - \omega : \sigma_0 + \sigma_0 : \omega \\ &= -\Delta P + \dot{\ell} : \varepsilon + \int_0^t g(t-\xi) \dot{\ell} : \dot{\varepsilon} \, d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

위의 식에 객관 응력 증분을 도입하여 다음과 같은 구성방정식을 정의해 보자.

$$\Delta \sigma = -\Delta P I + \dot{\ell} : \varepsilon + \int_0^t g(t-\xi) \dot{\ell} : \dot{\varepsilon} \, d\xi \quad (11)$$

여기서  $\Delta \sigma$ 는 객관 응력 증분이고  $\dot{\ell}$ 는 객관 탄성 텐서(objective elasticity tensor)이다.  $\dot{\ell}$ 는 매우 느린 변형 시에  $\Delta \sigma$ 를 결정하고 자유 에너지 함

수  $\Psi$ 에 의하여 정의된다. 식(11)로 표현되는 구성방정식은 다음과 같은 성질을 가짐을 관찰할 수 있다.

- i) 구성방정식은 좌표계 무관의 원리(principle of material frame-indifference)를 만족한다.
- ii) 매우 느린 변형과 빠른 변형에 대하여 탄성 거동을 한다.
- iii) 시간 효과와 변형효과는 분리 가능하다.
- iv) LSVM과 Morman의 모형은 식(11)에 각각 객관 응력 증분으로 Truesdell 응력 증분과 Jaumann 응력 증분이 사용된 경우이다.

위에서 열거한 점들을 생각할 때 식(11)은 분리 가능 가정하에서 정적 대변형에 부가되는 동적 미소 변형하의 점탄성체의 거동을 묘사하는 가장 일반적인 구성방정식이라 생각된다.

## 2.3 정적 변형 보정 계수

지금까지 시간 효과를 표시하는  $g(t)$ 는 정적 변형에 영향을 받지 않는다고 가정하였다. 이러한 분리가능성(separability) 가정은 카본 블랙과 같은 충전제를 포함하지 않는 고무의 거동에서 관찰된다. 그러나 충전된 고무는  $g(t)$ 가 정적 변형의 함수라는 것이 실험적으로 관찰된다<sup>(10)</sup>. 본 연구에서는 정적 변형 보정 계수( $c^*(B_0)$ )를 사용하여 충전된 고무의 분리불가능성(nonseparability) 특성을 기술한다. 식(9)에서 시간 효과를 표시하는  $1 + i\omega g^*$ 의 정적 변형의 영향을 보정한 계수로 다음과 같이  $\bar{g}^*$ 를 정의한다.

$$\bar{g}^* = (1 + i\omega g^*) c^*(B_0) \quad (12)$$

여기서  $c^*(B_0)$ 는 정적 변형의 함수로 복소 값을 가진다.  $c^*$ 는 식(9)로 표시되는 정적 변형 보정을 포함하지 않은 구성방정식의 계산값과 실험값의 비교를 통하여 결정된다.  $c^*$ 의 구체적인 형식을 결정하기 위하여 정적 변형의 크기를 계량(measure)할 필요가 있다. 본 연구에서는 다음과 같이 정의되는 일반화된 팔면체 변형율(generalized octahedral shear strain)을 변형의 척도로 사용하였다.

$$\bar{I}_s = \frac{1}{6} (2\bar{I}_1^2 - 6\bar{I}_2)^{1/2} \quad (13)$$

$\bar{I}_s$ 는  $B_0$ (left Cauchy-Green tensor)의 불변량이고 미소 변형하에서는 팔면체 변형율로 환원된다<sup>(12)</sup>. 정적 변형이 없을 때는  $c^*$ 의 값이 1이므로 다음과 같이 정의되는 다항식으로 정적 변형 보정 계수를 표현할 수 있다.

Table. 1 recipes of specimens

	NR/CB70	NR/CB50	NR/CB0
Rubber	NR	NR	NR
ZnO (phr)	3	3	3
Stearic Acid (phr)	1.0	1.0	1.0
Carbon Black GPF (phr)	70	50	0
TBBS (phr)	1.0	1.0	1.0
S (phr)	1.75	1.75	1.75

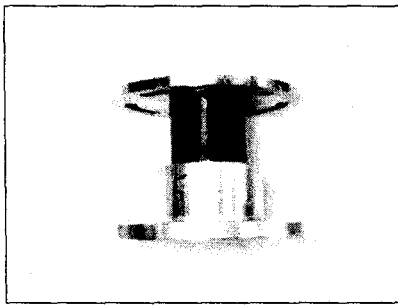


Fig. 1 Compression test specimen

$$c_r(\bar{I}_r) = c_r e^{e_r} \quad (14)$$

$$c_r(\bar{I}_r) = 1 + z_{r1}\bar{I}_r + z_{r2}\bar{I}_r^2 \quad (15)$$

$$\theta_r(\bar{I}_r) = \theta_r z_r \bar{I}_r \quad (16)$$

여기서  $z_{r1}$ ,  $z_{r2}$  와  $\theta_r z_r$  는 상수이고 실험을 통하여 결정된다.

### 3. 실험

#### 3.1 동적 압축 실험(dynamic compression test)

본 연구에서는 가황 고무의 비선형 점탄성 거동을 확인하고 2장에서 제시한 구성방정식들의 적용성을 확인 하기 위하여 동적 압축 실험을 하였다. 충전된 고무(filled rubber)는  $g(t)$ 가 정적변형의 크기에 영향을 받는다는 것<sup>(10)</sup>이 실험적으로 알려져 있고 실제 고무 재료는 대부분 충전된 상태로 사용되므로 충전제의 양을 달리하는 천연고무

시험편에 정적 변형을 가한 상태에서 동적 변형을 부가하는 시험을 하였다. 본 연구의 실험에서 사용된 고무는 일반적으로 많이 사용되는 천연고무를 카본블랙(carbon black)의 양을 달리하여 3 종류의 시험편을 제작하였고 가황은 160°C에서 20분 동안 하였다. 시험편의 구성 성분은 Table.1에 실었다. 압축 시험편은 Fig. 1에 보인 것처럼 원통형 고무의 아래와 위에 시험기와 체결을 위한 알루미늄 판을 접착제로 붙인 형상이다.

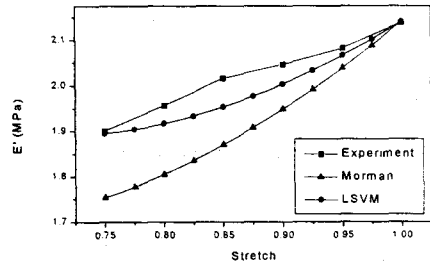


Fig. 1 Storage modulus against static stretch at 30Hz, specimen NR/CB0.

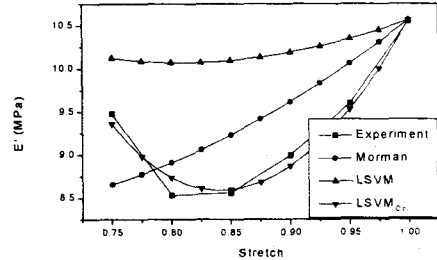


Fig. 2 Storage modulus against static stretch at 30Hz, specimen NR/CB50.

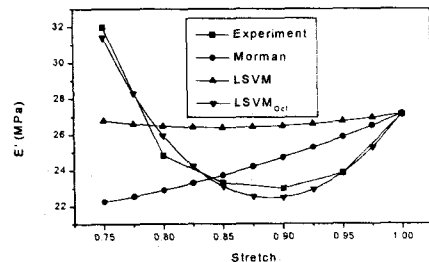


Fig. 3 Storage modulus against static stretch at 30Hz, specimen NR/CB70.

압축 실험은 유압을 사용하는 Instron사의 동적 고무 시험기인 Instron-5802를 사용하여 수행하였다. 실험은 상온(20°C)에서 행하여졌고 정적 변형을 부과하고 10분의 경과 후 동적 시험(dynamic test)을 수행하였다. 한 경우의 정적 변형하에서 압축 시험을 수행한 후 2시간 동안 시험편의 응력 완화 시킨 후 다음 시험을 수행하였다. 동적 시험의 기계적 조정(mechanical conditioning) 작업으로 압축 시험 12시간 전에 최대의 정적 변형하에서 최고의 시험 주파수로 변형을 가하였다.

### 3.2 구성방정식을 이용한 계산값과 실험을 통한 측정값의 비교

여러 가지 구성방정식들의 성능을 비교하기 위하여 Fig.1 ~ Fig. 3에 정적으로 변형된 상태를 기준으로 저장 계수(storage modulus,  $E'$ )의 실험값과 계산 값을 비교하였다. LSVM과 Morman의 모형은 충전되지 않은 고무의 거동을 상당히 잘 묘사함을 Fig. 1에서 알 수 있다. 정적 변형이 증가함에 따라 충전된 고무는  $E'$ 이 처음에는 감소하다가 증가하는 것을 Fig. 2와 Fig. 3에서 관찰할 수 있다. 작은 정적 변형에서 저장 계수가 감소하는 것은 충전제의 격자망(network)이 분리되는 것에 기인하고 더 큰 정적 변형 하에서 저장 계수값의 증가는 고무 분자 사슬의 신장가능성 한계 때문이다<sup>9)</sup>. 충전된 고무에 있어서는 정적 변형 보정 계수를 포함하지 않은 구성방정식을 사용한 계산값과 실험값은 상당한 차이를 보이고 심지어는 정적 변형에 대한  $E'$ 값의 변화 경향조차 일치하지 않는 것을 볼 수 있다. 계산값과 실험값의 차이는 충전제인 카본 블랙의 양에 따라 증가함을 NR/CB50과 NR/CB70을 통해서 알 수 있다. 정적 변형 보정 계수를 사용하는 점탄성 구성방정식은 실제 고무의 동적거동을 잘 표현함을 Fig. 2와 Fig. 3에서 알 수 있다.

## 4. 결론

본 논문에서는 정적 대변형에 추가되는 작은 하중을 견디는 점탄성체의 효율적이고 실용적인 구성방정식을 제안하였다. Simo의 비선형 점탄성 구성방정식을 선형화하고 기준 상태를 정적으로 변형된 상태로 변환하여 LSVM(linearized Simo's viscoelastic model)을 유도하였다. 유도된 구성방정식은 객관 응력 증분(objective stress increment)를 사용하여 LSVM와 Morman의 모형

을 포함하는 일반화된 점탄성구성 방정식으로 확장되었다. 점탄성체의 동적 거동에 미치는 정적 변형의 영향은 정적 변형보정 계수를 도입하여 고려하였다. 정적 변형 보정 계수는 일반화된 팔면체 전단 변형율(generalized octahedral shear strain)을 이용하여 그 형태를 제안하였다. 제안된 구성방정식의 타당성은 서로 다른 충전제의 양을 가지는 고무 시험편의 동적 압축 실험(dynamic compression)을 통하여 확인하였다. 제안된 점탄성 구성방정식은 실제 고무의 동적거동을 잘 표현함을 저장 계수(storage modulus)의 실험값과 계산값의 비교를 통하여 확인할 수 있었다.

## 후 기

본 논문에서 사용된 시험편을 제공해 주신 한국타이어(주)의 권순남 과장님께 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) C. Truesdell and W. Noll, "The Non-linear Field theories of Mechanics", Springer-Verlag, New York, Encyclopedia of Physics, Edited by S. Flügge, 1965.
- (2) J.C. Simo, "A Fully Three-dimensional Finite-strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 60, pp.153-173, 1987.
- (3) A. D. Drozdov, "A Model for the Nonlinear Viscoelastic Response in Polymers at Finite Strains", International Journal of Solids Structures, Vol. 35, No. 18, pp.2315-2347, 1998.
- (4) J. I. Sullivan, K.N. Morman and R.A. Pett, "A Non-linear Viscoelastic Characterization of a Natural Rubber Gum Vulcanizate", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 53, 805 - 822, 1980.
- (5) A. B. Zdunek, "Determination of Material response functions for prestrained rubbers", Rheologica Acta, Vol. 31, pp. 575 - 591, 1992.
- (6) Hibbit, Karlsson and Sorenson Inc. "ABAQUS theory manual", Version 5.7, 1997.
- (7) B. D. Coleman and W. Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity", Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp.239 - 249, 1961.
- (8) G. Lianis, "Application of irreversible thermodynamics in finite viscoelastic deformations", Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 623 - 629, 1965
- (9) A. Voet and J.C. Morawski, "Dynamic Mechanical and Electrical Properties of Vulcanizates at

Elongations up to Sample Rupture", Rubber Chemistry and Technology, 765 - 777, 1974.

- (10) Ole Kramer, Søren Hvidt and John D. Ferry, "Dynamic Mechanical Properties", Academic Press, San Diego, Science and Technology of rubber, edited by James E. Mark, Burak Erman and Frederick R. Eirich, 1994.
- (11) B.-K. Kim and S.-K. Youn, "A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory loads superimposed on large static deformation", Int. J. Solids and Structures, Submitted
- (12) 정규동, 윤성기, 김봉규, "고체 추진제의 3 차원 비선형 점탄성 구성방정식에 관한 연구", 대한기계학회논문집 A, 23 권, 3 호, 469-477, 1999