

유한한 대역폭을 가지는 통신 채널에서의 상태 추정값에 대한 분산 해석

황태현* · 최재원**

Variance Analysis for State Estimation in Communication Channel with Finite Bandwidth

Tae Hyun Fang, and Jae Weon Choi

Key Words: Finite capacity channel(유한한 용량의 채널), coder-estimator sequence(코더 추정 시퀀스), variance(분산), Gaussian distribution(가우시안 분포)

Abstract

Aspects of classical information theory, such as rate distortion theory, investigate how to encode and decode information from an independently identically distributed source so that the asymptotic distortion rate between the source and its quantized representation is minimized. However, in most natural dynamics, the source state is highly corrupted by disturbances, and the measurement contains the noise. In recent coder-estimator sequence is developed for state estimation problem based on observations transmitted with finite communication capacity constraints. Unlike classical estimation problems where the observation is a continuous process corrupted by additive noises, the condition is that the observations must be coded and transmitted over a digital communication channel with finite capacity. However, coder-estimator sequence does not provide such a quantitative analysis as a variance for estimation error. In this paper, under the assumption that the estimation error is Gaussian distribution, a variance for coder-estimation sequence is proposed and its fitness is evaluated through simulations with a simple example.

1. 서 론

피드백 제어시스템에서 제어기는 플랜트로부터 상태값을 피드백 받아 제어입력을 결정한다. 제어기와 플랜트가 충분히 떨어져 있다면 상호간에 통신을 통하여 상태값 피드백과 제어입력을 전송해야 한다. 현실적으로 통신 채널은 유한한 대역폭(bandwidth)을 가지고 있기 때문에 상태 관측값의 양자화(quantization) 수는 무한한 크기를 가질

수 없다. 또한 코드워드(codeword)의 길이가 길어질수록 전송시간이 길어지기 때문에 엔코딩(encoding)과 디코딩(decoding)에 의해 복원된 관측값의 정확성만 유지된다면 코드워드의 길이는 짧을수록 실시간 제어에 유리하다.

전송률 왜곡(rate distortion) 이론[1]과 같은 고전적인 정보 이론(information theory)은 원본 데이터와 양자화된 표현 사이의 비틀림률이 최소가 되도록 엔코딩하고 디코딩하는 방법을 고안하는 것이었다. 이때 원본 데이터는 독립 동일 분포(independent identical distribution)를 가지는 것으로 가정하였으며 코딩과 디코딩은 비순환적(nonrecursive)으로 이루어졌다. 그러나 동적 플랜트에서 측정된 값은 일반적으로 이러한 가정에 부합되지 않는다. 이와 같은 확률 동적 시스템의 측정치를 양자화, 엔코딩, 그리고 디코딩 과정을

* 부산대학교 기계공학부

** 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

통해 원격제어기에서 복원할 때, 상태값의 추정
에 대한 문제가 최근에 활발히 연구되어 그 결과
들이 발표되고 있다[2][3]. 특히, 참고문헌 [2]에서
는 고정 길이 엔코딩(fixed length encoding)에 대
한 코더 추정 시퀀스(coder-estimator sequence)를
제안하고 추정 오차의 크기가 유한함을 증명하였
다.

유한한 대역폭을 가진 통신 채널에서 전송된
측정치를 이용하여 상태값을 추정하는 것은 고전
적인 상태 추정 문제와는 다르다. 고전적인 상태
추정 문제는 측정치를 첨가된 잡음을 포함하는
연속적인 확률 프로세스로 취급하는 반면에 전송
된 측정치를 이용한 추정은 양자화 과정에 의해
엔코딩(encoding)되고 수신지에서 디코딩(decoding)
된 측정치를 이용하게 된다.

일반적인 확률 시스템에서 추정값은 분산으로
그 부정확성의 정도를 나타내고 있다. 분산을 추
정 오차의 흩어진 정도라고 할 수 있으며, 따라
서 추정 오차가 유한하다고 함은 분산이 유한한
값을 가진다는 것과 동일한 의미라고 할 수 있
다. 앞서 언급한 바와 같이 참고문헌 [2]는 추정
오차가 유한하다는 증명을 함으로써 추정 오차의
분산이 유한한 값을 가진다는 힌트만 주었으며
참고문헌 [3]은 참고문헌 [2]의 알고리즘을 개선
하기는 하였지만 추정 오차에 대해서는 개선된
결과를 제공하지 못하고 단지 참고문헌 [2]의 결
과에 의거한다는 결론을 내리고 있다. 따라서 아
직까지 유한한 대역폭을 가지는 통신 채널을 통
한 데이터 전송시의 상태 추정에 대한 추정 오차
의 분산은 제안되지 않고 있다. 그러나 하나의
확률 시스템(stochastic system)은 이러한 추정값을
이용하는 다른 확률 시스템과 연계되므로 추정
오차의 분산은 매우 중요한 의미를 가지고 있다.

본 논문에서는 Wong과 Brockett이 제안한 코더
추정 시퀀스에 의한 추정값의 추정 오차 분산을
구하는 문제를 다룬다. 본 논문에서 제안되는 분
산은 수학적 해석에 의한 결과라는 보다는 수
치적인 해석에 의한 결과를 도출하며, 시뮬레이
션으로 제안한 분산의 타당성을 검증할 것이다.

2. 코더 추정 시퀀스

전송률 왜곡 이론과 같은 고전적인 정보 이론

은 원본 데이터와 양자화된 표현 사이의 왜곡률
이 최소가 되도록 엔코딩하고 디코딩하는 방법을
고안하는 것이었다. 이때 원본 데이터는 독립 동
일 분포(independent identical distribution)를 가지는
것으로 가정하였으며, 엔코딩과 디코딩은 비순환
적(nonrecursive)으로 이루어졌다. 그러나 코더 추
정 시퀀스는 동적 시스템의 상태값에 대한 엔코
딩과 디코딩을 순환적(recursive)으로 구현하였다.

고정된 코드워드 길이(fixed codeword length)를
가지는 코더 추정 시퀀스는 일정한 샘플링 주기
를 가진다. n 을 코드워드의 길이라고 하고 δ 를
1-bit 전송하는데 걸리는 시간이라고 할 때 샘플
링 주기는 $n\delta$ 가 된다. 이때, 관심있는 대상 시스
템을 다음과 같은 선형 이산 상태 공간 방정식으
로 나타낼 수 있다고 가정하자.

$$x_{i+1} = Fx_i + Bu_i + Gw_i \quad (1)$$

$$y_{i+1} = Hx_{i+1} + v_{i+1} \quad (2)$$

여기서, x 는 상태값을 나타내며 초기값 x_0 의 확
률 밀도 함수는 알려져 있다고 가정한다. w_i 와
 v_i 는 상태값과 서로에 독립적인 공정잡음과 측정
잡음이며, 각각의 확률 밀도 함수도 알려져 있다
고 가정한다. u 는 제어입력을 나타낸다. B 와
 H 는 각각 입력 행렬과 측정 행렬을 나타내며,
이산 시간 시스템의 시스템 행렬 F 는 연속 시간
시스템의 시스템 행렬을 δ 라고 할 때 다음과 같
이 표현된다.

$$F = \exp(\mathcal{E}n\delta) \quad (3)$$

측정된 값(y_i)은 함수 h_i 에 의해 코딩되고, 채
널을 통하여 수신된 코드워드는 c_i 로 나타낸다.

단순화를 위해서 상태값은 스칼라 프로세서로
추정된다고 가정한다. 참고문헌 [3]은 고정된 코
드워드 길이 시퀀스의 코더 추정 시퀀스로 평균
시퀀스(mean sequence)와 등분 시퀀스(equal-
partition sequence)에 대해 소개하고 있다. 전자는
샘플 데이터 당 1-bit의 코드워드를 사용하는 시
퀀스이고, 후자는 n -bit의 코드워드를 사용하는
시퀀스를 나타내고 있다. 본 논문에서는 등분 코
더 추정 시퀀스에 대하여만 설명하기로 한다.

확률 밀도 함수가 값을 가지는 변수 값을 포함

하는 가장 작은 폐집합을 지원구간(support interval)이라고 하고 x_0 , w_i , 그리고 v_i 의 확률 밀도 함수에 대한 지원구간을 각각 $[-X_0 X_0]$, $[-W W]$, 그리고 $[-V V]$ 으로 둔다.

샘플링 시간 ind 에서 n -bit 코더 추정 시퀀스에 대한 코딩 함수는 코드워드 c_0, \dots, c_i 의 조건부 측정치 $y(ind)$ 의 확률 밀도 함수의 지원구간을 2^n 개로 등분한 길이에 맞추어 나눈다. 이러한 등분한 길이는 연속적으로 배열되는 간격으로서 (S_1, \dots, S_i) 로 표현되며 i 번째 코드워드에 대하여 S_i 가 대응된다. 수신된 코드워드에 조건한 x 의 확률 밀도 함수의 지원구간에서 중앙점이 추정값으로 정의되며 자세한 알고리즘은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$U_i = \max_{x \in [\Phi_i, \Psi_i]} Fx + Bu_i + GW + V \quad (5)$$

$$D_i = \min_{x \in [\Phi_i, \Psi_i]} Fx + Bu_i - GW - V \quad (6)$$

$$M_j = \frac{j}{2^n} (U_i - D_i) \quad (7)$$

D_i 와 M_j 를 이용하여 다음과 같이 상태 변수를 엔코딩한다.

$$\begin{aligned} \text{if } D_i + M_{j-1} \leq y_i < D_i + M_j \\ h_i(y_i) = j \end{aligned} \quad (8)$$

수신된 코드워드 c_i 는 다음과 같이 디코딩된다.

$$\hat{x}_i(c_i = j) = D_i + M_{j-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_{i+1}(c_i = j) \\ \Psi_{i+1}(c_i = j) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \max(D_i + M_{j-1} - V, D_i + V) \\ \min(D_i + M_j + V, U_i - V) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)은 추정값 \hat{x} 에 대한 지원구간을 갱신시키는 것을 나타낸다.

다음의 정리 1[3]은 n -bit 등분 코더 추정 시퀀스의 추정 오차가 안정함을 증명한다.

식 (1)과 (2)의 시스템에 비해 보다 일반적인 형태의 시스템을 다음과 같이 정의한다.

$$x_{i+1} = f_i(x_i) + u_i \quad (11)$$

$$y_{i+1} = x_{i+1} + v_{i+1} \quad (12)$$

여기서, x_0 의 확률 밀도 함수는 알려져 있으며, f_i 는 모든 i , x , 그리고 y 에 대해 다음의 식을 만족하는 Lipschitz 함수이다.

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq C_f |x - y| \quad (13)$$

정리 1 : 다음의 조건이 성립하면 n -bit 등분 코더 추정 시퀀스는 안정하다.

$$\lambda \delta \log_2 e < 1 \quad (14)$$

여기서, λ 는 1차의 시스템을 나타내며 선형 다변수 시스템에서는 시스템 행렬의 고유값으로 대체될 수 있다.

증명 : 코드워드 i_0, \dots, i_j 에 조건한 x_j 의 확률 밀도 함수에서 그것의 길이를 S_{i_0, \dots, i_j} 으로 나타낸다고 하자.

f 에 대한 Lipschitz 가정으로부터 조건부 x_{j+1} 의 확률 밀도 함수는 $C_f S + 2W$ 보다 작거나 같은 길이의 지원구간을 가지고 있다. 또한 동일한 코드워드에 조건한 y_{j+1} 의 지원구간은 $C_f S + 2W + 2V$ 보다 작거나 같다. 따라서 지원구간의 길이를 2^n 으로 나눈 값인 특성 집합(characteristics set)은 $(C_f S + 2W + 2V)/2^n$ 보다 작거나 같다. 만약 $i+1$ 번째 코드워드가 수신되었다면 x_{i+1} 은 연관된 특성 집합에 V 를 더한 값과 V 를 뺀 값 사이에 존재하게 된다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$S_{i_0, \dots, i_j} \leq (\tau S_{i_0, \dots, i_j} + 2W + 2V)/2^n + 2V \quad (15)$$

여기서, $\tau = \exp(\lambda n \delta)$ 이다.

이제 T_j 를 다음과 같이 정의한다

$$T_j = \max_{i_0, \dots, i_j} S_{i_0, \dots, i_j} \quad (16)$$

식 (16)과 같이 T_j 를 두면 다음이 성립한다.

$$T_{i+1} \leq (\tau T_i + 2W + 2V)/2^n + 2V \quad (17)$$

만약 $\tau < 2^n$ 이면 시퀀스 T_j 는 유한한 값을 가지게 된다. 코드워드 c_{i_0, \dots, i_j} 조건부 x 의 분산은 T_j^2 에 의해 제한되므로 증명은 완료된다. ■

3. 코더 추정 시퀀스의 분산 결정

2장의 코더 추정 시퀀스에 의한 추정값을 다음과 같은 잡음을 포함하는 랜덤 변수로 둘 수 있다.

$$\hat{x}_i = x_i + e_i \quad (18)$$

여기서, \hat{x}_i 는 특성집합의 중앙점이 된다.

랜덤 프로세스 x_i 는 연속적인 값을 가지므로 e_i 역시 연속적인 랜덤 프로세스 잡음으로 간주할 수 있다. 추정 오차 e_i 는 공정 잡음, 측정 잡음, 그리고 양자화 오차에 의해 기인한다. 양자화 오차를 무시한다면 추정 오차는 근본적으로 공정 잡음과 측정 잡음에 의해 기인한다. 잡음에 대하여 일반적으로 적용되는 가정을 여기서도 적용하여 공정 잡음과 측정 잡음이 Gaussian 분포를 가진다고 가정한다. 따라서 추정 오차 e_i 는 Gaussian 분포를 가지는 프로세스로 볼 수 있다.

스칼라 Gaussian 랜덤 변수의 확률 밀도 함수는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$f_e(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon - \bar{e})^2\right\} \quad (19)$$

여기서, σ 는 랜덤 변수 e 의 표준편차를 나타내고 \bar{e} 는 평균을 나타낸다.

Gaussian 확률 밀도 함수는 대칭형이고 하나의 최대값만 가지므로 확률이 최대가 되는 지점이 랜덤 변수의 평균이 된다. 표준편차 σ 는 평균에 대한 확률 밀도 함수의 퍼진 정도를 결정한다. 따라서 $[\bar{e} - \sigma, \bar{e} + \sigma]$ 구간 사이에 있는 곡선 아래의 면적은 전체 면적의 68.3%가 된다. 즉 다

음의 식들이 만족한다[4].

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (20)$$

$$\int_{\bar{e}-\sigma}^{\bar{e}+\sigma} f_e(\varepsilon) d\varepsilon = 0.683 \quad (21)$$

$$\int_{\bar{e}-3\sigma}^{\bar{e}+3\sigma} f_e(\varepsilon) d\varepsilon = 0.997 \quad (22)$$

식 (22)로부터 랜덤 변수가 평균을 중심으로 3 σ 이내의 구간에 속하게 되는 확률은 99.7%라는 것을 알 수 있다.

정리 1에 의해 코더 추정 시퀀스의 추정 오차는 $T_j/2$ 를 넘지 않으므로 추정 오차는 다음 식을 항상 만족한다.

$$e_i \in [\hat{x}_i - T_j/2, \hat{x}_i + T_j/2] \quad (23)$$

추정 오차 e_i 가 Gaussian 분포한다고 가정한다면 e_i 의 표준편차를 $T_j/6$ 로 하는 근사적인 값을 구할 수 있다. 최종적으로 코더 추정 시퀀스의 추정 오차의 분산을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E[(\hat{x}_i - x_i)^2] = (T_j/6)^2 \quad (24)$$

본 논문에서 제안하는 식 (24)의 분산은 해석적으로 구해진 결과가 아니므로 시뮬레이션을 통한 검증이 필요하다. 시뮬레이션을 위한 동적 시스템은 등속으로 이동하는 운동체를 사용하기로 한다. 운동체는 센서를 이용하여 측정된 자신의 위치와 속도를 유한한 채널을 통하여 전송한다고 가정한다. 단순화를 위해서 운동체의 운동은 이산 선형 시스템으로 다음과 같이 정의하며 샘플링 주기 Δ 는 코더 추정 시퀀스의 일회의 순환 시간과 동일하다고 가정한다.

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} w_i \quad (25)$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_i + v_i \quad (26)$$

여기서, $x \in R^2$ 이며 x 의 1행의 변수는 위치를 나타내며 2행의 변수는 속도를 나타낸다. w_i 와

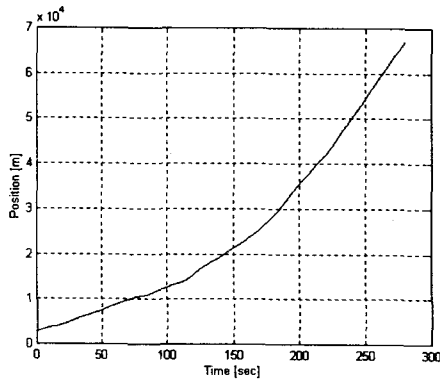


Fig. 1. Trajectory of vehicle

v_i 는 상호 독립이고 영평균 백색잡음인 공정 잡음과 측정 잡음을 나타낸다.

등속으로 운동하는 운동체의 초기 위치는 80m로 초기 속도는 95m/s로 설정하였고 280초 동안 운동한 데이터를 사용하였다. 샘플링 주기 Δ 는 0.05초로 설정하였고 4-bit 등분 코드 추정 시퀀스를 적용하였다. 운동체의 공정 잡음의 분산은 $16m^2/s^2$ 으로 설정하였고 측정 잡음의 분산은 위치에 대해 $100m^2$ 으로 속도에 대해 $25m^2/s^2$ 으로 각각 독립적으로 발생하도록 설정하였다.

그림 1은 이해를 돕기 위해 나타낸 시간에 따른 운동체의 궤적이다. 등속 운동인데도 불구하고 궤적의 곡선 운동이 심한 것은 주어진 초기 속도에 비해 공정 잡음의 크기가 적지 않기 때문이다. 그림 2는 코드 추정 시퀀스의 지원구간을 시간에 따라 나타낸 것이다. 식 (16)에 의거하여 시간에 따라 증가하는 양상을 볼 수 있지만 일정 시간 이후로는 더 이상 증가하지 않는 것을 알 수 있다. 본 논문에서 식 (24)으로 제안한 등분 코드 추정 시퀀스의 분산을 시뮬레이션에서 도출하기 위해 다음과 같이 근사화를 실시하였다.

Table 1. estimation error variance of coder-estimator sequence:

$$A = \sum_i (\hat{x}_i - x_i)^2 / I, B = \left(\sum_i T_i / 6I \right)^2, C = ((B-A)/A) \times 100$$

	A	B	C
위치	103.93	110.07	5.9 %
속도	27.83	35.32	26.9 %

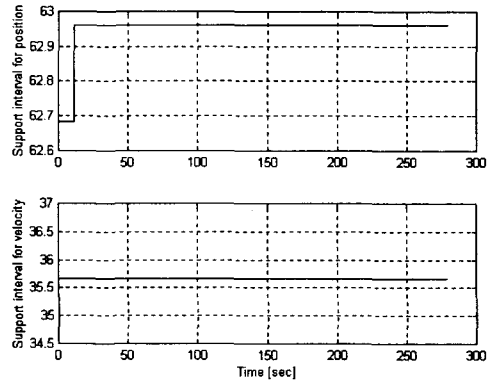


Fig. 2. Length of support interval for coder-estimator sequence:

position(up), velocity(down)

$$E[(\hat{x}_i - x_i)^2] \approx \sum_i (\hat{x}_i - x_i)^2 / I \quad (27)$$

$$(T_i/6)^2 \approx \left(\sum_i T_i / 6I \right)^2 \quad (28)$$

샘플링 주기 0.05초로 280초까지 시뮬레이션한 5600개의 데이터를 이용하여 식 (27)과 식 (28)의 결과 값은 표 1과 같이 나타났다. 표 1에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제안한 방법에 의해 구해진 분산이 실제 값과 유사하게 산출되고 있다. 특히, 위치에 대한 분산은 실제 값에 비해 단지 5.9%만이 증가되어 매우 정확한 결과를 보여준다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 네트워크 상의 상태 추정을 위한 코드 추정 시퀀스에 대한 추정 오차 분산을 제시하였다. 제시된 결과는 추정 오차가 Gaussian 분포한다는 가정 하에 도출되었다. 제시된 오차의 분산이 타당한지를 검증하기 위해 단순히 등속으로 이동하는 운동체에 대한 시뮬레이션을 실시하였으며 구해진 결과를 실제 값과 비교하였다. 그러나 본 논문에서 제시한 분산은 해석적인 결과가 아니며 추정 오차가 Gaussian 분포한다는 가정이 성립될 때만 유효하기 때문에 보다 일반적인 상황에서도 합당한 분산을 구하는 연구가 앞으로 필요하다.

후기

본 논문은 2000년도 두뇌한국 21사업 핵심분야에 의하여 지원되었습니다.

참고문헌

- (1) T. Berger, 1971, *Rate Distortion Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- (2) W. S. Wong, and R. W. Brockett, 1997, "Systems with Finite Communication Bandwidth Constraints-Part I: State Estimation Problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 9, September, pp. 1294-1299.
- (3) N. G. Dokuchaev, and A. V. Savkin, 1999, "Recursive State Estimation via Limited Capacity Communication Channels," *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, December, pp. 4929-4932.
- (4) P. S. Maybeck, 1979, *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1, Academic Press.