

경계요소법을 이용한 접합재료 경계면의 직선균열형상의 강체 함유물에 대한 응력세기계수 결정

이강용* · 박성규**

Determination of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Rigid Line Inclusions by Boundary Element Method

KANG YONG LEE and SUNG GYU KWAK

Key Words: Boundary Element Method(경계요소법), Stress Intensity Factor(응력세기계수), Rigid Inclusion(강체함유물), Bimaterial(접합재료), Multiregion Technique(다중영역 기법)

Abstract

Stress intensity factors for a rigid line inclusion lying along a bimaterial interface are calculated by the boundary element method with the multiregion and double-point techniques. The formula between the stress intensity factors and the inclusion surface stresses are derived. The numerical values of the stress intensity factors for the bimaterial interface rigid line inclusion in the infinite body are proved to be in good agreement within 3% when compared with the previous exact solutions. In the finite bimaterial systems, the stress intensity factors for the center and edge rigid line inclusions at interface are computed with the variation of the rigid line inclusion length and the shear modulus ratio under the biaxial and uniaxial loading conditions.

1. 서론

본 논문에서는 기계적 하중을 받고 있는 접합경계면 직선균열 형상의 강체함유물에 대한 응력세기계수를 경계요소법에 의해 계산하기 위해서 응력세기계수와 직선 강체함유물 선단 경계요소에서의 응력과의 관계식을 유도한다. 그리고 유한한 접합재료의 경계면에 있는 강체함유물에 대한 응력세기계수를 수치적으로 계산하고자 한다.

2. 경계적분 방정식

경계요소법을 적용하여 Navier 방정식의 수치

근사해를 구하기 위해 경계면 S 를 Fig. 1.과 같이 N 개의 2차 경계 요소(quadratic boundary element)로 분할하였을 때 수치적분을 위하여 변환된 경계적분방정식(boundary integral equation)은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$C_{ij}(P^{n,l})u_j(P^{n,l}) + \sum_{m=1}^N \left\{ \int_0^1 T_{ij}(P^{n,l}, Q_m(\xi)) \cdot \phi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right\} u_j^{m,k} = \sum_{m=1}^N \left\{ \int_0^1 U_{ij}(P^{n,l}, Q_m(\xi)) \phi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right\} t_j^{m,k} \quad (1)$$

여기서 P 와 Q 는 경계면 S 상의 점으로서 점 P 는 고정점이고 점 Q 는 경계면을 따라 위치가 변하는 점이다. 또한 u_j 와 t_j 는 경계면 상에서의 변위와 트래션이고, C_{ij} 는 경계면이 매끈한 곡면인 경우 1/2이다. $T_{ij}(P, Q)$ 와 $U_{ij}(P, Q)$ 는 경계상의 점 P 에서의 i 방향 단위점력(unit point load)으로

* 연세대 공대

** 대우 중공업

인한 경계면상의 점 Q 에서 j 방향으로의 특이해로서 각각 트랙션 기본해(fundamental traction solution)와 변위 기본해(fundamental displacement solution)⁽⁵⁾이다. 한편, $J(\xi)$ 는 경계요소를 직교 좌표계에서 국부 좌표계로 전환시킬 때의 Jacobian이며, 상첨자 m 과 k 는 적분이 수행되는 임의의 m 번째 경계요소와 요소내의 k 번째 절점을 의미하고, 상첨자 n 과 l 은 각각 점 P 가 속한 요소와 그 요소에서의 절점을 나타낸다. $\phi^k(\xi)$ 는 $0 \leq \xi \leq 1$ 의 국부좌표계에서 등매개 2차 요소의 형상함수이다.

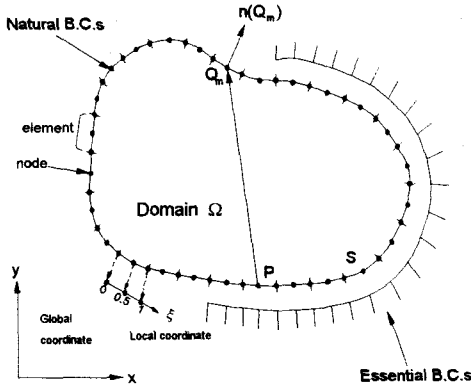


Fig. 1 Boundary of two dimensional body divided into boundary elements

경계상의 미지 변위와 트랙션을 구하기 위해서 전체요소에 대하여 수치적분을 수행하고 요소와 요소 사이의 절점에서 변위의 연속성을 고려하면 식(1)은 다음과 같은 행렬식이 된다.

$$[T]_{4N \times 4N} \{u\} = [U]_{4N \times 6N} \{t\} \quad (2)$$

여기에서 행렬 $[T]$, $[U]$ 는 트랙션과 변위 기본해를 수치적분하여 구성되는 계수행렬이다.

3. 응력세기계수의 결정

Ballarini⁽¹⁾는 Fig. 2와 같은 무한체 접합재료의 경계면에 직선균열형상의 강체함유물이 있을 때의 응력해석을 위한 응력함수와 응력세기계수를 Muskhelishvili⁽²⁾의 복소해석방법에 의해 구한바

있다. 이 결과를 응력과 복소응력함수 관계식에 대입하여 정리하고 좌표축의 원점을 Fig. 2와 같이 강체함유물의 선단에 놓으면 다음과 같은 강체함유물 선단 주위에서의 응력분포를 구할 수 있다.

$$(\sigma_{yy} - i\tau_{xy})_1 = \frac{[(3-x_1)\sigma_{yy}^\infty - (x_1+1)\sigma_{xx1}^\infty]}{4(x_1+mx_2)} \cdot \left[(1-mx_2) + \sqrt{\frac{a}{2r}}(1-2i\varepsilon) \right] \cdot \left(\frac{2a}{r} \right)^{i\varepsilon} \left\{ mx_2 e^{\alpha(\frac{1}{2}i-\varepsilon)} - e^{\alpha(\varepsilon-\frac{1}{2}i)} \right\} \quad (3)$$

응력세기계수식은 다음과 같다.

$$K_I - iK_{II} = \frac{[(3-x_1)\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx1}^\infty(x_1+1)]}{4(x_1+mx_2)} \cdot [mx_2 - 1](2a)^{i\varepsilon}(1-2i\varepsilon)\sqrt{\pi a} \quad (4)$$

여기에서 σ_{xx1}^∞ 과 σ_{yy}^∞ 는 외부에서 가해진 응력이고, σ_{yy} 와 τ_{xy} 는 강체함유물 선단 가까이에서의 응력이다. a 는 강체함유물 길이의 절반이고 영역 1의 전단계수와 프와송비를 각각 μ_1, ν_1 . 영역 2의 전단계수와 프와송비를 각각 μ_2, ν_2 라고 하면 κ_i 는 평면응력상태인 경우 $(3-\nu_i)/(1+\nu_i)$ 이고 평면변형률상태인 경우에는 $3-4\nu_i$ 이다. 또한, ε 과 m 은 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[m \frac{x_2}{x_1} \right] \quad (5)$$

$$m \equiv \frac{\mu_2 x_1 + \mu_1}{\mu_1 x_2 + \mu_2} \quad (6)$$

한편 접합재료에서는 물성치의 불연속으로 인하여 σ_{xx1}^∞ 과 σ_{xx2}^∞ 가 서로 다른 값을 가지며, 접합면에서의 변형률이 연속이라는 가정으로부터 σ_{xx1}^∞ 과 σ_{xx2}^∞ 의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{xx2}^\infty = \frac{4\beta - 2\alpha}{1-\alpha} \sigma_{yy}^\infty + \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \sigma_{xx1}^\infty \quad (7)$$

여기에서 α 와 β 는 Dundurs' constant로서 다음

과 같이 정의된다.

$$\alpha = \frac{\mu_2(x_1+1) - \mu_1(x_2+1)}{\mu_2(x_1+1) + \mu_1(x_2+1)} \quad (8-a)$$

$$\beta = \frac{\mu_2(x_1-1) - \mu_1(x_2-1)}{\mu_2(x_1+1) + \mu_1(x_2+1)} \quad (8-b)$$

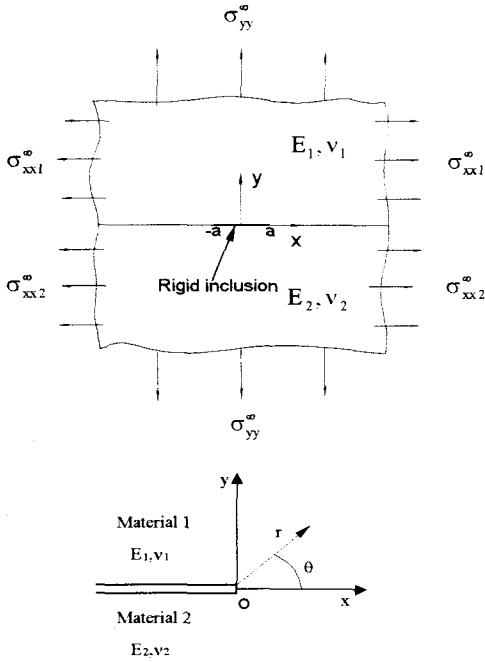


Fig. 2 Rigid line inclusion at a bimaterial interface

경계에서의 응력값을 사용하여 응력세기계수를 구하기 위해 식(4)를 식(3)에 대입하고 정리하면 응력의 함수로 표현된 접합경계면의 직선균열형상 강체함유물에 대한 응력세기계수식을 얻을 수 있다.

$$K_I = \frac{\sqrt{2\pi r}(mx_2 - 1)}{mx_2 e^{-\pi\epsilon} + e^{\pi\epsilon}} \cdot \{ \sigma_{yy} \sin(\epsilon \ln r) - \tau_{xy} \cos(\epsilon \ln r) \} \quad (9-a)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2\pi r}(mx_2 - 1)}{mx_2 e^{-\pi\epsilon} + e^{\pi\epsilon}} \cdot \{ \tau_{xy} \sin(\epsilon \ln r) + \sigma_{yy} \cos(\epsilon \ln r) \} \quad (9-b)$$

4. 수치해석 결과 및 검토

모든 모델에서 영역 1의 물성치를 전단계수 $\mu_1 = 1.05 \times 10^7$ 로 고정시켰고, 프아송비는 양 영역 모두 0.33으로 하였다. 또한 모든 모델에 대하여 단축하중상태의 경우 $\sigma_{yy}^\infty = 100$ 으로 고정하였고, 양축하중상태의 경우에는 $\sigma_{yy}^\infty = 100, \sigma_{xx1}^\infty = 30$ 으로 하고 σ_{xx2}^∞ 는 식(7)에 의해서 계산한 값으로 하였다.

4.1 접합경계면의 중앙에 위치한 강체함유물

수치해석에 사용된 모델의 경계조건을 Fig. 3에 제시하였다.

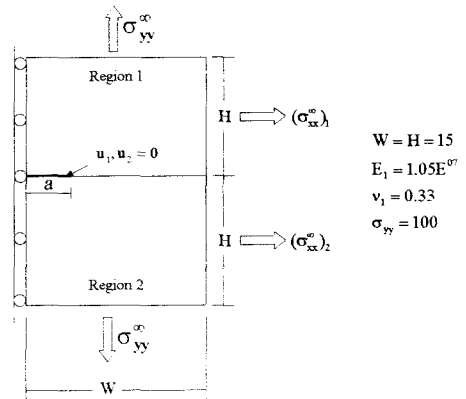


Fig. 3 Center rigid line inclusion model

무한체의 경우.

무한체의 해석은 $a/W=1/15, W/H=1$ 로 하였고, 접합재료의 경계면에 있는 강체함유물에 대해 본 연구에서 유도된 응력세기계수를 구하는 식(9)가 타당함을 보이기 위해 무한체의 경계면 중앙에 있는 강체함유물이 하중을 받고 있을 때 전단계수의 비 $\mu_0 \equiv \mu_2/\mu_1$ 에 따라 기존의 엄밀해⁽⁹⁾와의 오차를 비교하였다. 여기에서 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\%Diff \equiv \left(\frac{BEM - exact}{exact} \right) \times 100 \quad (10)$$

Table 1. Comparison between the previous exact solutions⁽⁹⁾ and the present BEM results of stress intensity factors K_I and K_{II} for a center rigid line inclusion along the infinite bi-material interface due to uniaxial loading

		μ_0	1	2.5	6	10	20
K	plane-stress	exact	11.036	15.804	19.049	20.249	21.259
		BEM	10.956	15.823	19.176	20.551	21.670
		%Diff	-0.72	0.12	0.67	1.49	1.93
	plane-strain	exact	11.837	16.934	20.372	21.634	22.691
		BEM	11.735	16.920	20.504	21.914	23.236
		%Diff	-0.86	-0.08	0.64	1.29	2.40
K	plane-stress	exact	0	0.947	1.917	2.342	2.727
		BEM	0	0.929	1.883	2.315	2.696
		%Diff	0	-1.9	-1.77	-1.15	-1.14
	plane-strain	exact	0	0.768	1.545	1.883	2.188
		BEM	0	0.757	1.527	1.896	2.211
		%Diff	0	-1.43	-1.17	0.69	1.05

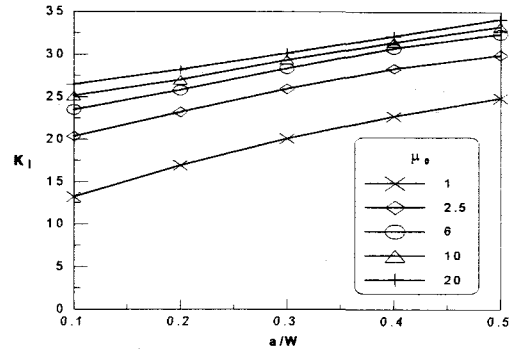
Table 2. Comparison between the previous exact solutions⁽⁹⁾ and the present BEM results of stress intensity factors K_I and K_{II} for a center rigid line inclusion along the infinite bi-material interface due to bi-axial loading

		μ_0	1	2.5	6	10	20
K	plane-stress	exact	1.003	1.437	1.732	1.841	1.933
		BEM	0.998	1.441	1.754	1.866	1.956
		%Diff	-0.50	0.28	1.27	1.36	1.19
	plane-strain	exact	4.627	6.620	7.964	8.457	8.870
		BEM	4.654	6.654	8.023	8.565	9.089
		%Diff	0.58	0.51	0.74	1.28	2.47
K	plane-stress	exact	0	0.086	0.174	0.213	0.248
		BEM	0	0.085	0.171	0.209	0.241
		%Diff	0	-1.16	-1.72	-1.88	-2.82
	plane-strain	exact	0	0.300	0.604	0.736	0.855
		BEM	0	0.296	0.611	0.742	0.879
		%Diff	0	-1.33	1.16	0.82	2.81

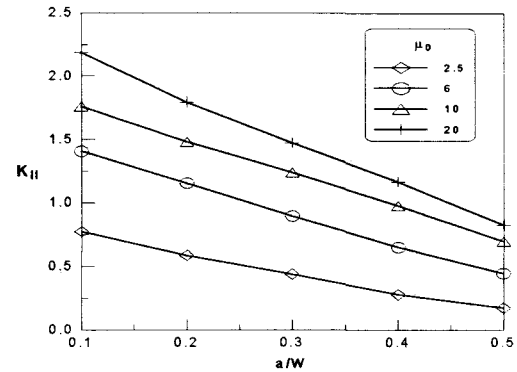
단축하중을 받을 때 전단계수의 비 μ_0 의 변화에 따른 수치결과를 Table 1에서 보여주고 있다. Table 2에서는 양축하중상태일 때, 전단계수의 비 μ_0 에 따른 수치결과를 보여준다.

수치해석 결과는 엄밀해와 3% 이내에 있음을 알 수 있다.

유한체의 경우



(a)



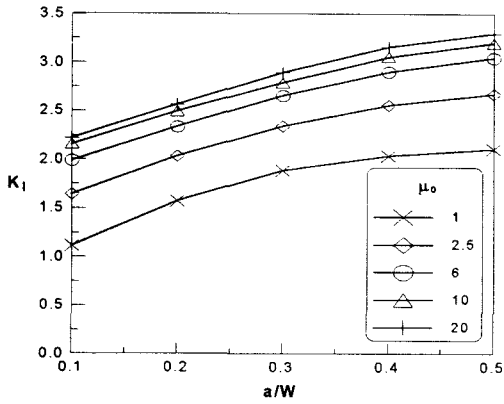
(b)

Fig. 4 Variation of stress intensity factors with a/W for center rigid line inclusion along the bimaterial interface due to uniaxial loading

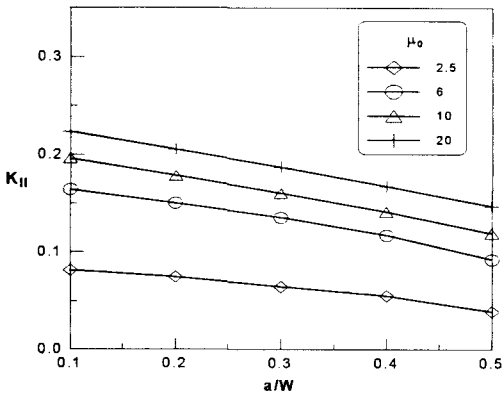
유한체일 때의 응력세기계수를 구하기 위해, $W/H=1$ 로 유지하면서 평면응력상태로 하였다.

Fig. 4에서 단축응력상태에 있는 접합면 중앙의 직선균열형상 강체함유물에 대해 전단계수의 비 (μ_0)와 폭에 대한 강체함유물의 길이(a/W)를 바꾸어가며 계산한 응력세기계수를 보여주고 있다.

강체함유물의 길이가 증가할 때 K_I 은 증가하지만, K_{II} 는 감소하는 경향을 보인다. 이러한 현상은 물성치의 차이로 발생하였던 K_{II} 가 강체함유물의 길이증가로 uncracked ligament의 폭이 줄어들므로 물성치의 영향이 점차 감소하기 때문에 발생하는 것으로 풀이된다. 한편, 전단계수의 비 μ_0 가 증가함에 따라 K_I 과 K_{II} 의 값도 모두 커지나 그 값의 차이는 μ_0 의 증가에 따라 점점 감소한다.



(a)



(b)

Fig. 5 Variation of stress intensity factors with a/W for center rigid line inclusion along the bimaterial interface due to bi-axial loading

Fig. 5에서는 양축응력상태에 있는 접합면 중앙의 직선균열형상 강체함유물에 대해 전단계수의 비와 강체함유물의 길이를 바꾸어가며 계산한 응력세기계수를 보여주고 있다. 단축응력상태와 마찬가지로 강체함유물의 길이가 증가할수록 K_I 은 증가하고, K_{II} 는 감소하는 경향을 보인다. 또한, μ_0 가 증가함에 따라 K_I 과 K_{II} 의 값도 모두 커지고 값의 차이는 μ_0 의 증가에 따라 점점 감소한다. 단축하중상태와 양축하중상태 모두 K_I 보다는 K_{II} 가 μ_0 의 변화에 더 민감하게 변화하는 것을 알 수 있다. K_I 과 K_{II} 는 단축하중상태와 양축하중상태에 따라 서로 같은 경향을 지니고 있지만 단축하중상태에서 더 큰 값을 보여주고 있다.

4.2 접합경계면의 모서리에 위치한 강체함유물

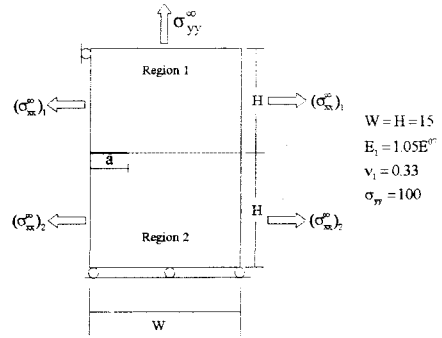
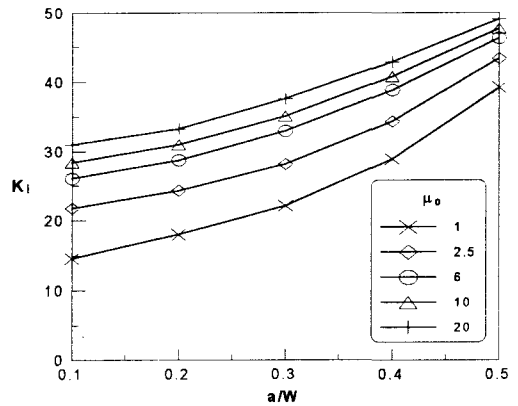


Fig. 6 Edge rigid line inclusion model

두 유한체 접합경계면의 모서리에 있는 직선균열형상 강체함유물에 대한 응력세기계수를 구하기 위해서, 중앙에 있는 강체함유물의 경우와 마찬가지로 평면응력상태에서 $W/H=1$ 로 하고 폭에 대한 강체함유물의 길이(a/W), 전단계수의 비(μ_0) 및 하중상태를 변화시켰다. 수치해석에 사용된 모델의 경계조건을 Fig. 6에 제시하였다. Fig. 7에서 단축하중의 경우에 대한 응력세기계수의 변화를, Fig. 8에서는 양축하중의 경우에 대한 응력세기계수의 변화를 보여주고 있다. 두 경우 모두 접합경계면의 중앙에 위치한 강체함유물의 경우와 유사한 경향을 보여주고 있으나, K_I 와 K_{II} 가 모두 중앙에 있는 강체함유물의 경우보다 더 큰 값을 가지고 있고, 강체함유물의 길이 증가에 따른 값의 변화율이 더 크다.



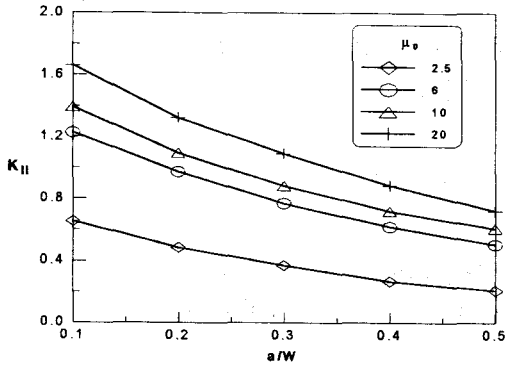
(a)

후기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비안전성 평가 연구센터의 연구비와 한국 학술진흥재단의 두뇌한국21 핵심과제 지원으로 이루어진 것으로써 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다

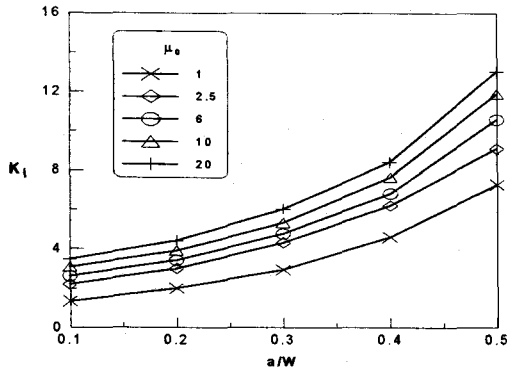
참고문헌

- (1) Roberto Ballarini, 1990, "A Rigid Line inclusion at a Bimaterial Interface", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, pp. 1~5.
- (2) N. I. Muskhelishvili, 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff Int. Publishing Company, Leyden.

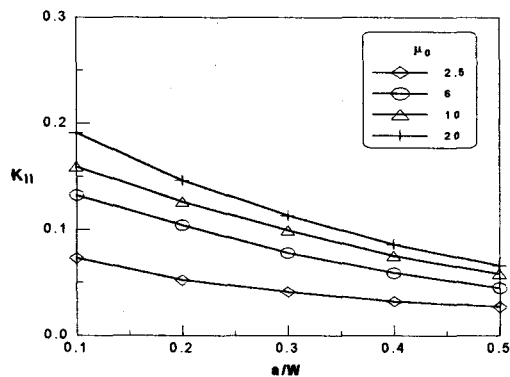


(b)

Fig. 7 Variation of stress intensity factors with a/W for edge rigid line inclusion along the bimaterial interface due to uniaxial loading



(a)



(b)

Fig. 8 Variation of stress intensity factors with a/W for edge rigid line inclusion along the bimaterial interface due to bi-axial loading