

전달함수합성법을 이용한 민감도 해석

이두호* · 황우석** · 김찬묵*

Sensitivity Analysis using FRF-based Substructuring Method

Doo-Ho Lee, Woo-Seok Hwang and Chan-Mook Kim

Key Words : Design Sensitivity Analysis(설계민감도 해석), FRF-based Substructuring Method(전달함수 합성법)

Abstract

A general procedure for the design sensitivity analysis of structural dynamic problems has been presented in frame of the FRF-based substructuring formulation. In the procedure, the direct differentiation method is used for the sensitivity formula. For a system response function, the proposed method gives a parametric design sensitivity formula in terms of the partial derivatives of the connection element properties and the transfer matrix of the subsystems. The derived design sensitivity formula is applied to a numerical example. The comparison of sensitivities derived by the proposed method and the finite difference method shows that the proposed method is efficient and accurate.

기호설명

- b : 설계변수
 F : 외력
 H : 주파수응답함수(frequency response function)
 H' : 연결요소의 리셉턴스(receptance)
 D : 부분구조합성법 시스템 행렬
 R_j : j 번째 연결점에서의 반력
 x_r : r 점에서의 응답
 ω : 각속도(angular velocity)

1. 서 론

동적 구조물의 설계는 일반적으로 관심부분의 응답뿐만 아니라 공진주파수를 제한조건으로 갖는 경우가 대부분이다. 이러한 응답 및 제한조건을 만족하는 설계를 효율적으로 얻기 위해서 설계변경시의 동특성을 예측할 수 있는 민감도해석(sensitivity analysis)과 이와 결합된 수학적 계획법에 의한 최적화 수법이 필요하다. 구조물에 대한

설계민감도해석의 절차는 참고문헌 [1]에 잘 정리되어 있다.

구조물 동적 문제에 대한 설계민감도 해석은 주로 고유치나 고유벡터에 대해서 연구가 행해져 왔다 [2, 3]. 이와 같은 접근 방법에서는 시스템의 응답에 대한 설계민감도는 응답을 모드중첩원리에 따라서 모달 인자로 나타낸 다음 미분을 취하여 고유치와 고유벡터에 대한 민감도식으로 표현하는 간접적인 방법을 취한다. 또 다른 방법으로 주파수응답함수로부터 직접 민감도식을 얻기 위한 방법이 있는데 Lin 등[4]은 시험으로 얻은 주파수응답함수만으로 응답의 설계민감도를 구하는 방법을 제안 하였다.

부분구조합성법은 많은 재해석이 요구되는 구조물의 동특성 설계 시에 전체계의 재해석 없이 변경되는 부분구조의 재해석만으로 전체 응답을 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있어 많은 연구가 이루어져 왔다. 부분구조 합성법은 부분구조를 표현하는 방법에 따라서 모드합성법(component mode synthesis method), 전달함수 합성법(FRF-based substructuring method), 특성행렬합성법 등으로 나눌 수 있으며[5] 자동차, 선박 등의 대형/복합 구조물의 해석에 유용하게 쓰이고 있다[6, 7]. 특히

* 국민대학교 자동차공학 전문대학원

** 대구대학교 자동차/산업/기계 공학부

전달함수를 이용한 부분구조 합성법은 해석적인 방법으로 접근이 어려운 동적 시스템에 대하여 중중파수 대역까지 시험적인 방법을 병행하여 해석이 가능하다는 장점이 있다.

부분구조합성법에 기초한 민감도 해석법은 아직 연구가 활발하게 이루어지고 있지 않은 편이다. Santos 등[8]은 모드합성법에 기초한 조인트 강성에 대한 민감도 공식을 이용하여 유한요소모델의 개선작업을 하였으며 Heo 등[9]은 모드합성법에 대한 민감도 해석법을 제안하고 특성을 연구하였다. 또 Lallemand 등[10]도 모드합성법의 틀에서 준해석적인 민감도 해석법을 제안하였다. 지태한 등[11]과 Chang 등[12]은 전달함수 합성법의 틀에서 전체 시스템의 전달함수 행렬을 부분구조의 전달함수로 미분 하는 방법을 통해서 민감도 해석을 행하고 구조물의 동특성 변경에 응용하였다.

본 연구에서는 구조계의 주파수응답함수를 이용한 부분구조합성법의 틀을 이용하여 새로운 설계민감도 해석법을 제시하고 간단한 수치예제를 통하여 민감도공식을 검증하였다.

2. 전달함수합성법을 이용한 민감도해석

2.1 전달함수 합성법

부분구조합성법에 기초한 민감도해석을 수행하기 위하여 전달함수합성법의 개요를 살펴본다. 먼저 [Fig. 1]과 같은 부분 구조계를 고려한다. 부분구조 A 와 B 는 스프링과 댐퍼로 연결되어 있으며 외력 F 가 부분구조 A 에 작용하고 있다고 가정한다. 여기서 관심 있는 응답점은 부분구조 B 에 위치한 점 r 이고 k_i 와 C_i 는 i 번째 연결요소의 스프링의 강성과 감쇄계수이다. 두 부분구조를 연결하는 경계영역에는 위와 같은 연결요소가 n 개 있다고 가정한다. 그리고 아래의 식부터는 텐서 표기(tensor notation)를 행하여 중복되는 첨자는 해당 변수의 차원수까지의 합을 의미한다. 이와 같은 표기법을 따르면 부분구조 A 에서 경계영역에서의 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}_i^A = \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{R}_j + \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{F}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

여기서 \mathbf{x}_i^A 는 부분구조 A 에서 i 번째 연결점의 변위를 의미하며 \mathbf{H} 는 주파수응답함수(frequency response function)을 표시하고 하첨자 i, j 와 상첨자 A 는 각각 응답점, 힘 입력점 및 부분구조의

이름을 의미한다. 기호 \mathbf{R}_j 는 j 번째 연결점의 반력을 의미하고 \mathbf{H}_{ij}^A 는 외력을 단위 힘으로 대체했을 때 부분구조 A 에서 i 번째 연결점의 주파수 응답함수이다. 부분구조 B 에 대해서 연결영역에서의 변위를 생각하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}_i^B = -\mathbf{H}_{ij}^B \mathbf{R}_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

위식에서 반력은 식(1)과 방향을 일치시키기 위하여 부호가 고려 되었음을 유의하여야 한다. 부분구조 B 의 응답점 r 에서의 변위는 비슷한 방법으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}_r^B = -\mathbf{H}_r^B \mathbf{R}_i \quad (3)$$

두개의 부분구조는 [Fig.1]에서 볼 수 있듯이 탄성 스프링과 댐퍼로 연결이 되어 있다. 그러므로 두 부분구조의 결합을 위해서는 다음과 같은 적합조건을 만족하여야 한다.

$$\mathbf{H}_{ij}^i \mathbf{R}_j = \mathbf{x}_i^B - \mathbf{x}_i^A, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\text{where } \mathbf{H}_{ij}^i = \begin{cases} \frac{1}{(k_i + \sqrt{-1\omega C_i})}, & \text{if } i = j \\ = 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

위식에서 ω 는 각속도(angular velocity)를 의미한다. 식(1)과 식(2)를 식(4)에 대입하면 다음과 같이 두 부분구조 사이에 발생하는 반력을 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_i = -\mathbf{D}_{ij}^{-1} \mathbf{H}_{ij}^A \mathbf{F}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

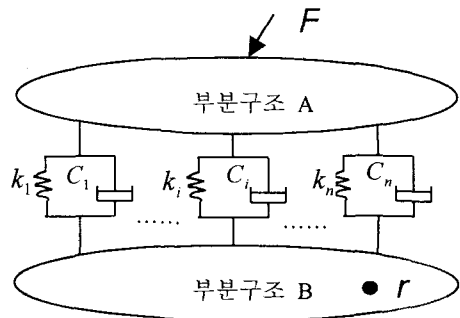


Fig. 1 Substructure system

여기서

$$D_{ij} = H_{ij}^I + H_{ij}^A + H_{ij}^B \quad (6)$$

최종적으로 부분구조 B 에 위치한다고 가정한 관심점 r 에서의 응답은 식(5)를 식(3)에 대입하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x_r^B = H_n^B D_{ij}^{-1} H_{ij}^A F \quad (7)$$

식(7)을 이용하면 부분구조의 주파수응답함수와 연결상태의 정보만으로 전체 시스템의 응답을 계산할 수 있으며 이러한 방법이 전달함수를 이용한 부분구조합성법이다. 식(7)에 사용된 주파수응답함수는 유한요소 해석에 의해서 구할 수 있음은 물론 시험에 의해서 구한 주파수응답함수도 사용할 수 있으며 두 방법을 혼합한 형태로도 사용되어질 수 있다.

2.2 민감도해석

설계변수 변화에 의한 응답함수의 변화량을 알기 위해서는 설계변수에 대한 응답함수의 기울기 함수(gradient function)를 알아야 하며 이에 대한 해석이 곧 설계 민감도 해석(design sensitivity analysis)이다. 설계민감도 해석의 첫 단계는 설계변수의 변화에 대한 응답의 변화를 기지의 함수로 표현하는 것이다. 이를 위한 첫번째 단계로 식(3)을 설계변수에 대해서 미분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dx_r^B}{db} = -\frac{\partial H_n^B}{\partial b} \cdot R_i - H_n^B \cdot \frac{\partial R_i}{\partial b} \quad (8)$$

여기서 b 는 설계변수를 의미한다. 위식에서 우변의 첫번째 미분 항은 하나의 부분구조 내에서의 주파수 응답함수에 대한 미분이므로 주파수응답함수를 알고 있다면 일반적인 주파수 응답함수에 대한 미분법으로부터 구할 수 있다[4, 13, 14]. 그러나 우변 두 번째항의 미분, $\partial R_i / \partial b$ 는 두 부분구조의 반력이 전체시스템의 특성에 따라 달라지므로 직접적으로 구할 수 없다. 미지의 값, $\partial R_i / \partial b$ 를 계산하기 위하여 식(5)를 다시 써보면 다음과 같이 된다.

$$D_{ij} R_j = -H_{ij}^A F \quad (9)$$

위식을 설계변수에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D_{ij} \frac{\partial R_j}{\partial b} = -\frac{\partial D_{ij}}{\partial b} R_j - \frac{\partial H_{ij}^A}{\partial b} F - H_{ij}^A \frac{\partial F}{\partial b} \quad (10)$$

위식을 살펴보면 우변의 모든 항은 계산 가능한 식으로 구성되어 있다. 그러므로 대수방정식을 풀면 설계변수 변화에 대한 반력의 변화량을 알 수 있다. 그리고 이를 위해서는 행렬 D_{ij} 의 역행렬의 계산이 필요하지만 이 역행렬은 두 부분구조의 연결영역에서의 반력을 계산하기 위한 역행렬과 동일함에 유의해야 할 필요가 있다. 최종적인 설계민감도 공식을 얻기 위하여 부분구조 A 에 작용하는 외력은 설계변수에 따라서 변하지 않는다고 가정하고 식(10)을 식(8)에 대입하면 다음과 같은 설계민감도 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx_r^B}{db} = -\frac{\partial H_n^B}{\partial b} \cdot R_i + H_n^B D_{ij}^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial D_{jk}}{\partial b} \cdot R_k + \frac{\partial H_{ij}^A}{\partial b} \cdot F \right\} \quad (11)$$

설계민감도 식(11)은 우변이 모두 계산 가능한 함수이기 때문에 수치적인 연산만으로 계산이 가능하다. 그리고 이 식은 주파수응답함수에 기반한 부분구조합성법을 시스템 응답을 계산하기 위해서 사용하는 경우 설계민감도 해석을 위해서 새로 계산해야 하는 항은 $\partial D_{jk} / \partial b$, $\partial H_{ij}^A / \partial b$, $\partial H_n^B / \partial b$ 뿐이다. 또한 부분구조합성법의 체계에서 해석을 수행하므로 하나의 분계를 수정하는 경우 변경되지 않는 분계에 대한 미분 값들은 0 이 되므로 많은 항의 계산이 필요하지 않게 된다. 그러므로 이와 같이 전달함수를 이용한 부분구조합성법의 틀에 맞게 개발된 설계민감도 해석방법을 이용하면 대단히 효율적으로 민감도 해석을 수행할 수 있다.

3. 수치 예제

유도된 설계민감도 공식을 수치적으로 검증하기 위하여 [Fig. 2]와 같은 사다리형 문제에 민감도 공식을 적용하였다. 사다리형 구조물은 4 개의 철재

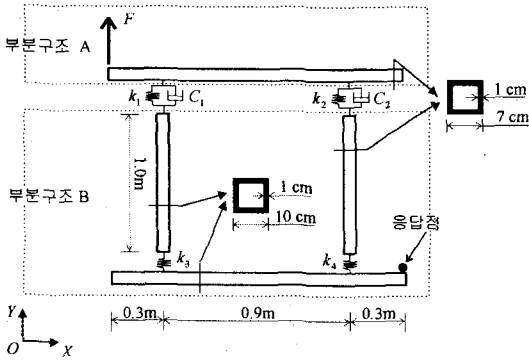


Fig. 2 Ladder structure problem

빔으로 이루어져 있으며 각 철재빔을 탄성 스프링과 점성 댐퍼가 연결하고 있다. 먼저 구조물의 하단부에 있는 응답점의 응답을 전달함수합성법으로 구하기 위하여 사다리 구조물을 [Fig. 2]와 같이 두 개의 부분구조로 나누었다. 두 부분구조는 스프링과 댐퍼에 의해서 연결된다. 각 부분구조는 48 개의 보요소와 4 개의 스프링요소를 사용하여 유한요소 모델링 되었으며 이 때 사용된 스프링 상수 값과 댐퍼의 감쇄계수는 각각 $1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ 와 $1.0 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 였다. 각 부분구조의 유한요소 모델을 이용하여 식(7)에 필요한 각 분계의 주파수 응답함수를 계산하였으며 유한요소해석의 수행은 상용 소프트웨어인 MSC/NASTRAN 을 이용하였다. 단위힘을 가진점에 가했을 때 응답점에서 전달함수합성법으로 계산된 주파수 응답함수를 [Fig. 3]에 보였다. 전달함수합성법에 의한 계산과의 비교를 위하여 전체 시스템을 하나의 유한요소 모델로 모델링한 경우의 계산값과 비교하였다. [Fig. 3]에서 보듯이 두 결과는 전 주파수 영역에서 잘 일치하고 있다.

설계민감도 해석을 행하기 위하여 두 부분구조를 연결하고 있는 두 개의 스프링 상수를 설계변수로 정하여 설계변수에 대한 가속도 응답의 민감도를 식(11)을 사용하여 구하였다. 이 경우 설계민감도 식(11)에서 $\partial D_{ij} / \partial b$ 항만이 영이 아니며 $\partial H'_{ij} / \partial b$ 와 같게 된다. $\partial H'_{ij} / \partial b$ 는 또한 식(4)의 H'_{ij} 에 관한 해석식으로부터 해석적으로 구할 수 있다. 민감도 해석 결과는 점성 댐퍼의 영향으로 복소수양이 되며 민감도 해석의 정확도를 비교하기 위하여 유한차분법(finite difference method)의 결과와 비교하였다. 여기서 사용된 유한차분법은 전방위법으로 다음과 같다.

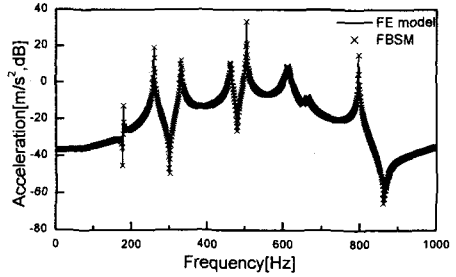
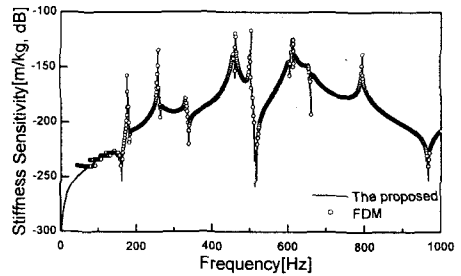
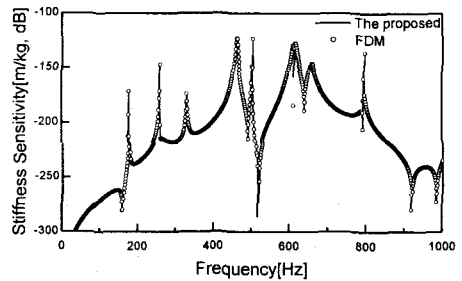


Fig. 3 Comparison of FRFs



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 4 Sensitivities of the responses w.r.t. k_1

$$\frac{dx_r}{db} \cong \frac{x_r(b + \Delta b) - x_r(b)}{\Delta b} \quad (12)$$

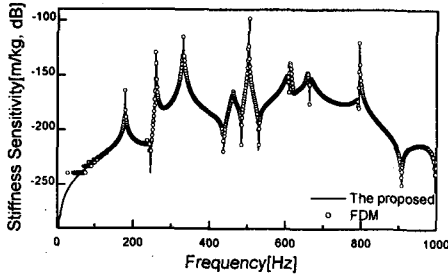
여기서 Δb 는 설계변수의 섭동양이다. 각 설계변수에 대한 민감도 해석의 결과는 [Fig. 4]와 [Fig. 5]에 나타내었다. 유한차분법의 설계변수 섭동양은 현재값의 0.1%를 주었다. 그림에서 보듯이 본 논문에서 제시한 설계민감도 해석법은 유한차분법의 결과와 잘 일치하여 정식화의 유용성을 보여준다. 더욱이 [Fig. 4(a)]와 [Fig. 5(a)]를 보면 유한차분법

후 기

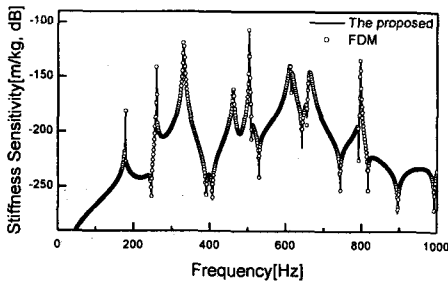
본 연구의 일부는 BK21 사업에 의해서 지원되었으며 이의 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) E.J Haug, K.K Choi. and V.Komkov, 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York.
- (2) R.L. Fox and M.P. Kapoor, 1968, Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, *AIAA Journal*, Vol.6, No. 12, pp.2426~2429.
- (3) R.B. Nelson, 1976, Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives, *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (4) R.M. Lin and M.K. Lim, 1997, Derivation of Structural Design Sensitivities from Vibration Test Data, *Journal of Sound and Vibration*, 201(5), pp.613~631.
- (5) 長松昭男, 大態政明, 1991, 部分構造合成法, 培風館.
- (6) A. T. M. J. M. Huizinga, D. H. Campen and A. Kraker, 1997, Application of Hybrid Frequency Domain Substructuring for Modeling and Automotive Engine Suspension, *J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 304-310.
- (7) K. Wyckaert, M. Brughmans, C. Zhang and R. Dupont, 1997, Hybrid Substructuring for Vibro-Acoustical Optimisation: Application to Suspension - Car Body Interaction, SAE Paper No. 971944.
- (8) Santos and J.R.F. Arruda, 1990, Finite Element Model Updating Using Frequency Response Functions and Component Mode Synthesis, *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, pp.1195~1201.
- (9) J.H. Heo and K.F. Ehmann, 1991, A Method for Substructural Sensitivity Synthesis, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, 201-208.
- (10) B. Lallemand, P. Level, H. Duveau and B. Mahieux, 1999, Eigensolutions Sensitivity analysis using a substructuring method, *Computer & Structures*, Vol. 71, pp.257~265.
- (11) 지태한, 박영필, 1996, 부분구조 응답함수 감도법을 이용한 동적구조변경, *대한기계학회논문집(A)*, 제 20 권 제 12 호, pp.3782~3791.
- (12) K.-J., Chang and Y.-P. Park, 1998, Substructural Dynamic Modification Using Component Receptance Sensitivity, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12, No. 4, pp.525~541.
- (13) T. Ting, 1993, Design Sensitivity Analysis of Structural Frequency Response, *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 10, pp1965~1967.
- (14) I. Hagiwara and K. Nagabuchi, 1986, Sensitivity Analysis for Structural Frequency Response Characteristics, *JSME Transactions(C)*, Vol. 54, No.497.



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 5 Sensitivities of the response w.r.t. k_2

의 경우 낮은 주파수 대역에서 결과의 불안정성을 보이고 있는 반면 제시된 설계민감도법은 안정된 민감도 해석결과를 보이고 있다.

4. 결론

전달함수합성법은 시험 또는 해석으로부터 얻은 각 분계의 주파수응답함수를 사용하여 동적시스템의 응답을 해석할 수 있는 유용한 방법이다. 본 논문에서는 이러한 전달함수합성법의 장점을 살리는 동시에 설계변수 변화에 따른 동적시스템의 응답변화를 예측할 수 있는 전달함수를 이용한 부분구조해석의 틀에 알맞은 설계민감도 해석법을 제시하였다. 유도된 민감도 공식은 하나의 부분구조만을 변경할 경우 다른 부분구조에 대한 계산은 불필요하다는 부분구조합성법의 장점을 유지하는 것은 물론 부분구조해석 시 사용된 시스템 행렬을 사용하고 외력항만을 추가로 계산하여 민감도 해석을 수행하기 때문에 효율적임을 간단한 수치예제를 통하여 설명하였다.