

회전 외팔보에서의 유한요소 연구

정진태* · 유흥희** · 김강성***

A Finite Element Analysis for a Rotating Cantilever Beam

Jintai Chung and Hong Hee Yoo

Key Words : Rotating Cantilever Beam (회전외팔보), Stretch Deformation(길이방향 인장변위), Finite Element Method (유한요소법), Natural Frequency Variation (고유진동수 변화)

Abstract

A finite element analysis for a rotating cantilever beam is presented in this study. Based on a dynamic modelling method using the stretch deformation instead of the conventional axial deformation, three linear partial differential equations are derived from Hamilton's principle. Two of the linear differential equations show the coupling effect between stretch and chordwise deformations. The other equation is an uncoupled one for the flapwise deformation. From these partial differential equations and the associated boundary conditions, are derived two weak forms: one is for the chordwise motion and the other is for the flapwise motion. The weak forms are spatially discretized with newly defined two-node beam elements. With the discretized equations or the matrix-vector equations, the behaviours of the natural frequencies are investigated for the variation of the rotating speed.

1. 서론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 회전의 팔보의 진동에 대한 연구를 수행하였다. Hamilton의 원리를 이용, 회전외팔보에 대한 선형 편미분 방정식 형태의 지배방정식을 유도하였다. 유도 과정에서 축방향 변위 대신에 면내 및 면외방향 변위, 그리고 길이방향 인장변위를 사용하였다. 편미분 방정식과 경계조건에서 면내방향과 면외방향 운동에 대한 weak form 또는 variational form 을 유도하였다. weak form 을 새롭게 정의된 두 절점 요소를 이용하여 공간상에서 이산화하면 면내 및 면외방향에 대한 일련의 상미분 방정식이 얻어진다. 상미분 방정식들로서 회전각속도의 변화에 따라 회전외팔보의 고유 진동수의 변화를 조사하였다.

2. 운동 방정식

Fig.1 에서 길이가 L 인 외팔보가 반지름이 a 인 강체축의 O 점에 고정되어 있다. 외팔보는 Euler 보로서 재질은 균질, 균일하며 등방성이다. 강체축은 대칭축에 대해 회전각속도 Ω 로 회전한다. Fig.1 에서 곧고 구부러진 보들은 변형 전과 후의 보들을 나타낸다. 직교단위벡터 i, j, k 는 축과 함께 회전한다. i 는 변형전의, j 는 축의 접선, k 는 축 방향이다. 직교 좌표계를 사용하면 i, j, k 방향의 보의 변형은 점 P^* 가 점 P 로 이동할 때 일반적으로 축변위 u , 면내방향 변위 v 그리고 면외방향 변위 w 로 각각 표현된다.

서론에서 언급한 바와 같이 길이방향 인장변위 s 의 사용은 축변위 u 의 사용보다 유리하다. 참고문헌 (4)로부터 u 는 다음과 같다.

$$u = s - h_v - h_w \tag{1}$$

* 한양대학교 공과대학 기계공학과

** 한양대학교 공과대학 기계공학부

*** 한양대학교 대학원 정밀기계공학과 석사과정

$$h_v = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad h_w = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$\dot{u} = \dot{s} - \dot{h}_v - \dot{h}_w \quad (3)$$

$$\dot{h}_v = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} dx, \quad \dot{h}_w = \int_0^x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} dx \quad (4)$$

식 (5)는 회전 외팔보가 Ω 로 회전할 때 운동 에너지이다. 속도 벡터 v_p 는 식 (6)과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L v_p \cdot v_p dx \quad (5)$$

$$v_p = (\dot{u} - \Omega v) i + [\dot{v} + \Omega(a + x + u)] j + \dot{w} k \quad (6)$$

식 (1), (3)을 (6)에 대입 후 식 (6)을 식 (5)에 대입 하면 식 (7)이 되고 변형에너지는 식 (8)로 표현된다. E 는 영의계수, I_y, I_z 는 y, z 축에 대한 면적 관성모멘트이다. E, A, I_y, I_z 는 상수로 가정한다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left\{ \dot{s} - \Omega v - (\dot{h}_v + \dot{h}_w) \right\}^2 + [\dot{v} + \Omega(a + x + s) - \Omega(h_v + h_w)]^2 + \dot{w}^2 dx \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} E \int_0^L \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (8)$$

운동방정식은 Hamilton의 원리를 적용함으로써 식(9)로 유도되고 t_1 와 t_2 는 임의의 시간, \mathcal{L} 은 Lagrange 밀도 함수이다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \mathcal{L} dx dt = 0 \quad (9)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho A \left\{ [\dot{s} - \Omega v - (\dot{h}_v + \dot{h}_w)]^2 + [\dot{v} + \Omega(a + x + s) - \Omega(h_v + h_w)]^2 + \dot{w}^2 \right\} - \frac{1}{2} E \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] \quad (10)$$

밀도함수에 변분을 취하고 식 (9)를 부분적분하면 $\delta s, \delta v$ 와 δw 에 대해서 피적분자의 항목으로 묶여진다. $\delta s, \delta v, \delta w$ 의 계수로부터 다음의 운동방정식을 얻게 된다.

$$\rho A \left[\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 (a + x) \quad (11)$$

$$\rho A \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s - 2\Omega \frac{\partial}{\partial t} (h_v + h_w) - \dot{\Omega} (h_v + h_w) \right] + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \int_L^x \rho A \left[\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (a + \xi + s) - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] d\xi \right\} \quad (12)$$

$$= -\rho A \dot{\Omega} (a + x), \quad \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \int_L^x \rho A \left[\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (a + \xi + s) - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] d\xi \right\} = 0 \quad (13)$$

(11)-(13)은 비선형 편미분 방정식이고 y, z 방향으로의 비보존 작용력을 고려하고 식 (11)-(13)을 선형화하면 선형 편미분 방정식들을 얻게 된다.

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 (a + x) \quad (14)$$

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2)] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = p_v - \rho A \dot{\Omega} (a + x), \quad (15)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2)] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = p_w \quad (16)$$

p_v, p_w 는 y, z 방향에서의 단위 길이당 작용력이고 식 (14)와 (15)는 서로 연성되어 있는 반면 식 (16)은 다른 방정식과 연성되어 있지 않다. 식 (14)와 (15)에 의한 운동은 면내방향 운동, 식 (16)에 의한 운동은 면외방향 운동이라고 칭한다. 식 (14)-(16)에 상응하는 경계조건들은 다음과 같은데 식 (17)은 essential 경계조건이고 식 (18)은 natural 경계조건이고 여기에 초기 조건들이 주어진다

$$s = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ at } x = L \quad (18)$$

3. 유한요소해석

본 논문에서 편미분 방정식 (14)-(16)들을 풀기 위해 유한요소법을 이용한다. 편미분 방정식과 경계조건으로부터 weak form 또는 variational form 이 유도되고 표준 유한요소해석에 의해 weak form 을 공간상에서 이산화하여 상미분 방정식과 초기 조건으로 이루어진 초기치 문제를 유도한다. 유한요소법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (2)와 (3)에 설명되어 있다. Weak form 을 유도 하기 전에 시도함수와 가중 함수를 정의할 필요가 있다. 일차원 문제에서 Hilbert 공간인 H^1 은 다음과 같이 정의된다. 식 (19)는 변형에너지가 해가 Hilbert 공간에서의 함수로 표현되어 지면 bounded 되는 것을 의미한다. 시도함수는 모든 경계조건, 즉 essential 과 natural 경계조건을 만족하는 Hilbert 공간 H^1 에서의 함수로 정의되어 진다. 이는 시도함수가 일종의 비교함수라는 것을 의미하며 식 (14)-(18)의 각각의 변위들은 다음과 같이 정의 된다. 함수공간

$$H^1 = \left\{ v \mid v \text{ is continuous on } [0, L], \partial v / \partial x \text{ is piecewise continuous, and } \int_0^L (\partial v / \partial x)^2 dx < \infty \right\} \quad (19)$$

$$s \in V_s = \left\{ s \mid s \in H^1, s(0) = \partial s / \partial x|_{x=0} = 0 \right\} \quad (20)$$

$$v, w \in V_{vw} = \left\{ v \mid v \in H^1, \partial v / \partial x \in H^1, v(0) = \partial v / \partial x|_{x=0} = \partial^2 v / \partial x^2|_{x=L} = \partial^3 v / \partial x^3|_{x=L} = 0 \right\} \quad (21)$$

V_s, V_{vw} 은 시도함수공간이라고 하며 식 (21)은 변위 v, w 와 도함수가 Hilbert 공간이 됨을 의미한다. 이는 변위와 기울기가 둘 다 유한요소법의 보 이론에서 자유도처럼 간주되기 때문이다. 가중함수 또한 essential 경계조건이 규정된 곳에서 경계값들이 0 이 되는 H^1 공간에서 함수로 정의된다. 그러므로, 길이방향 인장에서 가중 함수는 면내방향과 면외방향 변위가 다음과 같이 정의 된다.

$$\bar{s} \in \bar{V}_s = \left\{ \bar{s} \mid \bar{s} \in H^1, \bar{s}(0) = 0 \right\} \quad (22)$$

$$\bar{v}, \bar{w} \in \bar{V}_{vw} = \left\{ \bar{v} \mid \bar{v} \in H^1, \partial \bar{v} / \partial x \in H^1, \bar{v}(0) = \partial \bar{v} / \partial x|_{x=0} = 0 \right\} \quad (23)$$

Weak form 은 strong form 로부터 유도된다. 식 (14)와 (15)는 서로 연성되어 있고 식 (16)은 연성되어 있지 않다. 본 논문에서는 면내방향, 면외방향 운동에 대한 두 가지 weak form 을 유도한다. 면내방향 운동의 weak form 은 각각 \bar{s}, \bar{v} 를 식 (14)와 (15)에 곱하고 방정식들을 더한다음 결과 합 방정식을 길이 L 에 걸쳐서 부분적으로 적분함으로써 얻어진 면내방향 운동의 Weak Form 은 식 (24)으로 표현 된다. 유사한 방법으로 면외방향 운동에서의 Weak Form 은 \bar{w} 를 방정식 (16)에 곱하고 방정식을 부분 적분하면 식 (25)가 유도 된다.

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^L \left[\bar{s} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) \right. \\ & \left. + \bar{v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) \right] dx \\ & + \int_0^L \left(EA \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + EI_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \rho A \Omega^2 \int_0^L \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ & = \int_0^L \left[\rho A \Omega^2 (a+x) \bar{s} + [p_v - \rho A \dot{\Omega} (a+x)] \bar{v} \right] dx. \\ & \rho A \int_0^L \bar{w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + EI_y \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\ & + \rho A \Omega^2 \int_0^L \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (25) \\ & = \int_0^L \bar{w} p_w dx. \end{aligned}$$

주의할 점은 요소에서 Local Description 의 변형에 중점을 둔다는 것이다. 외팔보는 Fig 2 에 보이다시피 N 개의 두 절점 요소로 이산화 되었고 보의 위와 아래의 숫자들은 각각 요소와 절점의 수를 나타낸다. 요소 e 에서는 절점 수 e 와 $e+1$ 로 정의된다. 길이방향 인장, 면내방향, 면외방향 변위는 식 (26) 같이 각각 선형이고 3 차 다항식인 것처럼 근사화 될 수 있다. a_i 는 길이방향 인장, 면내방향, 면외방향 변위와 절점에서의 기울기에 의해서 결정되는 계수이다. 절점 e 에서 길이방향 인장 변위는 s_e , 면내방향, 면외방향 변위는 v_e, w_e , 기울기는 θ_e, ψ_e 로 각각 표시한다

$$\begin{aligned} s &= a_1 + a_2 x, v = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + ca_6 x^3 \\ w &= a_7 + a_8 x + a_9 x^2 + ca_{10} x^3 \\ s(x_e) &= s_e, v(x_e) = v_e, w(x_e) = w_e, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} s(x_{e+1}) &= s_{e+1}, \quad v(x_{e+1}) = v_{e+1}, \quad w(x_{e+1}) = w_{e+1}, \\ v_{,x}(x_{e+1}) &= \theta_{e+1}, \quad w_{,x}(x_{e+1}) = \psi_{e+1} \end{aligned} \quad (27)$$

절점에서의 변위는 식 (26),(27)과 같은 식으로 표현된다. 따라서 방정식 (26)은 (28)같이 쓰여진다. $\mathbf{d}_e^{sv}, \mathbf{d}_e^w$ 은 요소 변위 벡터이고 $\mathbf{N}_s, \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_w$ 은 형태 함수벡터, h_e 은 요소 크기가 된다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}_s^T \mathbf{d}_e^{sv}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{N}_v^T \mathbf{d}_e^{sv}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{N}_w^T \mathbf{d}_e^w \quad (28)$$

$$\mathbf{d}_e^{sv} = \{s_e, v_e, \theta_e, s_{e+1}, v_{e+1}, \theta_{e+1}\}^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{d}_e^w = \{w_e, \psi_e, w_{e+1}, \psi_{e+1}\}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_v &= \left\{ 0, (x-x_{e+1})^2(2x-3x_e+x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ &\quad (x-x_e)(x-x_{e+1})^2/h_e^2, 0, \\ &\quad \left. -(x-x_e)^2(2x+x_e-3x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ &\quad \left. (x-x_e)^2(x-x_{e+1})/h_e^2 \right\}^T \\ \mathbf{N}_w &= \left\{ (x-x_{e+1})^2(2x-3x_e+x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ &\quad (x-x_e)(x-x_{e+1})^2/h_e^2, \\ &\quad \left. -(x-x_e)^2(2x+x_e-3x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ &\quad \left. (x-x_e)^2(x-x_{e+1})/h_e^2 \right\}^T \end{aligned} \quad (30)$$

$$h_e = x_{e+1} - x_e \quad (31)$$

식 (28)에서 길이방향 인장과 면내방향 변위는 $s_e, v_e, \theta_e, s_{e+1}, v_{e+1}, \theta_{e+1}$ 의 자유도로 표현되고 면외방향 변위는 $w_e, \psi_e, w_{e+1}, \psi_{e+1}$ 의 자유도로 표현된다. Fig. 3 은 면내방향, 면외방향 운동에 대한 유한요소를 보여준다. 그와 달리 길이방향 인장, 면내방향, 면외방향 변위에서 가중함수는 식 (32)가 되고 $\boldsymbol{\eta}_e^{sv}$ 와 $\boldsymbol{\eta}_e^w$ 은 각각 6×1 과 4×1 로 임의의 열 벡터이다.

$$\bar{\mathbf{s}} = (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \mathbf{N}_s, \quad \bar{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \mathbf{N}_v, \quad \bar{\mathbf{w}} = (\boldsymbol{\eta}_e^w)^T \mathbf{N}_w \quad (32)$$

유한요소법의 해는 유한차원 함수공간에서 엄밀해는 무한차원 함수공간에서 구하게 된다. 식 (14)-(16)의 근사해를 찾기 위해서 식 (24)와(25)의 weak form 은 두 절점 요소를 사용한다. Fig. 2 에서 처럼 영역 $[0, L]$ 에서 부영역 $[x_e, x_{e+1}]$, $e=1, 2, \dots, N$ 으로 이산화한 후에 식 (28)과 (32)을 식 (24)와 (25)에 대입하면 이산화된 방정식으로 표현된다. 면내방향 운동에 대한 이산화된 방정식은 식 (33)과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^N (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \left\{ \mathbf{m}_e^{sv} \mathbf{d}_e^{sv} + 2\Omega \mathbf{G}_e^{sv} \mathbf{d}_e^{sv} \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathbf{k}_e^{sv} + \Omega^2 (\mathbf{s}_e^{sv} - \mathbf{m}_e^{sv}) + \dot{\Omega} \mathbf{G}_e^{sv} \right] \mathbf{d}_e^{sv} \right\} \\ &= \sum_{e=1}^N (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \mathbf{f}_e^{sv} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mathbf{m}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\mathbf{N}_s \mathbf{N}_s^T + \mathbf{N}_v \mathbf{N}_v^T) dx,$$

$$\mathbf{G}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\mathbf{N}_v \mathbf{N}_s^T - \mathbf{N}_s \mathbf{N}_v^T) dx,$$

$$\mathbf{k}_e^{sv} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EA \frac{d\mathbf{N}_s}{dx} \frac{d\mathbf{N}_s^T}{dx} + EI_z \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_v^T}{dx^2} \right) dx,$$

$$\mathbf{s}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{d\mathbf{N}_v}{dx} \frac{d\mathbf{N}_v^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{f}_e^{sv} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \rho A \Omega^2 (a+x) \mathbf{N}_s + [p_v - \rho A \Omega (a+x)] \mathbf{N}_v \right\} dx \quad (34)$$

면외방향 운동에서 이산화 된 방정식은 식 (35)로 유도된다. $\mathbf{m}_e^w, \mathbf{k}_e^w, \mathbf{s}_e^w, \mathbf{f}_e^{sv}$ 는 면외방향 운동에서 요소질량행렬, 요소강성행렬, 요소운동 유발행렬, 요소하중벡터가 되고 $\boldsymbol{\eta}_e^{sv}$ 와 $\boldsymbol{\eta}_e^w$ 은 요소행렬과 벡터들로 된 임의의 벡터이며 식 (33)와 (35)는 전체 방정식으로 표현된다. 면내방향 운동에 대한 전체 방정식은 식 (37)과 같다. 면내방향 운동에서 \mathbf{d}_{sv} 은 전체변위벡터이고 $\mathbf{M}_{sv}, \mathbf{G}_{sv}, \mathbf{K}_{sv}, \mathbf{S}_{sv}$ 들은 전체행렬들이고 \mathbf{f}_{sv} 은 전체 하중벡터이다.

$$\sum_{e=1}^N (\boldsymbol{\eta}_e^w)^T \left[\mathbf{m}_e^w \mathbf{d}_e^w + (\mathbf{k}_e^w + \Omega^2 \mathbf{s}_e^w) \mathbf{d}_e^w \right] = \sum_{e=1}^N (\boldsymbol{\eta}_e^w)^T \mathbf{f}_e^w \quad (35)$$

$$\mathbf{m}_e^w = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{N}_w \mathbf{N}_w^T dx,$$

$$\mathbf{k}_e^w = EI_y \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d^2 \mathbf{N}_w}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_w^T}{dx^2} dx,$$

$$\mathbf{s}_e^w = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{d\mathbf{N}_w}{dx} \frac{d\mathbf{N}_w^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{f}_e^w = \int_{x_e}^{x_{e+1}} p_w \mathbf{N}_w dx \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{sv} \ddot{\mathbf{d}}_{sv} + 2\Omega \mathbf{G}_{sv} \dot{\mathbf{d}}_{sv} + \\ &[\mathbf{K}_{sv} + \Omega^2 (\mathbf{S}_{sv} - \mathbf{M}_{sv}) + \dot{\Omega} \mathbf{G}_{sv}] \mathbf{d}_{sv} = \mathbf{f}_{sv} \end{aligned} \quad (37)$$

면외방향 운동에 대한 전체 방정식은 식 (40)과

같다. \mathbf{A} 는 조립 연산자이다. 면외방향 운동에서 \mathbf{d}_w 는 전체변위벡터이고, \mathbf{M}_w , \mathbf{K}_w , \mathbf{S}_w 은 전체 행렬이며, \mathbf{f}_w 은 전체하중벡터다. s_1, v_1, w_1, θ_1 와 ψ_1 은 외팔보에서 기지의 자유도 즉, 비활성 자유도이며, 활성 자유도로 구성된 식 (38)과 (41) 에는 포함되어 있지 않다.

$$\mathbf{d}_{sv} = \{s_2, v_2, \theta_2, s_3, v_3, \theta_3, \dots, s_{N+1}, v_{N+1}, \theta_{N+1}\}^T \quad (38)$$

$$\mathbf{M}_{sv} = \mathbf{A} \mathbf{m}_e^{sv}, \mathbf{G}_{sv} = \mathbf{A} \mathbf{g}_e^{sv}, \mathbf{K}_{sv} = \mathbf{A} \mathbf{k}_e^{sv}, \quad (39)$$

$$\mathbf{S}_{sv} = \mathbf{A} \mathbf{s}_e^{sv}, \mathbf{f}_{sv} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^{sv}$$

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{d}}_w + (\mathbf{K}_w + \Omega^2 \mathbf{S}_w) \mathbf{d}_w = \mathbf{f}_w \quad (40)$$

$$\mathbf{d}_w = \{w_2, \psi_2, w_3, \psi_3, \dots, w_{N+1}, \psi_{N+1}\}^T \quad (41)$$

$$\mathbf{M}_w = \mathbf{A} \mathbf{m}_e^w, \mathbf{K}_w = \mathbf{A} \mathbf{k}_e^w, \quad (42)$$

$$\mathbf{S}_w = \mathbf{A} \mathbf{s}_e^w, \mathbf{f}_w = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^w$$

4. 고유 진동수

보에서 x, y 축에 대한 면적 관성 모멘트는 같다고 가정, 무차원 변수들을 식 (43)과 (44)와 같이 간주한다. 식 (37), (40)의 운동방정식을 입증하기 위해서 면내방향, 면외방향의 고유진동수를 구하고 식 (37)과 (40)의 정상 상태해를 식(35)와 같이 가정한다. ω_{sv}, ω_w 는 면내방향, 면외방향 운동의 무차원 고유진동수이다. 일반작용력과 회전가속도를 무시함으로써 식 (45)를 (37)과 (40)에 대입해서 식(47)와 같은 고유치 문제를 유도하게 된다.

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{a}{L}, \quad \gamma = T\Omega,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_z}} \quad \lambda = T^2 \Omega^2 \quad (43)$$

$$T = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI_y}} \quad (44)$$

$$\mathbf{d}_{sv} = \mathbf{X}_{sv} e^{i\omega_{sv}\tau}, \quad \mathbf{d}_w = \mathbf{X}_w e^{i\omega_w\tau} \quad (45)$$

$$\{[\mathbf{K}_{sv} + \Omega^2(\mathbf{S}_{sv} - \mathbf{M}_{sv})] + 2i\omega_{sv}\Omega\mathbf{G}_{sv} - \omega_{sv}^2\mathbf{M}_{sv}\}\mathbf{X}_{sv} = 0 \quad (46)$$

$$\{(\mathbf{K}_w + \Omega^2\mathbf{S}_w) - \omega_w^2\mathbf{M}_w\}\mathbf{X}_w = 0 \quad (47)$$

고유진동수의 수렴특성을 고려하고 $\gamma = 0$ 이고

δ 와 α 값이 0 과 70 일 때를 계산한다. Table 1 에서 볼 수 있는 바와 같이 식 (46)에서 얻어진 면내방향 운동의 고유진동수는 요소의 수가 증가시엄밀한 값으로 수렴한다. 면외방향 운동의 경우에 식 (47)에서 의 고유진동수 수렴 특성들은 Table 1 의 면내방향 운동의 굽힘 모드의 값들과 같다.

제시된 유한요소법은 본 논문과 참고문헌 (4)에서 계산된 고유진동수를 비교함으로써 입증할 수 있다. 수렴여부 시험을 제외한 모든 계산에서 면내방향 과 면외방향 운동, 각각의 이산화된 모형에서 100 개의 두 절점 요소를 사용한다. Table 2 에서 $\alpha = 70$ 그리고 δ 와 γ 의 다양한 값들에 대해서 계산된 첫번째 면내방향 고유진동수는 Yoo 와 Shin⁽⁴⁾에서의 값들과 매우 유사함을 알 수 있다. 본 논문과 참고문헌 (4)사이에 고유진동수의 또 다른 비교는 무차원 고유진동수가 잘 일치하는 두 가지 방법에서 성립하는 Table 3 에서 주어진다.

Fig. 4 는 $\lambda = 0$, $\delta = 0.1$ 와 $\alpha = 70$ 일 때 무차원 회전각속도에 대한 무차원 고유진동수의 변화를 보여준다. 그래프에서 면내방향과 면외방향 운동 사이의 주된 차이점은 길이방향 인장모드와 발산의 불안정성이 존재한다는 것이다. Fig. 4(b)에서처럼 면외방향 굽힘 운동의 고유진동수들은 회전각속도와 함께 단조 증가한다. Fig. 4(a)는 면내방향 운동에서 길이방향 인장모드(S1 과 S2)가 굽힘모드(B1 과 B2)와 연성되어 있음을 보여준다. 이런 길이방향 인장모드와 굽힘모드사이의 연성작용은 Fig. 4(a)와 같이 잘 알려진 veering 현상을 낳게 된다. 또한 B1 으로 표시된 면내방향 굽힘모드의 첫번째 고유진동수가 특정한 회전각속도에서 0 이 된다는 것을 알 수 있다. 이 속도를 회전 외팔보의 임계속도라 부른다.

5. 결론

유한요소해석을 수행하여 종래의 축방향 변위 대신에 길이방향 인장변위를 이용하여 회전 외팔보에 대한 선형 편미분 방정식을 유도하였다. 편미분 방정식에서 길이방향 인장과 면내방향 변위는 서로 연성되어 있지만 면외방향 변위는 연성되어 있지 않다. 편미분 방정식과 경계조건으로부터 두 가지 weak form 이 유도 된다. 첫째는 면내방향 운동, 둘째는 면외방향 운동에 대한 것이다. 이런 운동에 대해 새롭게 정의된 두 절점 요소로써 weak form 을 공간상에서 이산화하여 행렬-벡터 방정식을 얻는다.

행렬-벡터 방정식으로써 고유치 해석을 수행하

였다. 고유진동수 해석은 길이방향 인장변위가 면 내방향 운동과 면외방향 운동사이에서의 차이점인 Veering 현상과 발산의 불안정성과 같은 결과를 낳는다는 것을 보여준다.

참고문헌

- (1) Kane, T. R., Ryan, R. R. and Banerjee, A. K., 1987, "Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, pp. 139-151.
- (2) Johnson, C., 1987, "Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method," Cambridge: Cambridge University Press.
- (3) Hughes, T. J. R., 1987, "The Finite Element Method," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.
- (4) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration analysis of rotating cantilever beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, pp.807-828.

Table 1. Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when $\delta = \gamma = 0$ and $\alpha = 70$.

No. of element	Bending modes			
	1 st	2 nd	3 rd	4 th
20	3.5160	22.0345	61.6973	120.7686
40	3.5160	22.0345	61.6973	120.9024
60	3.5160	22.0345	61.6972	120.9033
80	3.5160	22.0345	61.6972	120.8444
100	3.5160	22.0345	61.6972	120.9019
Exact	3.5160	22.0345	61.6972	120.9019

No. of element	Stretching mode	
	1 st	2 nd
20	110.3946	417.7725
40	109.9628	387.0572
60	109.9590	331.4177
80	109.9576	363.8172
100	109.9569	330.8796
Exact	109.9557	329.8672

Table 2. Comparison of the first dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when $\alpha = 70$.

δ	γ	($N = 100$)	Ref. (4)
0	2	3.6196	3.6196
	10	4.9700	4.9703
	50	7.3337	7.5540
1	2	4.3978	4.3978
	10	13.0482	13.0494
	50	41.2275	41.3791
5	2	6.6430	6.6430
	10	27.2660	27.2761
	50	74.0031	74.1949

Table 3. Comparison of the first and second dimensionless natural frequencies for the flapwise motion when $\delta = 0$ and $\alpha = 70$.

γ	First natural frequency		Second natural frequency	
	($N = 100$)	Ref. (4)	($N = 100$)	Ref. (4)
0	3.5160	3.5160	22.0345	22.0345
1	3.6816	3.6816	22.1810	22.1810
2	4.1373	4.1373	22.6149	22.6149
3	4.7973	4.7973	23.3203	23.3203
4	5.5850	5.5850	24.2733	24.2734
5	6.4495	6.4496	25.4461	25.4461
6	7.3604	7.3604	26.8091	26.8092
7	8.2996	8.2997	28.3341	28.3342
8	9.2568	9.2569	29.9954	29.9956
9	10.2257	10.2258	31.7705	31.7709
10	11.2023	11.2025	33.6404	33.6409

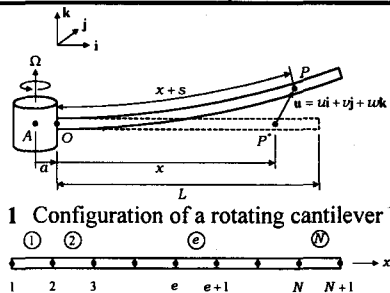


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam.

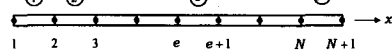


Fig. 2 Element and node numbers of a finite element model.

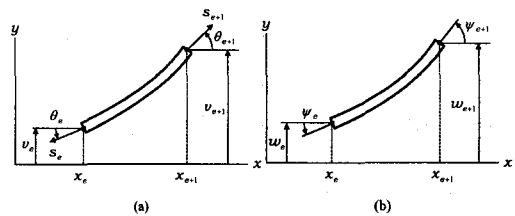


Fig. 3 Finite elements for (a) the chordwise motion and (b) the flapwise motion.

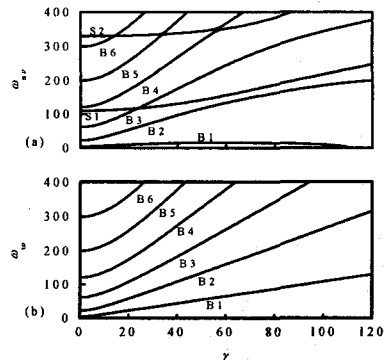


Fig. 4 Variation of the dimensionless natural frequencies for the dimensionless rotating speed γ when $\lambda = 0$, $\delta = 0.1$ and $\alpha = 70$: (a) the chordwise motion; and (b) the flapwise motion.