

Progressive Multi-Leaf Spring 의 비선형 강성해석 법

김성수* · 문원규** · 유영일***

An Efficient Method for Calculating Nonlinear Stiffness of the Progressive Multi-Leaf Spring

SungSoo Kim, WonKyu Moon and YoungIl Yoo

Key Words : Progressive Multi-Leaf Spring(프로그레시브 겹 판 스프링), Nonlinear Stiffness(비선형 강성), Deflection of Curved-Cantilever Beams(굽은 외팔 보의 변위), Deflection of Straight-Cantilever Beams(직선 보의 변위), Stiffness Transition(강성전이)

Abstract

An efficient method for calculating the nonlinear stiffness of the Progressive Multi-Leaf Spring is developed and evaluated. It utilizes the interaction between the main and help spring that induces the nonlinearity. The main and the help springs are modeled as multi-leaf cantilever beams, and, then, they are integrated as one by connecting the two models for each side of the Progressive Multi-Leaf Spring at the center-bolt. The results from the developed model are evaluated by use of the commercial FEA program, ABAQUS. The nonlinear spring coefficients calculated by FEM analysis yield the numbers very close to the numbers calculated for the spring coefficients by used of the developed method. From the comparative evaluations, the developed method is accurate enough and very efficient in calculation time for evaluating the nonlinear spring property of the Progressive Multi-Leaf Spring.

<p>E :스프링 재질의 탄성계수 (21,090 kg/mm^2)</p> <p>I_{z1}, I_{z2} :주스프링 중 1 번, 2 번, 3 번 판으로 구성된 부분과 1 번, 2 번 판으로 구성된 부분의 단면관성모멘트</p> <p>I_{z3} :보조 스프링의 단면관성모멘트</p> <p>I_{zeq1}, I_{zeq2} :주스프링 중 1 번, 2 번, 3 번으로 구성된 부분과 1 번, 2 번 판으로 구성된 부분의 등가 단면관성모멘트</p> <p>I_{zeq3} :보조 스프링의 등가 단면관성모멘트</p> <p>L_1, L_3 :주스프링과 보조 스프링의 center-bolt 에서 선단까지의 거리</p> <p>L_2 :주스프링 중 center-bolt 에서 1 번, 2 번,</p>	<p>기호설명</p> <p>ρ_1, ρ_2 :3 번 판으로 구성된 부분까지의 거리 주스프링과 보조 스프링의 변형 전 곡률반경</p> <p>$y_1(x), y_3(x)$:주스프링과 보조 스프링의 변형 전 형상을 나타내는 함수</p> <p>$\delta_1(x), \delta_3(x)$:외부하중 작용 시 접촉점까지의 주스프링과 보조 스프링 변위를 나타내는 함수</p> <p>f_c :주스프링과 보조 스프링간의 접촉력</p> <p>x_c :스프링의 center-bolt 에서 주스프링과 보조 스프링간의 접촉점까지의 거리</p> <p>$span$:변형 전 주스프링의 전장</p> <p>L_L, L_R :center-bolt 를 중심으로 한 주스프링 좌·우의 길이</p> <p>m, n :주스프링의 좌·우 양끝을 잇는 직선의 기울기와 y 절편</p>
--	--

* 포항공과대학교 대학원 기계공학과
 ** 회원, 포항공과대학교 기계공학과
 *** (주)현대자동차 기술연구소

1. 서론

겹 판 스프링(multi-leaf spring)은 여러 장의 긴 띠 모양의 판을 쌓아 만든 것으로, 스프링으로 작용을 할 때 스프링의 강성과 더불어 판간 마찰을 감쇄력으로 제공하는 비선형적인 특성을 가진 기계요소이다. 따라서 새로운 장치를 첨가하지 않고도 외부에서 들어오는 진동을 효율적으로 줄일 수 있고 또한 차량을 지지하는 구조물로의 역할을 겸할 수 있기 때문에 상용자동차의 현가장치로 널리 사용되고 있다.

지금까지의 겹 판 스프링의 강성에 대한 연구를 살펴보면, Wahl 과 Faires, Spotts, Juvinall 등은 스프링 변위에 대한 간단한 수식⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾을, 정선모와 송지복 등은 스프링 설계에 널리 사용되고 있는 방법인 전개법과 선단법을 소개하였다⁽⁵⁾⁻⁽⁶⁾. 또한 Imai 와 Mikaila, Rowland 등은 단순 보 이론을 적용하여 큰 변형을 하는 스프링에 대해 근사적 해석⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾을 하였으나, 이들은 모두 스프링의 초기곡률과 변형 시 각 판 사이에서 발생하는 항력이나 마찰 등의 비선형적인 요인을 무시한 근사 이론들이다. 비선형성을 포함한 겹 판 스프링의 특성에 대한 연구로는, E. Zahai 가 쿨롱의 마찰법칙으로 판간 마찰을 모델링하고 이에 새로운 반복과정을 도입하여 변형 시 판사이의 비선형적인 접촉문제를 상용 유한요소해석 프로그램(ANSYS)을 이용하여 수치적으로 계산을 하였다⁽¹⁰⁾. 그리고 고영호와 김기중 등은 각 판의 상호작용을 계면요소(interface element)로 모델링하고 이를 상용 유한요소해석 프로그램(ANSYS)을 이용하여 계산함으로써 판간 마찰을 고려한 스프링의 정확한 강성을 구하였다⁽¹¹⁾⁻⁽¹²⁾.



Fig. 1 Progressive Multi-Leaf Spring

본 논문의 대상인 Progressive Multi-Leaf Spring 은 Fig.1 과 같이 주스프링(Main Leaf Spring)과 보조 스프링(Help Leaf Spring)으로 나뉘어져 있어, 적은 하중에서는 주스프링만 작용하다 임계하중 이상이 되면 보조 스프링이 주스프링을 보완하도록 만들어진 겹 판 스프링의 일종으로 강성의 천이(transition)를 갖는, 즉 비선형적인 강성특성을 지닌 스프링이다. 따라서 스프링의 강성변화를 잘 활용하면 승차감을 높이는 효과를 거둘 수 있다.

차량의 설계 시 승차감 해석에 의해 요구되는 스프링의 두 가지 강성(천이가 일어나기 전의 강성과 천이가 일어나 보조 스프링이 역할을 할 때의 강성)과 천이구간이 결정되면 이에 맞추어 스프링을 설계할 수 있어야 하므로 빠른 해석방법이 매우 중요하며, 또한 곧바로 설계에 이어질 수 있는 해석방안이 필요하다. 물론 상용 유한요소해석 프로그램을 사용하면 쉽진 않지만 비선형적인 특성을 구할 수 있다. 그러나 이는 시간적으로나 경제적으로 굉장히 많은 비용이 필요하므로 Progressive Multi-Leaf Spring 의 비선형적인 강성특성을 다루는 저비용·고효율 해석방법이 필수적이라 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 Progressive Multi-Leaf Spring 의 비선형적인 강성특성을 고려한 해석방안을 제시하였다. 이를 위해 우선 '접촉점은 주스프링과 보조 스프링의 공유점이다.' 와 '외부 작용력으로 인해 변형된 주스프링과 보조 스프링의 기울기가 두 스프링의 접촉점에서 동일하다.' 라는 두 가지 기하학적 구속조건을 적용하여 하중에 따른 접촉점의 위치를 구하였다. 그리고 이를 바탕으로 천이발생 여부를 판단하고 각 구간에 따른 강성을 계산하는 방안을 이론적으로 제안하였다. 최종적으로 이론적으로 제시한 방안의 해석결과와 수치계산을 통하여 얻은 강성해석 결과를 비교·검토하여 그 타당성을 검증하였다.

2. 비선형 강성해석 법

2.1 해석과정

center-bolt 를 중심으로 스프링을 두 부분으로 나누고 각 부분을 굽은 외팔 보(curved cantilever beam)로 설정하였다. 그리고 각 부분에 대해 보조 스프링이 작용하기 시작하는 임계하중을 기준으로, 임계하중보다 작은 영역과 임계하중보다 큰 영역으로 나누어 해석을 하였다. 우선 임계하중보다 작은 영역에서는 주스프링만이 역할을 하므로 이 영역에서는 주스프링의 하중-변형관계만 고려하였다. 다음으로 임계하중보다 큰 영역에서는 주스프링과 보조 스프링이 접촉을 하게 되므로 강성의 천이가 일어나게 된다. 즉 접촉점이 center-bolt 부분에서 스프링의 바깥으로 이동하게 된다. 따라서 이 영역에서는 접촉점의 위치에 따라 작용하는 보조 스프링의 길이가 달라져 강성이 변하게 되므로 정확한 접촉점의 위치를 계산해야 한다. 이를 위해 서론에서 언급한 두 가지 기하학적 구속조건을

적용하였다. 이 구간에서는 접촉점까지가 실제로 보조 스프링이 작용하는 길이가 되고, 따라서 이 길이에 해당하는 강성을 고려한 전체 스프링의 강성을 계산하였다. 마지막으로 하중이 더욱 증가하여 접촉점의 위치가 보조 스프링의 끝부분에 존재하는 경우에 주스프링과 더불어 보조 스프링 전체가 스프링의 역할을 하므로 전체 스프링의 강성은 주스프링과 보조 스프링을 모두 고려하여 계산하였다. 위의 과정으로 스프링의 각 부분에 대한 강성을 구하고 다음으로 이들을 조합하여 전체 스프링의 강성을 계산하였는데, center-bolt 에서 스프링의 양끝을 잇는 직선에 수직인 거리가 스프링의 캠버(camber)이므로 설계 시 사양으로 요구되는 초기캠버에서 스프링에 하중이 작용하여 변화된 캠버를 뺀 변화량이 전체 스프링의 강성이라 볼 수 있다.

2.2 굽은 외팔 보의 강성해석

Fig.2 와 같은 굽은 외팔 보에 변형에너지 이론 (strain energy theory)을 적용하여 변형을 살펴 보았다. 여기서 ρ , α , θ , P 는 각각 초기 곡률반경, 보의 고정단에서 자유단까지의 초기 사이 각 (angle), 보의 고정단에서 각 위치까지의 각, 자유단에 작용하는 y -방향 외력을 나타낸다. 여기서 보가 선형-탄성체, 즉 탄성범위 내에서 보가 작용을 하고 또한 힘-변형관계가 선형이라 가정하면, Castigliano 의 정리⁽¹³⁾를 적용하여 자유단에서의 y -방향 변위 δ_{eq} 를 (1)과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_{eq} = \frac{PL^3}{3EI_{zeq}} \quad (1)$$

여기서 굽은 보(길이: $L = \rho\alpha$)에 대응하는 등가 직선 보(길이, $L = \rho \sin \alpha$)의 등가 단면관성모멘트는 $I_{zeq} = (L/L)^3 I_z$ 이다. 등가 단면관성모멘트는 굽은 외팔 보의 변위와 직선 보의 변위를 동일하게 만들어 주는 역할을 한다.

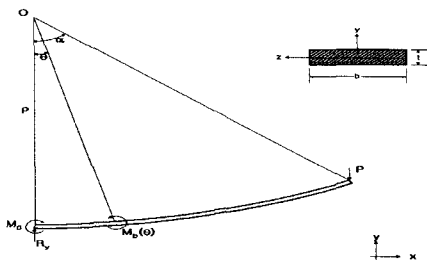


Fig. 2 Free body diagram of a curved cantilever beam

이렇게 표현함으로써 굽은 외팔 보의 변형을 비교적 간단한 직선 보의 변형으로 대체할 수 있어 스프링의 강성계산 시 계산량을 줄일 수 있다. 이에 대한 검증은 3장에서 다룰 것이다.

2.3 겹 판 외팔 보의 강성해석

이 절에서는 전체 스프링의 강성을 계산하기 위한 전 단계로 주스프링을 center-bolt 중심으로 같은 단면관성모멘트를 갖는 두개의 굽은 외팔 보로, 보조 스프링을 center-bolt 중심으로 두 개의 굽은 외팔 보로 각각 나누고 Fig.3 와 같이 주스프링과 보조 스프링 두 개의 굽은 외팔 보로 이루어진 겹 판 외팔 보를 구성하였다. 겹 판 외팔 보의 변형 전 형상에 등가 직선 보의 변형 식을 적용하여 외부하중과 변위의 관계를 구하였다.

겹 판 외팔 보의 강성을 해석하기 위해, 주스프링의 자유단에 하중이 작용할 때 두 스프링간의 접촉점을 구하고 이를 다음의 세가지 경우로 나누어 해석을 하였다.

- 고정단에 접촉점이 존재, 즉 주스프링과 보조 스프링의 접촉이 일어나지 않은 경우
- 고정단과 자유단 사이에 접촉점이 존재하는 경우
- 자유단에 접촉점이 존재, 즉 접촉이 완료된 경우

우선 접촉점의 위치를 구하기 위해 다음의 두 가지 조건을 적용하였다.

① 접촉점은 주스프링과 보조 스프링의 공유 접이다.

② 접촉점에서 주스프링과 보조 스프링의 기울기는 동일하다.

Fig.3 와 Fig.4 에서,

$$y_1(x) = \rho_1^2 - \sqrt{\rho_1^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (2a)$$

$$\delta_1(x) = \frac{1}{6EI_{zeq1}} \{3(-WL_1 + f_c x_c) + (W - f_c)x\} \quad (2b)$$

$$, 0 \leq x \leq x_c$$

$$I_{zeq1} = \left(\frac{L_2}{\rho_1 \sin^{-1}(L_2/\rho_1)} \right)^3 I_{z1} \quad (2c)$$

$$y_3(x) = \rho_2^2 - \sqrt{\rho_2^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq L_3 \quad (3a)$$

$$\delta_3(x) = \frac{f_c x^2}{6EI_{zeq3}} (x - 3x_c) \quad , 0 \leq x \leq x_c \quad (3b)$$

$$I_{zeq3} = \left(\frac{L_3}{\rho_2 \sin^{-1}(L_3/\rho_2)} \right)^3 I_{z3} \quad (3c)$$

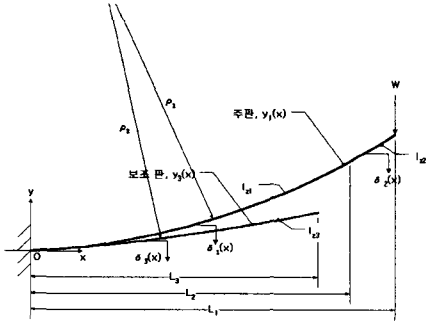


Fig. 3 Undeformed shape of multi-leaf cantilever beams

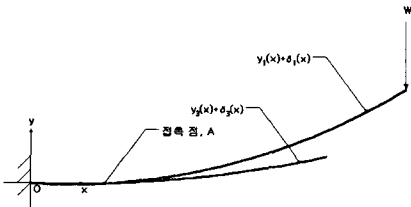


Fig. 4 Deflected shape of multi-leaf cantilever beams

따라서 접촉점의 위치, x_c 와 접촉력, f_c 은 위의 두 조건에 의해 아래의 두식 ㉑과 ㉒을 동시에 만족하는 해가 된다.

$$\textcircled{1} \{y_1(x) + \delta_1(x)\}_{x=x_c} = \{y_3(x) + \delta_3(x)\}_{x=x_c}$$

또는,

$$\frac{x_c^3 f_c}{3EI_{zeq3}} + \frac{1}{EI_{zeq1}} \left\{ \frac{1}{6} x_c^3 (W - f_c) + \frac{1}{2} x_c^2 (x_c f_c - WL_1) \right\} + \rho_1 - \sqrt{\rho_1^2 - x_c^2} - \rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - x_c^2} = 0 \quad (4)$$

$$\textcircled{2} \left[\frac{d}{dx} \{y_1(x) + \delta_1(x)\} \right]_{x=x_c} = \left[\frac{d}{dx} \{y_3(x) + \delta_3(x)\} \right]_{x=x_c}$$

또는,

$$\frac{x_c^2 f_c}{2EI_{zeq3}} + \frac{1}{EI_{zeq1}} \left\{ \frac{1}{2} x_c^2 (W - f_c) + x_c (x_c f_c - WL_1) \right\} + \frac{x_c}{\sqrt{\rho_1^2 - x_c^2}} - \frac{x_c}{\sqrt{\rho_2^2 - x_c^2}} = 0$$

2.4 Progressive Multi-Leaf Spring의 강성해석

스프링의 강성은 차량의 샤시(chassis)와 연결된 주스프링 양끝부분의 변위에 의해 결정된다. 스프링을 두 부분으로 나누었을 때, 각 부분에 대한 변위는 앞 절에서 구하였으므로 본 절에서는 이를 바탕으로 전체 스프링의 강성을 구하고자 한다.

Fig.5 에서와 같이 변형 전 스프링은 center-bolt, O 에서 외부하중을 받고 스프링의 양끝(A 와 A')은 수직방향의 운동이 구속되어 있다. 그리고 center-bolt는 수평방향의 운동이 구속되어 있다. 따라서 외부하중의 작용으로 스프링의 양끝에는 $(-)$ y -방향으로의 반력이 작용하게 된다.

전체 스프링의 변위는 외부하중 작용으로 인한 캠버의 변화량과 같다. 즉 Fig.5에서 스프링 변위(Δ)=초기캠버(initial camber)-최종캠버(final camber)이다. 여기서 캠버는 center-bolt에서 스프링의 양끝을 잇는 선분에 이르는 수직거리(OC)로, 하중작용 시 차량의 타이어와 연결되는 부분인 center-bolt는 수직방향의 변위 및 이를 중심으로 한 회전(rotation)을 동시에 하기 때문이다.

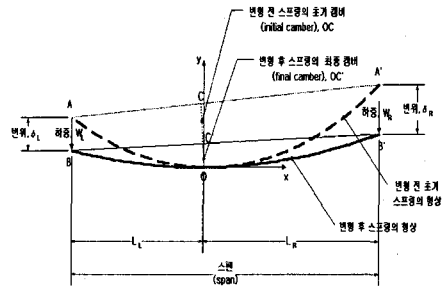


Fig. 5 Undeformed and deflected shape of the main spring

하중작용 시 스프링 양끝에서의 변위는 δ_L 과 δ_R 로 앞 절의 결 판 외팔 보에 대한 해석에서 구하였다. 따라서 스프링에 작용하는 외부하중, P 로 인한 스프링 양끝에서의 변위는 반력, W_L 과 W_R 을 대입하여 얻을 수 있다.

하중작용 시 캠버는 스프링 양끝을 잇는 직선에 수직거리이므로, 직선 BB' 을 나타내는 방정식, $y_{BB'}(x)$ 는

$$y_{BB'}(x) = mx + n = \frac{h_R - h_L}{span} x + \left\{ h_L + \frac{L_L (h_R - h_L)}{span} \right\} \quad (6)$$

여기서 h_r 과 h_n 은 주스프링의 양끝의 높이이다.
따라서 최종적으로 전체 스프링의 변위, $\Delta=OC-OC'$ 는

$$\Delta = OC - OC' = OC - \sqrt{\left(\frac{mn}{m^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{n}{m^2 - 1}\right)^2} \quad (7)$$

여기서, OC 는 초기 캠버량으로 스프링의 사양으로 주어진 값이다.

3. 해석결과와 검증

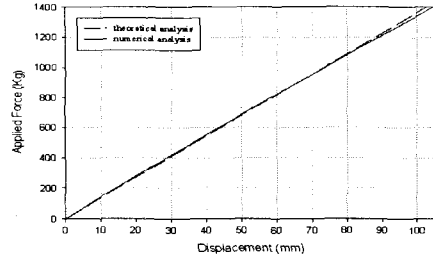
3.1 수치계산을 이용한 검증

3.1.1 굽은 외팔 보의 강성

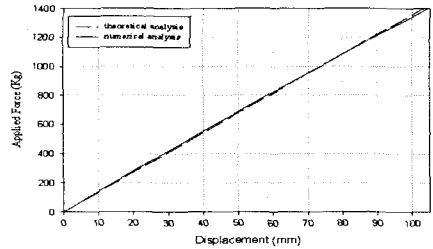
2.2 에서 굽은 외팔 보에 Castilgliano 의 정리를 적용하여 강성특성을 구하여 굽은 외팔 보로 구성된 스프링의 힘-변위관계를 유도하였다. 그러나 Castilgliano 의 정리는 하중-변위의 관계가 선형인 구간에서만 성립을 하므로 수치계산을 통해 2.2 에서의 가정이 적합함을 보여야 할 것이다. 또한 굽은 외팔 보의 변형을 등가 직선 외팔 보의 변형으로 대체하는 방법의 타당성에 대해서도 검증이 이루어져야 할 것이다.

우선 굽은 외팔 보의 하중-변위관계를 살펴보기 위해 굽은 외팔 보를 한쪽 끝은 고정 단으로, 나머지 한 쪽 끝은 하중이 작용하는 자유단으로 형상을 모델링하고 보는 4-절점 셀 요소(4-node shell element)로 구성하였다. 그리고 수치계산은 상용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS⁽¹⁵⁾를 이용해서 정적(static)으로 계산하였고, 굽은 외팔 보의 변형 시 있을 수 있는 기하학적인 비선형성을 고려하기 위해 Nonlinear Geometry Analysis 를 수행하였다.

Fig.6 는 굽은 외팔 보에 등가 직선 외팔 보의 변형을 적용한 계산(dashed line)과 ABAQUS 를 이용한 수치계산 결과(solid line)를 보여주는 그래프로 하중-변위관계가 선형임을 보이고 있다. 또한 Table 1 에서 보는 바와 같이 굽은 외팔 보의 변형을 등가 직선 보의 변형으로 대체하여 얻은 결과와 수치계산에서 얻은 결과가 약간의 오차를 보이지만 매우 정확히 일치함을 알 수 있다. 따라서 2.2 에서 굽은 외팔 보에 적용한 가정인 선형적인 하중-변위 관계가 성립하고, 또한 굽은 외팔 보의 변형을 등가 직선 보의 변형으로 대체하는 방법이 타당함을 알 수 있다



(a)



(b)

Fig. 6 Force-displacement relations of the curved cantilever beam

(a) The radius of curvature: 1,500 mm,

(b) The radius of curvature: 2,000 mm.

Table 1 Comparison between the theoretical and the numerical stiffness of the curved cantilever beam

곡물 반경 (mm)	해석 이론 방법 (kgf/mm)	수치 계산 (kgf/mm)	오차 (%)
1,500	13.69	13.64	0.37
2,000	13.56	13.38	1.35

3.1.2 Progressive Multi-Leaf Spring 의 강성

본 논문에서는 Fig.7 과 같이 Progressive Multi-Leaf Spring 을 모델링하고 상용 유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS 를 사용하여 수치계산 하였다. Fig.7 에서 영역 1(Region 1)과 영역 2(Region 2)는 주스프링 중 판의 개수가 2 장, 영역 3(Region 3)은 판의 개수가 3 장인 부분을, 영역 4(Region 4)는 보조 스프링을 나타낸다. 그리고 각 영역은 2.3 에서 언급했듯이 등가 단면관성 모멘트를 갖는 하나의 굽은 판(curved plate)으로 나타내었다.

해석방법은 center-bolt 부분에서 절점(node)를 공유시켜 두 판이 동일한 변형을 하도록 하였다. 즉 center-bolt 에서 두 판은 y -방향(2-방향)의 변위 및 z -방향(3-방향)의 회전이 같아서, 실제로 주스프링

과 보조 스프링을 하나로 묶는 center-bolt 와 동일한 역할을 하도록 설정하였다. 하중은 스프링의 center-bolt 에 (+)y-방향으로 작용시키고, center-bolt 에서의 변위를 계산하였다.

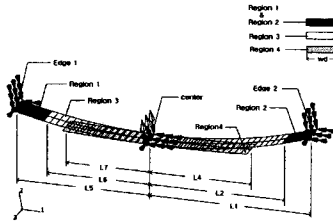


Fig. 7 The ABAQUS model for calculating the stiffness of the Progressive Multi-Leaf Spring

3.2 검증결과 및 고찰

Fig.8 은 2 장의 이론을 적용한 결과와 수치계산을 통해서 얻은 결과를 비교한 것이다. (a)와 (b)를 비교해 보면, (a)가 (b)보다 천이영역이 뒤에서 일어남을 볼 수 있는데, 이는 (a)의 주스프링 곡률반경이 (b)보다 크지만 보조 스프링의 곡률반경은 (a)가 훨씬 더 크기 때문에 하중이 작용하기 전 두 스프링 사이의 초기 간격은 (b)의 경우가 작아서 (a)보다 작은 하중에서 두 스프링이 상호작용을 일으키기 때문이다.

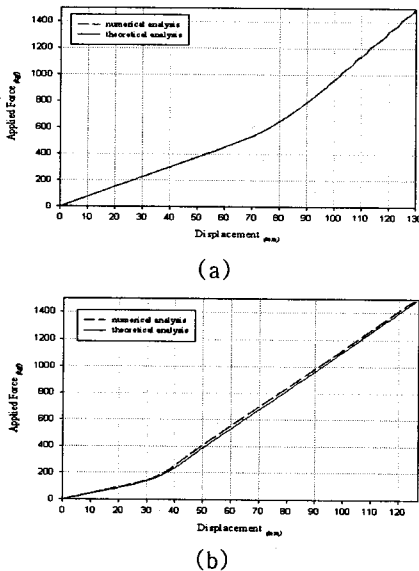


Fig. 8 Comparisons between theoretical and numerical the stiffness of the Progressive Multi-Leaf Spring
(a) The radius of curvature of the main and the help springs: 2000 mm and infinite

(b) The radius of curvature of the main and the help springs: 1,546 mm and 2,300 mm

또한 Fig.8 로부터 이론을 적용한 결과와 수치계산을 통한 결과는 거의 완벽하게 일치함을 볼 수 있다. 즉 두 가지 기하학적 구속조건을 적용해서 전개한 이론을 적용하면 주스프링과 보조 스프링의 접촉위치와 그 때의 접촉력을 아주 정확하게 얻을 수 있음을 보여준다. 이는 물론 수치계산에 이용한 ABAQUS 와 같은 상용 유한요소해석 프로그램을 이용하면 더욱 정확한 결과를 구할 수 있지만, 이를 위해서는 상용 유한요소해석 프로그램이 필요하고, 또한 해석을 위한 모델이나 경계조건이 조금만 바뀌어도 새로이 대상을 모델링해야 할 뿐만 아니라 새 모델을 계산하기 위해서는 비선형접촉 문제이므로 적지않은 시간이 필요로 하게 된다. 그러나 본 연구에서 제시한 이론을 적용하여 비교적 간단한 프로그램을 작성하면 유한요소해석에 비해 시간적·경제적 비용을 아주 아끼면서 상당히 정확한 계산결과를 얻을 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 Progressive Multi-Leaf Spring 의 판간 접촉효과와 캠버를 모두 고려한 강성을 이론적으로 살펴보고, 그 결과를 상용 유한요소해석 프로그램과 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 굽은 외팔 보 자유 단에서의 하중-변위는 선형적이고 따라서 직선 보 이론을 적용할 수 있었다.

(2) center-bolt 를 중심으로 주스프링과 보조 스프링을 굽은 외팔 보로 각각 나누고, 이에 직선 보 이론을 적용하여 주스프링과 보조 스프링의 접촉효과를 고려한 하중-변위 관계를 유도하였다. 이를 위해 '접촉점은 주스프링과 보조 스프링의 공유점이다.' 와 '접촉점에서는 주스프링과 보조 스프링의 기울기가 동일하다.' 는 두 가지 기하학적 구속조건을 적용하여 주스프링과 보조 스프링 간의 접촉점의 위치와 접촉력을 동시에 구할 수 있었다.

(3) 겹 판 외팔 보에서 구한 하중-변위 관계를 바탕으로 캠버를 고려한 전체 Progressive Multi-Leaf Spring 의 강성을 유도하였다. 이를 위해 캠버를 'center-bolt 에서 스프링의 양끝을 잇는 직선에 수직인 거리' 라 정의하고, 스프링 변위를 초기캠버에서 외부하중 작용으로 인한 최종캠버의

차로 계산하였다.

(4) 위의 이론을 적용하여 프로그램화함으로써 매우 짧은 계산시간으로 유한요소해석 결과와 거의 정확히 일치하는 Progressive Multi-Leaf Spring 의 비선형적인 강성특성을 구할 수 있었다.

후 기

본 논문은 ㈜현대자동차와 ㈜대원강업의 연구비 및 기술지원으로 이루어진 것으로, 이에 도움을 주신 현대자동차 울산연구소의 정달희 님, 김순근 님, 김세익 님, 대원강업의 김기전 님, 박진용 님, 대경특수강의 최정기 님 등 본 논문을 작성하는 데 도움을 주신 모든 관계자 여러분께 심심한 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Wahl, A. M., "Mechanical Springs", Wiley, New York, 1963.
- (2) Faires, V. M., "Design of Mechanical Elements", Macmillan, New York, 1965.
- (3) M. F. Spotts and T. E. Shoup, "Design of Machine Elements", 7th ed., Prentice Hall, 1998.
- (4) Robert C. Juwanall, "Fundamentals of Machine Components Design", John Wily & Son, New York, 1983.
- (5) 정선모, "표준기계설계학", 동명사, 1984.
- (6) 송지복 외, "신기계설계학", 청문각, 1996.
- (7) Imai, H. and Iizuka, K., "Nonelasticity of leaf springs", Bull. Japan Soc. of Prec. Engg. Vol. 11, No. 2, June 1977, pp 93-94.
- (8) Mikaila, J., "Two-stage multileaf spring design", SAE, Tran. 730272, 1973, 14p.
- (9) Rowland, F., "Variable rate leaf springs-their design and characteristics", SAE Trans. 730271, 1973, 12p.
- (10) E. Zahavi, "Analysis of a contact problem in leaf springs", Mechanics Research Communications, Vol 19(1), pp 21-27, 1992.
- (11) 고영호, "접 판 스프링의 유한요소해석 법", 한양대학교, 1997.
- (12) 김기중, "상용 유한요소해석 프로그램을 이용한 접 판 스프링의 비선형 접촉해석", 한양대학교, 1997.
- (13) Stephen H. Crandall, Norman C. Dhall and Thomas J. Larder, "An Introduction to The Mechanics of Solids", 2nd ed., with SI units, McGraw-Hill book company, 1996.
- (14) Raymond J. Roark and Warren C. Young, "Formulas for Stress and Strain", 4th ed., McGraw-Hill book company, 1986.
- (15) ABAQUS USER MANUAL & POST MANUAL