

두 개의 동심 원형 개재물을 가지는 삼중 재료에서의 특이성

이택균*, 최승태**, 이경우*, 엄윤용**

A Singularity in a Trimaterial with Two Concentric Circular Inclusions

T. G. Lee, S. T. Choi, K. W. Lee, and Y. Y. Earmme

Key Words : Singularity, Trimaterial, Analytic Continuation, Alternating Technique.

Abstract

Bimaterial containing an in-plane or an out-of-plane singularity embedded in the inclusion or in the unbounded matrix is first analyzed by using analytic continuation. Next, the series forms of solutions for the trimaterial with two concentric circular inclusions having an identical singularity are found based on an alternating technique using the solution for the bimaterial case. The sum of the first three or four terms of solutions derived provides an excellent approximation for most of material combinations. By applying continuous distributions of dislocations, the trimaterial solution obtained in this study may be used to solve crack problems in the same material.

1. 서 론

집중하중과 전위 등과 같은 여러 종류의 특이성(singularity)과 개재물과의 상호작용은 오랫동안 많은 학자들의 연구대상이었다. Head^(1,2)는 처음으로 이중재료의 직선계면 근처에 있는 전위에 걸리는 힘을 구하였고, Dundurs 와 Mura⁽³⁾는 칼날전위(edge dislocation)와 원형개재물(circular inclusion)과의 상호관계를 연구하였다. 또, Dundurs 와 Hetényi⁽⁴⁾ 그리고 Hetényi 와 Dundurs⁽⁵⁾는 원형개재물이 있는 무한기지 내에 반지름방향과 접선방향으로 각각 가해지는 집중하중에 대해 응력장(stress field)을 구하였으며, Honein 과 Herrmann⁽⁶⁾도 원형개재물을 가지는 무한기지가 임의의 하중을 받을 때의 해를 균질재료의 해(homogeneous solution)를 이용하여 구한 바 있다. 최근에는 Chen⁽⁷⁾이 Muskhelishvili⁽⁸⁾의 복소포텐셜(complex potential)을 이용하여 타원형개재물 내에 집중하중과 칼날전위가 있을 때의 탄성해를 무한급수 형태로 구하였다. 그리고 이경우 등⁽⁹⁾은 단위반지름의 원형개재물 또는 무한체에 집중하중 또는 전위 등의 특이성이 있을 때의 해를 Suo⁽¹⁰⁾의 해석접속법

(analytic continuation)을 이용하여 균질재료에 특이성이 있을 때의 해로부터 구한 바 있다. 지금까지 언급한 것들은 모두 이중재료에서의 특이성에 관한 연구들이며, 삼중재료에 관한 것으로는 최승태 등⁽¹²⁾이 두 개의 직선계면을 가지는 삼중재료에 특이성이 있는 경우의 해를 Suo의 해석접속법과 교번법(alternating technique)을 이용하여 구하였다.

본 연구에서는 무한기지에 두 개의 동심 원형 개재물이 완전접합 되어 있고, 임의의 위치에 집중하중 또는 전위 등의 특이성이 있을 때의 해석해(analytic solution)를 면내(in-plane)와 면외(out-of-plane)의 경우에 대해서 구하고자 한다. 면내문제의 경우 특이성은 x-y 평면 내의 집중하중이나 칼날전위가 될 수 있으며, 면외문제의 경우에는 x-y 평면에 수직인 방향의 집중하중 또는 나사전위(screw dislocation)가 될 수 있다. 이 문제를 해석하기 위해서는 먼저 무한기지 내에 임의의 반경을 가지는 하나의 원형개재물이 있을 때의 해가 필요하다. 이는 문제에 합당한 새로운 복소포텐셜을 정의하고 이경우 등⁽⁹⁾의 단위 원형 계면에 대한 해석접속법을 이용하면 간단히 구해진다. 그리고 균질재료 내에 존재하는 특이성에 대한 해를 알고 있을 때 이중재료에 대한 해는 해석접속법으로 쉽게 알 수 있듯이, 이와 유사하게 이중재료에 대한

* 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과, 정회원

해는 교번법⁽¹¹⁻¹³⁾을 이용하여 똑같은 특이성과 두 개의 동심 원형개재물을 가진 삼중재료의 해를 구하는데 사용된다. 이 해는 삼중재료에 균열이 있을 경우 Green 함수로 사용될 수 있고 전위에 걸리는 힘을 계산하여 계(system)의 강화 메카니즘(strengthening mechanism)과 관계되는 전위의 거동을 파악하는데 사용될 수 있다.

2. 이종 재료에서의 특이성

Suo⁽¹⁰⁾는 직선계면을 따라 완전히 접합된 두 개의 반무한 등방성재료의 한쪽에 특이성이 있을 때의 해를 무한 균질재료에 동일한 특이성이 존재할 때의 해로부터 해석적접속법과 계면에서의 응력, 변위의 연속조건으로부터 구한 바 있다. 그리고 이 경우 등⁽⁹⁾은 단위 원호계면을 따라 완전히 접합된 두 개의 등방 탄성재료의 한쪽 재료에 특이성이 있을 때의 해를 Suo⁽¹⁰⁾와 유사한 방법으로 구하였다. 여기서는 무한 기지내에 반경 R의 개재물이 있을 때의 해를 해석적접속법을 이용하여 균질해로 표현하고자 한다. 이는 특이성에 대한 특성에 영향을 받지 않는 범용적인 방법이다.

응력과 변위는 Muskhelishvili⁽⁸⁾의 복소함수 $\Phi(z)$ 와 $\Psi(z)$ 로 표현될 수 있는데 계산과정의 편리를 위해 새로운 복소함수 $\Omega(z)$ 를

$$\Omega(z) \equiv \Phi\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z} \Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (1)$$

와 같이 정의하면, 선형 탄성재료의 응력과 변위는 다음식처럼 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4Re\Phi(z), \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \Phi(z) + \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) + \bar{z}\left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z}\right)\bar{\Psi}(\bar{z}), \quad (2) \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta}(u_x + iu_y) &= iz\{\kappa\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) \\ &\quad + \frac{R^2}{z\bar{z}}[\bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right)]\}. \end{aligned}$$

여기서 Re 는 복소함수의 실수부, μ 는 전단 탄성계수(shear modulus)를 의미하며, 평면응력문제일 경우 $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ 이고 평면변형률문제일 경우 $\kappa=3-4\nu$ 이며, ν 는 포아송비(Poisson's ratio)를 나타낸다. 따라서 선형 탄성문제를 푼다는 것은 적당

한 경계조건을 만족하는 $\Phi(z)$ 와 $\Omega(z)$ 를 구하는 것으로 귀착될 수 있다.

Fig.1(a)와 같이 균질 무한탄성체 내에 특이성이 있을 때의 해를 $\Phi_0(z)$ 와 $\Omega_0(z)$ 라 하면 다음의 식처럼 표현된다.⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{Q}{z-s}, \\ \Omega_0(z) &= \frac{\bar{Q}z^2 + \hat{\kappa}QR^2}{z(z\bar{s}-R^2)} - \frac{\bar{Q}R(z-s)}{(z\bar{s}-R^2)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 s 는 특이성의 위치이며 R 은 반경 R 의 원형 개재물이 들어간 이종재료에 대한 해를 간단하게 표현하기 위해 도입되었는데 Fig.1(a)처럼 무한 균질재료 내에 특이성이 존재하는 경우에는 식(3)을 식(2)에 대입하게 되면 응력과 변위는 R 에 무관하게 된다. 그리고 $\hat{\kappa}$ 와 Q 는 다음과 같이 주어진다.

(i) 집중하중일 경우:

$$Q = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)}(P_x + iP_y), \quad \hat{\kappa} = \kappa. \quad (4)$$

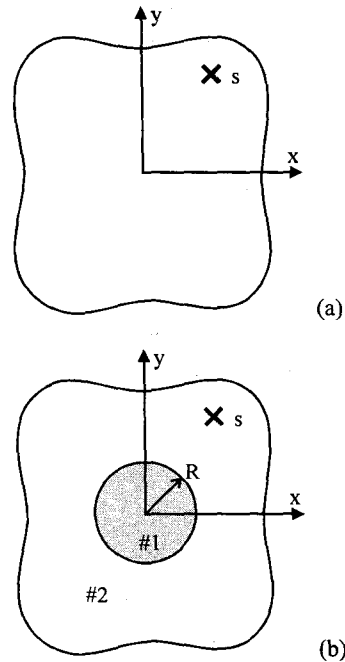


Fig. 1. A singularity (a) in a homogeneous medium and (b) in a bimaterial.

(ii) 칼날전위일 경우:

$$Q = \frac{i\mu}{\pi(\kappa+1)}(b_x + ib_y), \quad \hat{\kappa} = -1. \quad (5)$$

여기서 P_x 와 P_y 는 집중 하중의 x 와 y 방향 성분이며, b_x 와 b_y 는 각각 x 와 y 방향의 Burgers 벡터 성분이다.

Fig.1(b)처럼 무한 기지 내에 반경 R 의 개재물이 내재되어 있고 기지에 특이성이 있을 때의 해는 다음의 식처럼 재료 2로 이루어진 균질재료에 대한 해와 재료 1에 의해 추가되는 복소함수의 합으로 표현할 수 있다.

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_0(z) + \Phi_1(z), & \text{in No.1,} \\ \Phi_0(z) + \Phi_2(z), & \text{in No.2,} \end{cases} \quad (6)$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_0(z) + \Omega_1(z), & \text{in No.1,} \\ \Omega_0(z) + \Omega_2(z), & \text{in No.2.} \end{cases} \quad (7)$$

여기서 하첨자 1과 2는 각각 재료 1과 재료 2를 의미하고, $\Phi_j(z)$ 와 $\Omega_j(z)$ ($j=1,2$)는 미지의 해석 함수를 나타내며, 아래에서 $\Phi_0(z)$ 와 $\Omega_0(z)$ 로 표현하고자 한다.

먼저 계면 $r=R$ 을 따라 응력과 변위의 연속조건을 적용시키고 식(2), 식(6) 그리고 식(7)을 이용하여 해석적접속하면 재료 2에 특이성이 있을 때의 해는 다음과 같이 얻을 수 있다.⁽⁹⁾

$$\Phi(z) = \begin{cases} (1+\Lambda_{12})[\Phi_0(z)+f_{12}(z)] + \frac{g_{12}(z)}{1-\beta_{12}}, & \text{in No.1,} \\ \Phi_0(z)+\Pi_{12}\Omega_0(z)+f_{12}(z) + \frac{g_{12}(z)}{1+\beta_{12}}, & \text{in No.2,} \end{cases} \quad (8)$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} (1+\Pi_{12})\Omega_0(z) + \frac{g_{12}(z)}{1+\beta_{12}}, & \text{in No.1,} \\ \Omega_0(z)+\Lambda_{12}[\Phi_0(z)+f_{12}(z)] + \frac{g_{12}(z)}{1-\beta_{12}}, & \text{in No.2.} \end{cases}$$

여기서 α_{ij} 와 β_{ij} 는 Dundurs 매개변수⁽¹⁴⁾이고, Λ_{ij} 와 Π_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Lambda_{ij} = \frac{\alpha_{ij} + \beta_{ij}}{1 - \beta_{ij}}, \quad \Pi_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{1 + \beta_{ij}}. \quad (9)$$

그리고 $f_{12}(z)$ 와 $g_{12}(z)$ 는 원점을 제외한 전 영역에서 해석적이며 경계조건으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} f_{12}(z) = f_{12} &= \frac{-2\beta_{12}}{1+\alpha_{12}-2\beta_{12}} \operatorname{Re}\Phi_0(0) \\ &+ i \frac{2\alpha_{12}}{1-\alpha_{12}} \operatorname{Im}\Phi_0(0), \\ g_{12}(z) = g_{12} &= \frac{(1+\alpha_{12})(\beta_{12}-\alpha_{12})}{1+\alpha_{12}-2\beta_{12}} \operatorname{Re}\Phi_0(0) \\ &- i \frac{(\alpha_{12}+\beta_{12})(1+\alpha_{12})}{1-\alpha_{12}} \operatorname{Im}\Phi_0(0). \end{aligned} \quad (10)$$

비슷하게 Fig.1(b)에서 특이성이 기지가 아니라 개재물 내에 있을 때의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \begin{cases} \Phi_0(z) + \Pi_{21}\Omega_0(z) + f_{21}(z) + \frac{g_{21}(z)}{1+\beta_{21}}, & \text{in No.1,} \\ (1+\Lambda_{21})[\Phi_0(z)+f_{21}(z)] + \frac{g_{21}(z)}{1-\beta_{21}}, & \text{in No.2,} \end{cases} \\ \Omega(z) &= \begin{cases} \Omega_0(z) + \Lambda_{21}[\Phi_0(z)+f_{21}(z)] + \frac{g_{21}(z)}{1-\beta_{21}}, & \text{in No.1,} \\ (1+\Pi_{21})\Omega_0(z) + \frac{g_{21}(z)}{1+\beta_{21}}, & \text{in No.2.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

그리고 $f_{21}(z)$ 와 $g_{21}(z)$ 는 경계 조건을 통해 다음 식처럼 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{21}(z) &= \frac{\Pi_{21}(1-\hat{\kappa}_1)|s|^2 \operatorname{Re}\Phi_0(0) - i \frac{\Pi_{21}(1+\hat{\kappa}_1)}{\Pi_{21}+1}|s|^2 \operatorname{Im}\Phi_0(0)}{\Pi_{21}-1} \\ &+ \frac{(\alpha_{21}-\beta_{21})\hat{\kappa}_1 - (\alpha_{21}+\beta_{21})Q}{1-\alpha_{21}} \frac{Q}{z}, \\ g_{21}(z) &= -(1+\alpha_{21}) \left[\frac{\Pi_{21}(1-\hat{\kappa}_1)|s|^2 \operatorname{Re}\Phi_0(0) - i \frac{\Pi_{21}(1+\hat{\kappa}_1)}{\Pi_{21}+1}|s|^2 \operatorname{Im}\Phi_0(0)}{\Pi_{21}-1} \right] \\ &+ \frac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(1+\beta_{21}) - (\alpha_{21}-\beta_{21})\hat{\kappa}_1}{1-\alpha_{21}} \frac{Q}{z}. \end{aligned} \quad (12)$$

이와 같은 해석절차는 특이성에 관한 구체적인 정보가 필요치 않는 범용적인 방법이다.

3. 이종 재료에서의 특이성

Fig.2와 같이 서로 다른 재료의 두 개의 동심 원형 개재물을 가지는 삼중 재료를 생각하자. 특이성은 세 재료 중 임의의 위치에 있을 수 있다. 세 종류의 재료 모두 선형 탄성론을 따르고 등방성이며, 반지름 a 와 b 인 동심원 따라 서로 완전 접합되어 있다. 본 연구의 목적은 이와 같은 형상의 삼중재료에 하나의 집중하중 또는 전위 등의

특이성이 존재할 때 개재물과 특이성과의 상호 작용을 해석하는 것이다. Fig.2 의 해를 구하기 위해서는 똑같은 특이성과 하나의 개재물과 상호작용 하는 해가 필요한데, 이는 2 절에서 설명한 바와 같이 해석접속과 계면에서의 응력과 변위의 연속 조건으로 구할 수 있다. 2.1 절의 해를 가지고 교번 법을 이용하여 Fig.2 에 도시된 3 개의 문제를 해결하고자 한다. 이는 두 계면에서 동시에 응력과 변위의 연속 조건을 만족시키기 어려우므로 두 계면을 번갈아 가며 해석 접속법을 적용시키는 것이다.

먼저 Fig.2 의 경우처럼 하나의 특이성이 영역 3 에 있는 문제를 생각하자. 영역 1 과 영역 2 가 모두 재료 2 로 이루어져 있고 영역 3 이 재료 3 으로 이루어져 있다고 가정하면, 이 이중재료에 대한 해는 식(8)로부터 구할 수 있다. 하지만 이 해는 영역 1 도 재료 2 로 이루어져 있다고 가정한 상태에서 얻은 결과이므로 삼중재료에서는 $r=b$ 를 따라 연속조건을 만족시키지 못한다. 그러므로 $r=b$ 를 따라 응력과 변위의 연속조건을 만족시키기 위해 영역 1 은 재료 1 로, 그리고 영역 2 영역 3 은 재료 2 로 이루어진 이중재료를 가정하여 2.1 절에서 구한 이중재료에 대한 해를 이용하여 $r=b$ 를 따라 연속조건을 만족시켜 줄 수 있다. 하지만 이렇게 더해지는 항에 의해 다시 $r=a$ 를 따라 연속조건이 만족되지 않게 되므로 다시 처음의 재료 2 와 재료 3 으로 이루어진 이중재료를 가정하여 $r=a$ 를 따라 응력과 변위의 연속조건을 만족시켜 주어야 한다. 이와 같은 절차를 계속하면 Fig.2 의 해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

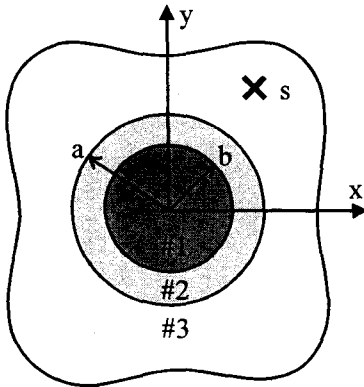


Fig. 2. A trimaterial with a plane singularity in the matrix

$$\Phi(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 + \Lambda_{12}) [\Phi_{12}^n(z) + f_{12}^n(z)] + \frac{g_{12}^n(z)}{1 - \beta_{12}} \right\}, & \text{in No.1,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Phi_{12}^n(z) + \Phi_{32}^n(z) \right\}, & \text{in No.1,} \\ \left\{ \Phi_0(z) + \Pi_{23} \Omega_0(z) + f_{23}(z) + \frac{g_{23}(z)}{1 + \beta_{23}} \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 + \Lambda_{32}) [\Phi_{32}^n(z) + f_{32}^n(z)] + \frac{g_{32}^n(z)}{1 - \beta_{32}} \right\}, & \text{in No.3.} \end{cases} \quad (13)$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 + \Pi_{12}) \Omega_{12}^n(z) + \frac{g_{12}^n(z)}{1 + \beta_{12}} \right\}, & \text{in No.1,} \\ (1 + \Pi_{23}) \Omega_0(z) + \frac{g_{23}(z)}{1 + \beta_{23}} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Lambda_{12} [\Phi_{12}^n(z) + f_{12}^n(z)] + \frac{g_{12}^n(z)}{1 - \beta_{12}} \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Lambda_{32} [\Phi_{32}^n(z) + f_{32}^n(z)] + \frac{g_{32}^n(z)}{1 - \beta_{32}} \right\}, & \text{in No.2,} \\ \left\{ \Omega_0(z) + \Lambda_{23} [\Phi_0(z) + f_{23}(z)] + \frac{g_{23}(z)}{1 - \beta_{23}} \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 + \Pi_{32}) \Omega_{32}^n(z) + \frac{g_{32}^n(z)}{1 + \beta_{32}} \right\}, & \text{in No.3.} \end{cases} \quad (14)$$

여기서 특이성이 영역 3 에 있고 재료 1 과 재료 2 로 이루어진 이중 재료에 대하여 $r=b$ 를 따른 n 번째 해석 접속에 사용된 균질해는 다음과 같다.

$$\Phi_{12}^n(z) = \begin{cases} (1 + \Lambda_{23}) [\Phi_0(z) + f_{23}(z)] + \frac{g_{23}(z)}{1 - \beta_{23}}, & (n=1) \\ \Pi_{32} \Omega_{32}^{n-1}(z) + f_{32}^{n-1}(z) + \frac{g_{32}^{n-1}(z)}{1 + \beta_{32}}, & (n=2,3,4,\dots) \end{cases} \quad (15)$$

$$\Omega_{12}^n(z) = \begin{cases} \left(\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \bar{\Phi}_{12}^1 \left(\frac{b^2}{z} \right) - \frac{1}{z} (b^2 - a^2) \bar{\Phi}_{12}^{1'} \left(\frac{b^2}{z} \right) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{b^2} \left\{ (1 + \Pi_{23}) \Omega_0 \left(\frac{a^2}{b^2} z \right) + \frac{g_{23} \left(\frac{a^2}{b^2} z \right)}{1 + \beta_{23}} \right\} \right), & (n=1) \\ \left(\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \bar{\Phi}_{12}^{n-1} \left(\frac{b^2}{z} \right) - \frac{1}{z} (b^2 - a^2) \bar{\Phi}_{12}^{(n-1)'} \left(\frac{b^2}{z} \right) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{b^2} \left[\Lambda_{32} \left[\Phi_{32}^{n-1} \left(\frac{a^2}{b^2} z \right) + f_{32}^{n-1} \left(\frac{a^2}{b^2} z \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g_{32}^{n-1} \left(\frac{a^2}{b^2} z \right)}{1 - \beta_{32}} \right] \right), & (n=2,3,\dots) \end{cases} \quad (16)$$

특이성이 영역 1 에 있고 재료 2 와 재료 3 으로 이루어진 이중 재료에 대하여 $r=a$ 에서 n 번째 해석 접속에 사용된 균질해는 다음과 같다.

$$\Phi_{32}^n = \Pi_{12} \Omega_{12}^n(z) + f_{12}^n + \frac{g_{12}^n(z)}{1 + \beta_{12}}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (17)$$

$$\Omega_{32}^n(z) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \overline{\Phi}_{32}^n \left(\frac{a^2}{z} \right) - \frac{1}{z} (a^2 - b^2) \overline{\Phi}_{32}^n \left(\frac{a^2}{z} \right) + \frac{b^2}{a^2} \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{12} \left[\Phi_{12}^n \left(\frac{b^2}{a^2} z \right) + f_{12}^n \left(\frac{b^2}{a^2} z \right) \right] \\ g_{12}^n \left(\frac{b^2}{a^2} z \right) \\ + \frac{1}{1 - \beta_{12}} \end{array} \right\}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (18)$$

이제 $f_{23}(z)$, $g_{23}(z)$, $f_{12}^n(z)$, $g_{12}^n(z)$, $f_{32}^n(z)$ 그리고 $g_{32}^n(z)$ 만 경계조건으로부터 구해주면 식(13)과 식(14)는 완전한 해가 된다. $f_{23}(z)$ 와 $g_{23}(z)$ 는 $\Phi_0(z)$ 와 $\Omega_0(z)$ 에 의해 생기는 항이며 경계조건에 의해 구하면 식(10)에서 하첨자 12 만 23 으로 바꾼 것이 된다. 그리고 $f_{12}^n(z)$ 와 $g_{12}^n(z)$ ($n=1,2,3,\dots$)는 특이성이 영역 3 에 있는 균질해인 $\Phi_{12}^n(z)$ 와 $\Omega_{12}^n(z)$ 에 의해 생기는 항들인데, 경계조건에 의해 다음과 같이 복소상수로 구해진다.

$$f_{12}^n(z) = - \frac{2\beta_{12} ReA_{12}^n + (\beta_{12} - 1) ReB_{12}^n}{1 + \alpha_{12} - 2\beta_{12}} + i \frac{2ImA_{12}^n + (\beta_{12} - 1) ImB_{12}^n}{1 - \alpha_{12}}, \quad (19)$$

$$g_{12}^n(z) = \frac{(1 + \beta_{12}) [(1 + \alpha_{12}) ReA_{12}^n + (\beta_{12} - 1) ReB_{12}^n]}{1 + \alpha_{12} - 2\beta_{12}} - i \frac{(1 + \beta_{12}) [(1 + \alpha_{12}) ImA_{12}^n + (\beta_{12} - 1) ImB_{12}^n]}{1 - \alpha_{12}}.$$

$f_{32}^n(z)$ 와 $g_{32}^n(z)$ ($n=1,2,3,\dots$)도 이와 비슷하게 특이성이 영역 1 에 있는 균질해인 $\Phi_{32}^n(z)$ 와 $\Omega_{32}^n(z)$ 로부터 생기는 항들인데, 경계조건으로부터 다음과 같이 복소상수로 얻어진다.

$$f_{32}^n(z) = \frac{2\beta_{32} ReA_{32}^n + (\beta_{32} + 1) ReB_{32}^n}{1 - \alpha_{32} + 2\beta_{32}} + i \frac{2ImA_{32}^n - (\beta_{32} + 1) ImB_{32}^n}{1 + \alpha_{32}},$$

$$g_{32}^n(z) = \frac{(1 + \beta_{32}) [(1 - \alpha_{32} - 2\beta_{32}) ReA_{32}^n - (1 + \alpha_{32}) ReB_{32}^n]}{1 - \alpha_{32} + 2\beta_{32}} + i(1 + \beta_{32}) [-ImA_{32}^n + ImB_{32}^n] \quad (20)$$

지금까지 Fig.2 에 대한 해를 식(13)~식(20)로 구하였다. 응력과 변위 계산 시 주의하여야 할 점은 $r=a$ 를 따라 해석접속 했을 때 생긴 항은 식(2)에서 R 대신 a 를 대입하여야 하며, $r=b$ 를 따라 해석접속 했을 경우 생긴 항들은 R 대신 b 를 대입하여야 한다. 위에서 구한 해는 모든 경계조건과 연속조건을 만족하는 최종적인 해이며, 특별한 경우로서 재료 1 과 재료 2 가 같거나 혹은 재료 2 와 재료 3 이 같은 경우에는 이중재료에 대한 해인 식(8)이 된다. Fig.2 에서 특이성이 재료 3 에 있지 않고 재료 1 또는 재료 2 에 있는 경우의 해도 지금까지 전개된 방법과 유사하게 구할 수 있다. 또한 면외특이성이 존재하는 경우에도 해석접속법과 교변법을 이용하여 지금까지 전개된 방법과 유사하게 해를 유도할 수 있다. 면외문제의 경우에는 해석함수 하나로 해를 표현할 수 있기 때문에 면내문제보다 훨씬 간단하게 되며 얻어진 급수해의 수렴 정도를 쉽게 관찰할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 무한기지에 두 개의 서로 다른 재료로 이루어진 동심 원형개재물이 있는 삼중재료의 내부에 하나의 면내특이성 또는 면외특이성이 있는 문제의 해를 해석접속과 교변법을 이용하여 구하였다. 이 해의 첫번째 항이 해의 지배적인 항이며 이후에 더해지는 항들은 점점 작아져서 0 으로 수렴하게 된다. 수렴정도는 재료상수 비와 안쪽 계면과 바깥쪽 계면의 반지름 비 b/a 에 의존하며, 대개의 재료조합에 대하여 처음 3 개 또는 4 개의 항의 합만으로도 좋은 근사해가 된다. 특히 접해있는 두 재료가 같은 재료라면 이중재료에 특이성이 있는 경우의 해와 일치하게 된다. 이렇게 구한 전위해는 균열이 존재할 경우, 균열을 모델링 하는데 사용할 수 있으며, 전위에 걸리는 이미징 힘을 계산하는 데에도 사용할 수 있다. 본 연구에서 구한 두개의 동심 원형개재물을 갖는 삼중재료 내의 특이성에 대한 해는 전위분포를 이용하여 동일재료 내에 존재하는 균열에 대한 해를 구하는 데에 사용될 수 있다.

참고문헌

- (1) A.K.Head, "Edge Dislocations in Inhomogeneous Media," *Proceedings of the London*, Vol.B66, pp.793-801, 1953.
- (2) A.K.Head, "The Interaction of Dislocations and Boundaries," *Philosophical Magazine*, Vol.44, pp.92-94, 1953.
- (3) J.Dundurs and T.Mura, "Interaction Between an Edge Dislocation and a Circular Inclusion," *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol.12, pp.177-189, 1964.
- (4) J.Dundurs and M.Hetényi, "The Elastic Plane with a Circular Insert, Loaded by a Radial Force," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.28, pp.103-111, 1961.
- (5) M.Hetényi and J.Dundurs, "The Elastic Plane with a Circular Insert, Loaded by a Tangentially Directed Force," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.29, pp.362-368, 1962.
- (6) T.Honein and G.Herrmann, "On Bonded Inclusions with Circular or Straight Boundaries in Plane Elastostatics," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.57, pp.850-856, 1990.
- (7) D.H.Chen, "A Point Force and an Edge Dislocation in an Elliptical Inclusion Embedded in an Infinite Medium," *Int. J. Fracture*, Vol.71, pp.311-322, 1995.
- (8) N.I.Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 4thedn., P.Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1954.
- (9) K.W.Lee, S.T.Choi and Y.Y.Earmme, "A Circular Inhomogeneity Problem Revisited," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.66, pp.276-278, 1999.
- (10) Z.Suo, "Singularities Interacting with Interfaces and Cracks," *Int. J. Solids Structures*, Vol.25, No.10, pp.1133-1142, 1989.
- (11) S.Y.Choi and Y.Y.Earmme, "An Alternating Technique for Solving Subinterface Crack Problems," *Int. J. Fracture*, Vol.78, R61-69, 1996.
- (12) S.T.Choi and Y.Y.Earmme, "A Singularity in an Anisotropic Trimaterial with Two Parallel Interfaces," *Asian Pacific Conference for Fracture and Strength*, pp.48, 1999.
- (13) L.V.Kantorovich and V.I.Krylor, *Approximate Methods of Higher Analysis*, P.Noordhoff, Ltd., Groningen, The Netherlands, 1964.
- (14) J.Dundurs, "Edge-bonded Dissimilar Orthogonal-Elastic Wedge Under Normal and Shear Loading," *DISCUSSION, ASME, J. Appl. Mech.*, Vol.36, pp.650-652, 1969.
- (15) O.D.Kellogg, *Foundation of Potential Theory*, Dover Publications, New York, 1953.
- (16) S.Nemat-Nasser, *Mechanics Today*, Vol.4, pp.44-52, Pergamon Press Inc., 1978.
- (17) D.A.Hills, P.A.Kelly, D.N.Dai, and A.M.Korsunsky, *Solution of Crack Problem*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- (18) Hibitt, Karlsson and Sorensen, Inc., *ABAQUS/Standard User's Manual*, Version 5.5, 1995.