

원호접근법을 이용한 디스크 캠기구의 운동해석에 관한 연구

구병국*, 신중호**, 윤호업***, 장옥화****

A Study on the Motion Analysis for Disk Cam Mechanism Using Circular Arc

B. K. Koo , J. H. Shin , H. E. Yoon , Y. H. Zhang

Key Words: Disk Cam (원반 캠), Circular Arc Method(원호 접근법), Motion Analysis (운동해석), Instant Velocity Center(순간속도 중심), Coordinate Transformation(좌표변환)

Abstract

Cam mechanisms are used commonly in many automatic machinery. Disk cam mechanisms has 4 different types according to the different types of followers. The motion characteristics of the cam mechanisms depend on the shape of the cam and the type of the follower. This paper performs the motion analysis for a disk cam and follower mechanism using a circular arc method and a coordinate transformation method in order to find a contact point of the cam and follower. The velocity is calculated by using the instant velocity concept. Also, the acceleration is determined on using the central difference method. As the results, this paper presents the original curve and the analyzed curve for the motion analysis of the disk cam for an example.

기호설명

- R_b : Radius of base circle
- R_r : Radius of roller follower
- Ψ_c : Contact angle
- ϵ : Eccentricity
- L_c : Length between cam rotating center and contact
- L : Follower displacement in reciprocating motion
- L_0 : Height of contacted follower on base circle
- θ_c : Rotating angle of cam

1. 서론

기계장치는 많은 기계요소로 구성되어져 있고 각 기계요소들은 잘 어울려 원활한 운동을 수행하여야 한다. 그러므로 각각의 기계요소들은 최적의 상태를 갖추고 있어야 하므로 효율적이고 정확한 설계와 해석이 이루어져야 한다.

특히, 많은 기계요소들 중 캠 기구는 구동축의 회전에 대해 출력축의 운동을 특정 함수로 구성하는데 매우 용이하므로 고기능화 기계에서 매우 유용하게 응용되고 있는 기계요소이다. 현대 기계들이 복잡하고 고속화되고 다기능화 되는 현실에서 캠 기구는 적은 공간에서 다양한 운동을 얻을 수 있으며, 일반 링크 시스템에 비해 기구의 구조가 간단하며 구성 부품의 수가 적은 장점이 있다. 또한, 고부가성 기계에 대해 응용성이 날로

* 창원대학교 기계설계공학과
 ** 창원대학교 기계설계공학과
 *** 창원대학교 기계설계공학과
 **** 창원대학교 기계설계공학과

증가하고 있어, 특히 공작기계, 섬유기계, 내연기관 및 자동이송장치 등의 자동화 시스템에 캠 기구가 널리 이용되고 있다.

이에 본 연구에서는 캠의 표면과 종동절의 기하학적 접촉을 유지시키는 조건에서 접촉면과 그 접촉점에서의 접촉각을 반복적으로 추정해나가는 원호 접근법과 좌표변환으로 캠의 운동해석 이론을 제시한다. 또한, 제시된 이론을 바탕으로 해석 프로그램을 만들어 캠의 해석자가 쉽고 간단한 해석으로 실용해석의 편의를 도모 하고자 한다.

2. 직선왕복운동용 구름 종동절

Fig 1.은 캠의 회전에 대해 종동절은 캠과 연속적으로 접촉하면서 상하방향으로 운동을 발생시키는 직선왕복운동용 구름 종동절 원반 캠 기구이다.

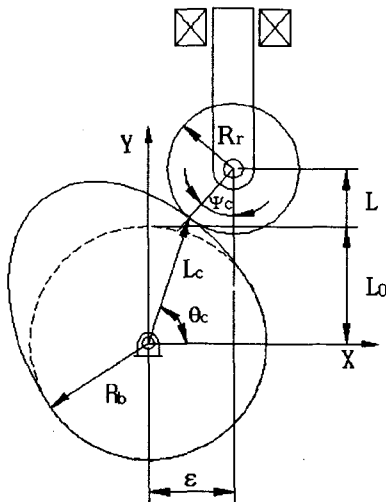


Fig 1. Reciprocating roller follower

3. 캠 기구의 운동 해석방법

3.1.1 위치해석

캠 기구의 운동해석은 캠 형상 좌표의 임의의 한 점과 전후에 위치하는 3점을 원의 방정식으로 표현하여, 삼각형의 외심과 좌표 변환을 이용하

여, 비원형의 캠 형상과 원형의 롤러가 같은 한 점에서 공유할 때, 롤러의 위치를 정의하여 수치 해석적 방법으로 변위 특성을 결정한다.

3.1.2 삼각형의 외심 계산

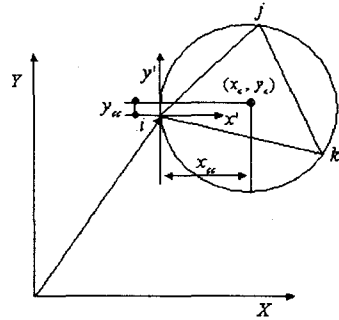


Fig 2. A circumcenter of triangle

Fig 2.에서 [X-Y]는 캠의 중심 좌표계 이고, [x'- y']은 i점을 원점으로 정한 좌표계 이다. 이때, [x'- y']을 원점으로 하는 캠 형상 좌표 [i, j, k] 세 점을 도형의 성질을 이용하여 원의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$x_{cc}^2 + y_{cc}^2 = r_c^2 \quad (3-1)$$

$$(x_{ki} - x_{cc})^2 + (y_{ki} - y_{cc})^2 = r_c^2 \quad (3-2)$$

$$\text{where : } x_{ki} = x_k - x_i, \quad y_{ki} = y_k - y_i$$

$$(x_{ji} - x_{cc})^2 + (y_{ji} - y_{cc})^2 = r_c^2 \quad (3-3)$$

$$\text{where : } x_{ji} = x_j - x_i, \quad y_{ji} = y_j - y_i$$

원의 방정식을 기초로 [x'- y']을 원점으로 하는 삼각형의 외심[x_{cc}, y_{cc}]을 구하기 위해 (3-2)에서 (3-1)식을 빼고, (3-3)에서 (3-1)식을 빼면 다음과 같다.

$$x_{ki}x_{cc} + y_{ki}y_{cc} = \frac{(x_{ki}^2 + y_{ki}^2)}{2} \quad (3-4)$$

$$x_{ji}x_{cc} + y_{ji}y_{cc} = \frac{(x_{ji}^2 + y_{ji}^2)}{2} \quad (3-5)$$

삼각형의 외심 $[x_{cc}, y_{cc}]$ 좌표를 수치해석적 방법으로 보다 쉽게 구하기 위해서 (3-4)와 (3-5)식을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_{cc} \\ y_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ki} & y_{ki} \\ x_{ji} & y_{ji} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_{ki}^2 + y_{ki}^2)/2 \\ (x_{ji}^2 + y_{ji}^2)/2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

(3-6)식에서 구한 외심 $[x_{cc}, y_{cc}]$ 을 $[X-Y]$ 좌표를 원점으로 하는 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$x_c = x_i + x_{cc} \quad (3-7)$$

$$y_c = y_i + y_{cc} \quad (3-8)$$

3.1.3 종동절의 위치

3개의 캠 형상 좌표와 종동절의 기하학적 관계에 의하여 종동절의 위치를 파악하여 직선왕복운동용 구름 종동절의 변위를 구할 수 있다.

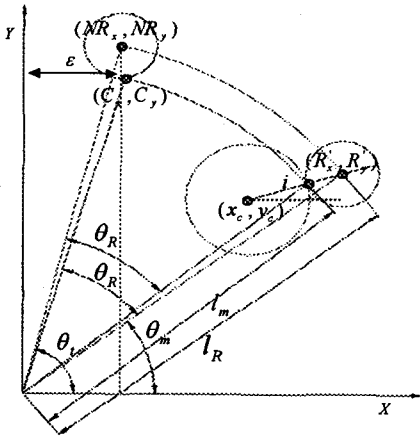


Fig 3. Coordinate transformation of reciprocating roller follower

Fig 3.은 캠 형상 좌표 i 점 $[x_i, y_i]$ 과 (3-7), (3-8)식에서 구한 외심을 이용하여, 롤러의 중심 좌표 $[R_x', R_y']$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{y_i - y_c}{x_i - x_c} \right] \quad (3-9)$$

$$R_x' = x_i + R_c \cos \theta \quad (3-10)$$

$$R_y' = y_i + R_c \sin \theta \quad (3-11)$$

(3-10), (3-11)식에서 구한 롤러의 중심좌표를 편심률까지 좌표변환을 위한 회전 각도를 구하면 다음과 같다.

$$l_R = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2} \quad (3-12)$$

$$\theta_m = \tan^{-1} \left[\frac{R_y'}{R_x'} \right] \quad (3-13)$$

$$\theta_i = \cos^{-1} \left[\frac{\epsilon}{l_R} \right] \quad (3-14)$$

$$\theta_R = \theta_i - \theta_m \quad (3-15)$$

(3-15)식을 이용하여 캠과 롤러의 새로운 접촉점을 구하면 다음과 같다.

$$C_x = x_i \cos \theta_R - y_i \sin \theta_R \quad (3-16)$$

$$C_y = x_i \sin \theta_R + y_i \cos \theta_R \quad (3-17)$$

(3-16), (3-17)식과 같은 방법으로 좌표변환을 이용하여 종동절의 새로운 롤러 중심 $[NR_x, NR_y]$ 을 구하면 다음과 같다.

$$NR_x = R_x' \cos \theta_R - R_y' \sin \theta_R \quad (3-18)$$

$$NR_y = R_x' \sin \theta_R + R_y' \cos \theta_R \quad (3-19)$$

(3-19)식과 캠의 기초원의 중심에서 종동절의 중심까지의 수직거리 관계식(3-20)에서 캠을 회전시키 종동절 롤러의 변위값 $[Y]$ 을 구하면 (3-21)식과 같이 정의된다.

$$L_0 = \sqrt{(R_c + R_r)^2 - \epsilon^2} \quad (3-20)$$

$$Y = NR_y - L_0 \quad (3-21)$$

3.2 속도와 압력각 해석

3.2.1 순간속도 중심

순간속도 중심이란 링크간의 상대회전을 유도하는 중심점이거나 직선운동에서 같은 방향과 속

도를 갖는 공통점이다.

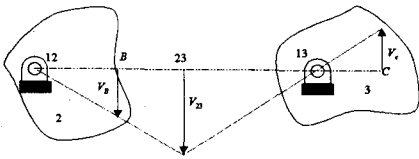


Fig 4. Instant velocity centers

Fig 4.의 기구는 케네디 정리에 의한 순간속도 중심 23은 선 12-13 위에 있다. 또한 순간속도 중심의 정의에 의하여 23은 물체2와 3의 공유점이고 각각 같은 속도를 갖는다. 링크 2에 있는 점 23은 그의 회전반지름이 12-23이고 링크 3위의 점 23은 회전반지름이 13-23이 된다. 그리고 회전 물체내의 모든 점의 속도는 그들의 회전반지름에 비례한다. 그러므로, 12에서 속도 V_B 의 화살 끝을 지나게 선을 그리고, 또 V_C 의 화살 끝과 13을 지나게 선을 그리면, 이 선들의 교점이 선 12-23위에 있게 되는 순간중심 23의 위치와 속도 V_{23} 의 크기를 가리킨다.

따라서, 이러한 순간속도 중심점의 성질을 이용하여 캠과 종동절의 순간위치에서 종동절의 순간속도 중심점을 구할 수 있다.

3.2.2 종동절의 속도

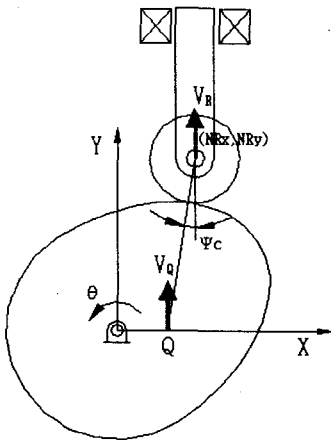


Fig 5. Instant velocity center and pressure angle of cam mechanism

순간속도 중심 이론을 바탕으로 캠과 종동절의 기하학적 관계에 의해 평면운동을 하는 3물체는 정확히 3개의 순간중심을 갖고, 이것들은 모두 같은 직선 상에 놓여있다는 케네디 이론에 의하여 Q로 정의되는데, 이 점은 접촉점에서의 공통 법선과 X축의 교점에 해당하며, 이때 X축은 다른 순간중심의 선이다. 따라서, 종동절의 운동이 Y축 방향과 동일하므로 순간속도 V_Q 는 종동절의 선속도인 V_R 과 같은 값을 갖는다. 따라서, (3-16), (3-17), (3-18), (3-19)식들의 함수 관계에 의하여 속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dL}{dt} = Q = C_x - \left[C_y \frac{C_x - NR_x}{C_y - NR_y} \right] \quad (3-22)$$

3.2.3 압력각

Fig 5.에서 캠과 구름 종동절이 접촉하는 상태에 따라 순간속도 중심점이 변화하는데, 롤러의 중심점에서 순간속도 중심점을 연결하는 직선이 종동절 운동축의 Y축과 이루는 각도로 접촉각[ψ_c]은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_c = \tan^{-1} \left[\frac{Q - NR_x}{NR_y} \right] \quad (3-23)$$

(3-23)식의 접촉각은 종동절 롤러의 운동방향이 Y축과 동일하므로 직선왕복운동용 캠기구에서는 압력각과 동일하게 된다.

3.3 가속도 해석

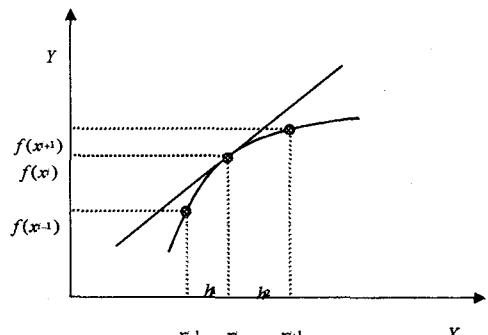


Fig 6. Central difference method

본 연구에서는 직접 미분법으로 가장 안정된 중앙미분법을 이용하여 불균등분할간격에서의 미분식을 Taylor이론을 이용하여 유도하였다. Fig 6.는 보다 정확한 값을 구하기 위해 X축의 캠의 회전각도 세 점 $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ 로 두고, Y축의 순간속도 증심을 이용하여 구한 속도 값을 근사화시키면 다음과 같다.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - h_1 f'(x_i) + \frac{h_1^2}{2} f''(x_i) - \dots \quad (3-24)$$

where : $\Delta h_1 = x_i - x_{i-1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h_2 f'(x_i) + \frac{h_2^2}{2} f''(x_i) + \dots \quad (3-25)$$

where : $\Delta h_2 = x_{i+1} - x_i$

(3-24)와 (3-25)식을 2차 미분항까지 남기면 다음과 같이 정리된다.

$$-h_1 f'(x_i) + \frac{h_1^2}{2} f''(x_i) = f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad (3-26)$$

$$h_2 f'(x_i) + \frac{h_2^2}{2} f''(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \quad (3-27)$$

(3-26), (3-27)식을 행렬로 표현하여, 캠 기구의 가속도 $[f'(x_i)]$ 와 저크 $[f''(x_i)]$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} f'(x_i) \\ f''(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & h_1^2/2 \\ h_2 & h_2^2/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_{i-1}) - f(x_i) \\ f(x_{i+1}) - f(x_i) \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

4. 캠 기구의 해석 적용예

앞에서 제시한 이론을 기초로 하여 개발된 캠 운동해석용 프로그램을 이용하여 설계된 캠과 해석된 캠을 비교하였다. Table 1.의 변위 선도와 Table 2.의 캠 설계에 필요한 데이터를 기초로 하여 변위, 속도, 가속도를 그래프로 표시하면 Fig 7.와 같이 나타난다.

Table. 1 Displacement curves for a cam design

sec-tion	cam angle (°)	motion	curve type
1	0~100	dwell	8-th order poly
2	100~180	rise	8-th order poly
3	180~260	return	8-th order poly
4	260~360	dwell	8-th order poly

Table. 2 Design variables of cam mechanism

Base circle	120
Roller radius	30
Eccentricity	10
Cam (open/close)	close
Follower position	outside

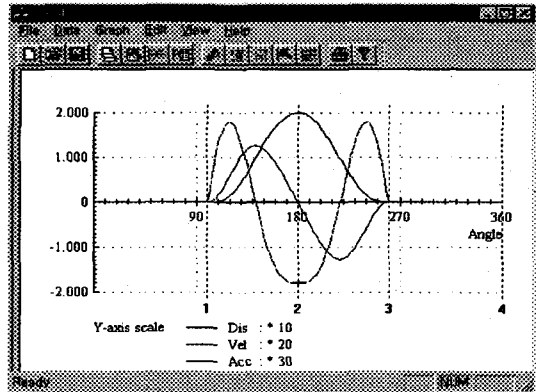


Fig 7. Displacement, velocity and acceleration curves for the cam design

설계된 임의의 캠 형상 자료 중에서 절반을 제거하고, 일부는 소숫점 이하를 제거하여 수정된 캠 형상자료를 이용하여 캠 해석을 수행하였다. 해석된 변위, 속도, 가속도 그래프는 Fig 8.와 같이 표시하였는데, 이는 수정된 캠 형상에 의한 결과도 제안된 최초의 변위 특성을 유지함을 보여주고 있다.

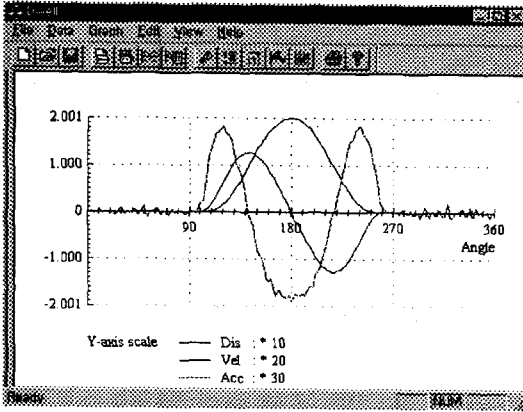


Fig 8. Motion properties after analyzed the modified cam

5. 결론

현재의 고속, 고기능 기계 및 장치들은 매우 높은 생산성을 요구하고 있다. 따라서, 캠 기구의 진동, 소음, 충격 또는 접촉 분리 등의 이상현상이 발생하여 목적하는 운동에서 벗어나는 현상이 발생할 수 있으므로, 종동질의 운동에서 속도, 가속도, 압력각 등을 적절히 조절하여 캠 종동질의 운동을 정확히 전달 해야한다. 그러므로 캠 기구의 운동특성을 최적으로 찾기 위해서, 캠 기구의 캠 운동해석을 위한 해석법을 정립하였고, 해석용 프로그램을 개발하였다.

본 연구에서는 적용예의 비교 분석한 바와 같이 설계된 변위, 속도, 가속도와 해석된 변위, 속도 가속도의 그래프가 거의 일치함을 Fig 7.과 Fig 8.에서 확인하였다. 이 결과를 통하여 이미 설계된 미지의 캠의 변위 곡선을 사용조건에 따라 적절하게 사용하여, 불필요한 축력이나, 관성력, 충격력의 제한조건들을 보정해서 특성에 맞는 곡선으로 재설계 할 수 있다.

결론적으로 본 연구에서 제시된 원호접근법을 이용한 디스크 캠 기구의 운동해석 프로그램은 산업 현장에서 유용하게 사용할 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) K. J. Waldron, G. L. Kinzel, 1999, "Kinematics, Dynamics, and Design of

Machinery", John Wiley & Sons Inc., pp. 332 ~ 389.

- (2) 김종수, 1997, "원반 캠기구의 설계해석 자동화를 위한 형상설계와 운동해석에 관한 연구", 박사학위논문, 창원대학교
- (3) 강동우, 2000, "다축제어용 원반 캠과 원통 캠의 복합 기구의 설계 자동화에 관한 연구", 박사학위논문, 창원대학교
- (4) G. H. Matrin, 1982, "Kinematics and Dynamics of Machines", McGraw-Hill
- (5) R. L. Norton, 1992, "Design of Machinery", McGraw-Hill pp. 353 ~ 369.