

축의 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동평형장치의 동적해석

방인창* · 정진태**

Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer in a Rotor with the Bending Flexibility

Inchang Bang, Jintai Chung

Key Words : Rotor Vibration (회전체 진동), Automatic Dynamic Balancer (자동평형장치), Bending Flexibility (굽힘효과), Time Integration Method (시간적분법)

Abstract

Dynamic behavior of an automatic dynamic balancer is analyzed by a theoretical approach. Using Lagrange's equation, we derive the non-linear equations of motion for an automatic dynamic balancer equipped in a rotor with the bending flexibility with respect to the rectangular coordinate. Considering the rotor bending flexibility we analyze out-of-plane vibrations as well as in-plane vibrations of the automatic dynamic balancer. The time responses are computed from the non-linear equations by using a time integration method. We also investigate the effect of rotor flexibility on the behavior of the automatic dynamic balancer

1. 서 론

자동차, 공작기계, 인공위성 시스템, CD-ROM, DVD 드라이브, 드럼세탁기 등 회전기계의 주된 진동원인은 회전체의 질량편심이다. 이러한 질량 편심은 면내 진동 및 축의 굽힘효과에 따른 면외 진동과 소음을 발생하여 회전기계의 성능을 저하시키고 회전기계의 내구 연한을 감소시킨다.

자동평형장치(Automatic Dynamic Balancer)는 회전체의 주 진동원으로 작용하는 질량편심을 불의 질량에 의해 자동적으로 줄여주는 장치로 일반적으로 회전체에 환형의 홈을 파고 홈 속에서 여러 개의 작은 볼이 자유롭게 이동할 수 있는 구조를 가지고 있다. 회전축에 영구 장착되는 회전체는 장착 후에 1회의 정적 혹은 동적 밸런싱으로 편심을 줄여 진동 문제를 해결할 수 있으나, 세탁기 혹은 공작 기계와 같이 회전체의 편심량이 사용

조건에 따라 변하는 경우 1회의 밸런싱으로 만족할 만한 결과를 얻을 수 없다. 이러한 가변적인 편심량을 갖는 회전체의 밸런싱을 하기 위하여 자동평형장치의 연구는 중요하다.

회전체에 장착된 자동평형장치의 연구는 Thearle⁽¹⁾, Alexander⁽²⁾, Cade⁽³⁾, Lee 등^(4,5) 과 Chung 등⁽⁶⁻¹⁰⁾에 의해 이루어졌다. 기존의 연구는 회전체의 가변적인 질량편심에 의한 면내 진동을 제어하는 데만 초점이 맞추어져 진행되어 왔다. 즉, Jeffcott 회전체에 자동평형장치가 장착된 시스템에 대하여 연구를 수행하였다. 그러나, 실제 회전기계에서는 면내 진동뿐만 아니라 축의 굽힘 효과에 따른 면외 진동도 유발되기 때문에 기존의 자동평형장치의 적용에는 한계가 있다. 실제로 현재 산업체에서는 면외 진동까지 고려한 자동평형장치의 설계 방향이 제시되어 있지 않기 때문에 시행착오식 설계방법에 의존하고 있고 이로 인해 많은 시간적, 경제적 손실을 낳고 있는 실정이다. 따라서, 질량 편심에 의한 회전체의 면내 진동뿐만 아니라 축의 굽힘효과에 따른 면외 진동까지 저감시키는 자동평형장치에 대한 연구가 필요하며 이는 보다 정밀한 운용과 안정성을 요하는 회전 기계시스템의 설

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

** 한양대학교 공학대학 기계공학과

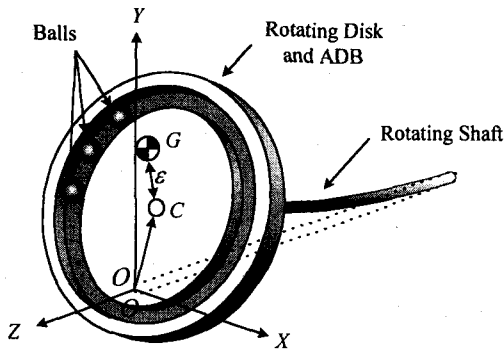


Fig. 1 Automatic dynamic balancer for a rotor with bending effect

계를 위해 필수적이다.

본 논문의 목적은 질량 편심 및 축의 굽힘효과로 인해 발생하는 면내 및 면의 진동을 제어하는 자동평형장치의 동적해석에 있다. 이를 위해 직교좌표계를 이용하여 축의 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동평형장치에 대해 비선형 지배방정식을 유도하였다. 그리고 시간적분법을 이용하여 비선형 지배방정식으로부터 자동평형장치의 동적해석을 수행하였다.

2. 비선형 지배방정식

축의 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동평형장치는 Fig. 1 과 같이 모델링 할 수 있다. 회전속도가 ω 로 일정한 회전체의 도심의 좌표를 직교좌표계를 이용하여 표시하고, 회전체의 무게중심의 위치는 축 중심으로부터의 편심량 ε 과 축의 굽힘효과로 발생하는 θ_x, θ_y 와 회전체의 일정 회전각 ωt 로 정의된 Euler 각을 이용하여 나타낼 수 있다. 각 볼의 위치는 회전체의 도심과 무게중심을 잇는 직선을 기준으로 반시계방향으로 측정된 각도 ϕ_i (단 $i=1, 2, \dots, n$ n 은 볼의 개수), 레이스의 반경 R 로 정의 할 수 있다.

지배방정식은 다음과 같은 Lagrange 방정식으로 유도된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, V 는 위치에너지, F_r 는 Rayleigh 감쇠계수를 나타내며 q_k 는 일반좌표 $x, y, \theta_x, \theta_y, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 을 나타낸다. 따라서

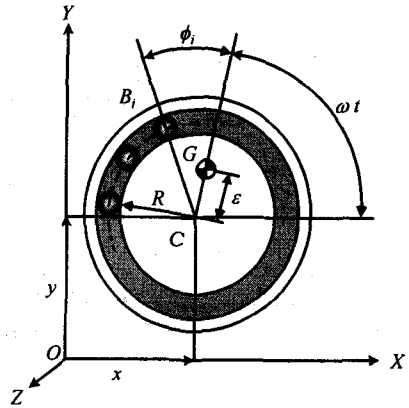


Fig. 2 Configuration of the automatic dynamic balancer

볼의 개수가 n 개라면 $n+4$ 개의 운동방정식이 얻어진다. 회전체의 질량중심의 위치벡터 r_G 와 회전체의 각속도 Ω 는 $\theta_x, \theta_y, \omega t$ 순으로 정의된 Euler 각에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} r_G = & (x + \varepsilon \cos \theta_y \cos \omega t) i \\ & + [y + \varepsilon (\cos \theta_x \sin \omega t + \sin \theta_x \sin \theta_y \cos \omega t)] j \\ & + \varepsilon (\sin \theta_x \sin \omega t - \cos \theta_x \sin \theta_y \cos \omega t) k \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & (\dot{\theta}_x \cos \omega t \cos \theta_y + \dot{\theta}_y \sin \omega t) i'' \\ & + (\dot{\theta}_y \cos \omega t - \dot{\theta}_x \sin \omega t \cos \theta_y) j'' \\ & + (\omega + \dot{\theta}_x \sin \theta_y) k'' \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 i'', j'', k'' 는 운동 좌표계의 단위벡터를 나타낸다. 그리고 i 번째 볼의 위치는 $\theta_x, \theta_y, \omega t + \phi_i$ 순으로 정의된 Euler 각에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{B_i} = & [x + R \cos \theta_y \cos(\omega t + \phi_i)] i \\ & + [y + R \{ \cos \theta_x \sin(\omega t + \phi_i) \\ & + \sin \theta_x \sin \theta_y \cos(\omega t + \phi_i) \}] j \\ & + R [\sin \theta_x \sin(\omega t + \phi_i) \\ & - \cos \theta_x \sin \theta_y \cos(\omega t + \phi_i)] k \end{aligned}$$

볼의 질량이 모두 같고 크기가 작다고 가정한다면 자동평형장치의 운동에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} i_x \Omega_x^2 + \frac{1}{2} i_y \Omega_y^2 + \frac{1}{2} i_z \Omega_z^2$$

$$+\frac{1}{2}M\dot{r}_G^2 + \frac{1}{2}m\sum_i^n \dot{r}_B \quad (4)$$

M 은 회전체의 질량을 그리고 m 은 볼 한 개의 질량을 나타내며 i_x, i_y, i_z 는 각각 회전체의 X 축, Y 축, Z 축에 대한 질량관성모멘트를 나타낸다. 중력에 의한 위치에너지를 무시하고 굽힘효과가 고려된 축의 위치에너지는 다음과 같이 얻어진다.

$$V = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^T [K_{XZ}] \begin{Bmatrix} x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y \\ \theta_x \end{Bmatrix}^T [K_{YZ}] \begin{Bmatrix} y \\ \theta_x \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $[K_{XZ}]$, $[K_{YZ}]$ 는 각각 $X-Z$ 평면과 $Y-Z$ 평면에서 구한 축의 강성 행렬로 다음과 같다.

$$[K_{XZ}] = -\frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -L/2 \\ -L/2 & L^2/3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{YZ}] = -\frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L/2 \\ L/2 & L^2/3 \end{bmatrix}$$

여기서 E , I 그리고 L 은 각각 축의 영률과 면적관성모멘트 그리고 축의 길이를 나타내며 축의 감쇠계수를 c , 레이스 안의 윤활유의 점성계수를 D 라 하면 Rayleigh 감쇠함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$F_r = \frac{1}{2}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}D\sum_i^n \dot{\phi}_i^2 \quad (6)$$

식 (4)-(6)을 식(1)에 대입하면 다음과 같은 $n+4$ 개의 비선형 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} (M+2m)\ddot{x} - C_1\theta_y\ddot{\theta}_y - mR\sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i)\ddot{\phi}_i \\ = C_1\dot{\theta}_y^2 - 2S_2\theta_y\dot{\theta}_y + mR\sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i)^2 \\ - k_{11}x + k_{12}\theta_y + M\epsilon\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (M+2m)\ddot{y} - (S_1\theta_x - C_1\theta_y)\ddot{\theta}_x \\ + C_1\theta_x\ddot{\theta}_y + mR\sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i)\ddot{\phi}_i \\ = S_1\dot{\theta}_x^2 + 2C_2\theta_x\dot{\theta}_x + 2S_2\theta_y\dot{\theta}_x - 2C_1\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + 2S_2\theta_x\dot{\theta}_y + C_3\theta_x\theta_y + mR\sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i) \\ - k_{11}y - k_{12}\theta_x + M\epsilon\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left(mR^2 \sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i)^2 + i_x \right) \ddot{\theta}_x - (S_1\theta_x - C_1\theta_y)\ddot{y} \\ - \left(mR^2 \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i) \sin(\omega t + \phi_i) \right) \ddot{\theta}_y \\ + mR^2 \sum_{i=1}^n \theta_y \ddot{\phi}_i \\ = -2P_1\dot{\theta}_x - 2S_3\dot{\theta}_y - \omega i_z \dot{\theta}_y - k_{22}\theta_x - k_{12}y \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(mR^2 \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i)^2 + i_y \right) \ddot{\theta}_y - C_1\theta_y\ddot{x} + C_1\theta_x\ddot{y} \\ = C_3\dot{\theta}_x + 2P_1\dot{\theta}_y + \omega i_z \dot{\theta}_x - k_{22}\theta_y + k_{12}x \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} mR \sin(\omega t + \phi_i)\ddot{x} + mR \cos(\omega t + \phi_i)\ddot{y} \\ + mR^2\theta_y\ddot{\theta}_x + mR^2\ddot{\phi}_i \\ = mR^2 \cos(\omega t + \phi_i) \sin(\omega t + \phi_i) \dot{\theta}_x^2 \\ - mR^2 \cos(\omega t + \phi_i) \sin(\omega t + \phi_i) \dot{\theta}_y^2 \\ - 2mR^2 \cos(\omega t + \phi_i)^2 \dot{\theta}_x \theta_y \\ + mR^2 \cos(\omega t + \phi_i) \cos(\omega t + \phi_i) (\omega + \dot{\phi}_i)^2 \theta_x^2 \\ - mR^2 \sin(\omega t + \phi_i) \cos(\omega t + \phi_i) (\omega + \dot{\phi}_i)^2 \theta_y^2 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} C_1 &= mR \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i) + M\epsilon \cos \omega t \\ C_2 &= mR \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i) + M\epsilon\omega \cos \omega t \\ C_3 &= mR \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i)^2 + M\epsilon\omega^2 \cos \omega t \\ S_1 &= mR \sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i) + M\epsilon \sin \omega t \\ S_2 &= mR \sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i) + M\epsilon\omega \sin \omega t \\ S_3 &= mR \sum_{i=1}^n \sin(\omega t + \phi_i)(\omega + \dot{\phi}_i)^2 + M\epsilon\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$P_1 = mR^2 \sum_{i=1}^n \cos(\omega t + \phi_i) \sin(\omega t + \phi_i) (\omega + \dot{\phi}_i) + M\epsilon^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}} \quad (13)$$

3 시간응답에 의한 동적해석

축의 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동 평형장치의 비선형 운동방정식에 대한 시간응답을 Runge-Kutta 방법으로 수치계산하기 위해 식(7)-식(11)을 상태 방정식으로 쓰기 위해 속도 항들인 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\phi}_i$ 을 다음과 같이 새로운 형태로 표현해야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &\text{ def } \hat{x}, & \dot{y} &\text{ def } \hat{y}, & \dot{\theta}_x &\text{ def } \hat{\theta}_x, & \dot{\theta}_y &\text{ def } \hat{\theta}_y, \\ \dot{\phi}_i &\text{ def } \hat{\phi}_i \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)을 사용하여 지배방정식을 $2n+8$ 개의 1 차 상미분 방정식으로 만들 수 있고 상태 방정식을 행렬-벡터 방정식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

여기서,

$$\mathbf{x} = \{x, y, \theta_x, \theta_y, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_n\}^T$$

Table 1 Material properties and dimensions of the system

Variable	Value	Variable	Value
M	1 kg	ϵ	10^{-3} m
m	0.01 kg	c	2 Ns/m
R	0.1 m	D	10^{-4} Nm/s
L	0.2 m	n	2

시간응답 계산을 위한 자동평형장치의 물성치는 Table 1 과 같으며 초기조건은 $x(0) = 10^{-4}$ m, $y(0) = 0, \theta_x(0) = 0, \theta_y(0) = 0, \phi_1(0) = 45^\circ, \phi_2(0) = 90^\circ, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\theta}_x(0) = \dot{\theta}_y(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ 으로 주어졌다. 이 경우 축계의 고유진동수 ω_n 은 다음과 같이 구해진다⁽¹¹⁾.

자동평형장치의 동적해석을 위한 면내변위, 면의 변위 그리고 볼의 위치에 대한 시간응답 계산은 $\omega/\omega_n = 0.5, \omega/\omega_n = 1.25$ 그리고 $\omega/\omega_n = 2$ 인 경우에 대해서 수행하였다.

Fig. 3 과 Fig. 4 는 $\omega/\omega_n = 2$ 인 경우에 대한 면내 변위와 면의 변위의 시간에 따른 시간응답을 보여 주고 있다. 이 경우 시간이 경과함에 따라 면내 변위 r 과 면의 변위 θ_x, θ_y 가 0 으로 수렴하여 진동이 제거됨을 알 수 있다 여기서 면내변위 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 으로 계산된다. 자동평형장치를 부착하지 않은 경우, 즉 볼의 개수가 0 인 경우에는 질량 불평형 때문에 면내 진동과 면의 진동이 제거되지 않는다.

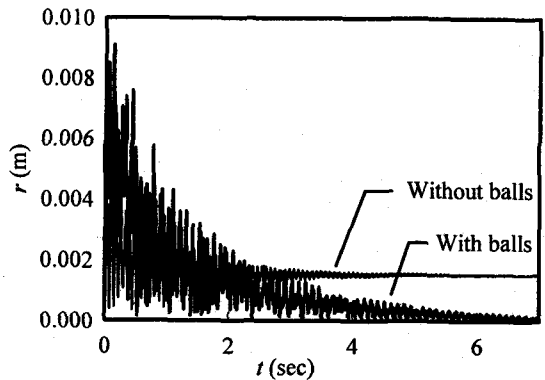


Fig. 3 Time response of the in-plane displacement when $\omega/\omega_n = 2$

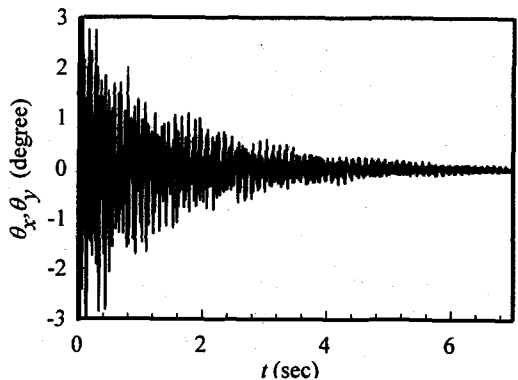


Fig. 4 Time response of the out-of-plane displacement when $\omega/\omega_n = 2$

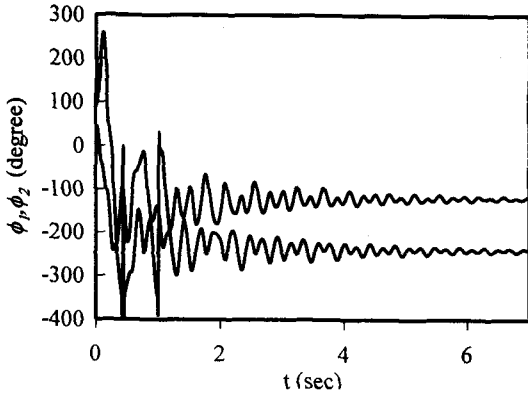


Fig. 5 Time response of the ball positions when $\omega/\omega_n = 2$

Fig. 5는 볼의 위치에 대한 시간응답을 보여 주는데 시간이 경과함에 따라 일정한 위치로 수렴한다. 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심 반대쪽에 위치하여 질량 불평형을 보상하여 밸런싱의 목적을 달성한다.

Fig. 6은 $\omega/\omega_n = 0.5$ 인 경우에 대한 면내 진동의 시간응답을 보여주고 있고 Fig. 7과 Fig. 8은 자동평형장치가 장착되었을 때와 장착되지 않았을 때의 면외 변위에 대한 시간응답을 보여주고 있다. 이 경우 시간이 경과함에 따라 면내 변위와 면외 변위가 0으로 수렴하지 않고 자동평형장치를 장착했을 때의 변위가 자동평형장치를 장착하지 않았을 때의 변위보다 더 큰 진폭을 갖는다. 이 때 볼의 위치는 Fig. 9와 같이 일정한 값으로 수렴하고, 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심과 같은 방향으로 위치하여 오히려 질량 불평형을 가중시켜 더 큰 진폭을 발생시킨다.

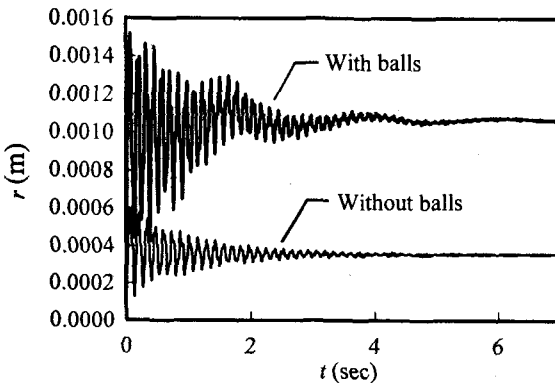


Fig. 6 Time response of the in-plane displacement when $\omega/\omega_n = 0.5$

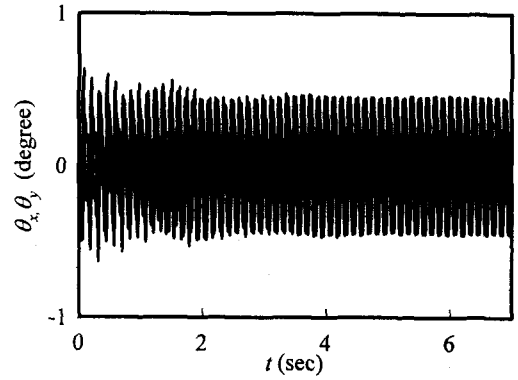


Fig. 7 Time response of the out-of-plane displacement when $\omega/\omega_n = 0.5$ and with balls

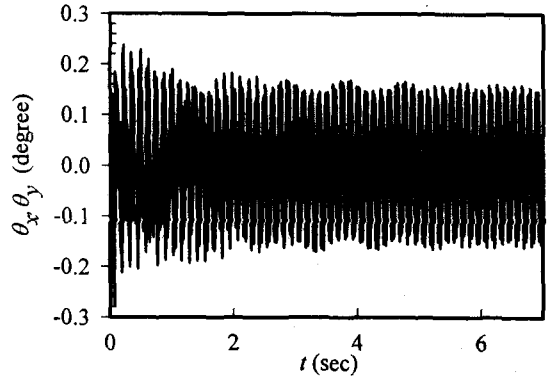


Fig. 8 Time response of the out-of-plane displacement when $\omega/\omega_n = 0.5$ and without balls

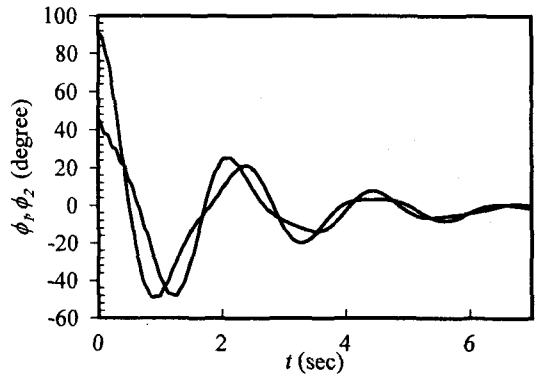


Fig. 9 Time response of the ball positions when $\omega/\omega_n = 0.5$ and with balls

4. 결론

본 논문에서는 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동평형장치의 동적해석을 위해 면내 변위 뿐만 아니라 변위 변위에 대한 비선형 지배방정식을 구하였다. 그리고 유도된 비선형 지배방정식을 시간 적분법을 통해 시간응답을 계산하여 동적특성을 분석하였다. 분석 결과 축의 굽힘효과를 고려한 회전체에 장착된 자동평형장치의 작동조건과 회전체의 회전속도 사이에 밀접한 관계가 있음을 확인하였다. 회전체의 회전속도가 위험속도보다 높을 때에 자동평형장치가 질량 불평형을 제거 하여 면내 진동 뿐만 아니라 면의 진동도 저감시킬 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Thearle, E. L., 1932, "A New Type of Dynamic Balancing Machine," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 131-141.
- (2) Alexander, J. E., 1964, "An Automatic Dynamic Balancer," *Proceeding, 2nd Southeastern Conference*, pp. 415-426.
- (3) Cade, J. W., 1965, "Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanism," *Design News*, pp. 234-239.
- (4) Lee, J., 1995, "An Analytical Study of Self-Compensating Balancing Dynamic Balancer with Damping Fluid and Ball," *Shock and Vibration*, Vol. 2, pp. 59-67.
- (5) Lee, J. and Van Moorhem, W. K., 1996, "Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism," *ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 118, pp. 468-475.
- (6) 박준민, 노대성, 정진태, 1999, "자동 불 평형 장치의 진동해석," 한국소음진동공학회 논문집, 제 9 권, 제 2 호, pp. 363-370.
- (7) 이동진, 정진태, 노대성, 1999, "자동 불 평형 장치를 이용한 팽 디스크 드라이브의 진동저감," 한국소음진동공학회 논문집, 제 9 권, 제 2 호, pp. 355-362.
- (8) J. Chung and D- S. Ro, 1999, "Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035-1056.
- (9) C. H. Hwang and J. Chung, 1999, "Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer with Double Races," *JSME International Journal, Series C*, Vol. 42, No. 2, pp. 265-272.
- (10) 이동진, 정진태, 황철호, "이중레이스를 갖는 자동평형장치의 진동해석," 대한기계학회 논문집 A 권, 제 24 권, 제 5 호, pp. 1093-1102.
- (11) Green, R., 1948, "Gyroscopic Effects of the Critical Speeds of Flexible Rotors," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 15, pp. 369-376.