대한기계학회 2000년도 추계학술대회논문집 A pp. 345~350 KSME 00F043

S 모양 가상재료를 이용한 위상최적화

윤길호* · 김윤영**

Topology Optimization using *S*-shape material model

G. H. Yoon* , Y. Y. Kim**

Key Words : Topology(위상), Optimization(최적화), *S*-shape Artificial Material Model(*S* 모양 가상재료 모델)

Abstract

In this paper, we introduce a new artificial material model for topology optimization. The present material model, named S-shape material model, accelerates topology optimization process especially in mathematical programming. We overcome the instability and the flatness in heuristic optimization process. Numerical examples show the superiority of the proposed material.

1. 서론

많은 연구자들에 의해서 연구되고 있으며 실제 산업현장에서 쓰이고 있는 위상최적화는 기계구조를 설계할 때 설계하는 사람의 지식이나 경험에 의존하지 않고 최적 설계를 할 때 이용된다. 처음에 위상최적화는 Bendsoe와 Kikuchi[1] 등에 의해 활발히 연구되었다. 그후 Hassani와 Hinton[2,3,4]등에 의해 많은 연구가 이루어지고 있다.

기존의 위상최적화는 크게 균질화를 이용하는 방법과 가상재료를 이용하는 방법이 있다[5]. 그런데, 이 균질화나 가상재료를 이용할 때 깨끗한 형상을 얻는 것을 방해하는 여러 가지 수치적인 문제가 발생이 되는 것으로 알려져 있다[6].

본 논문에서는 기존의 가상재료가 가지고 있었던 수렴의 불안정성이라는 수치적 문제들을 효과적으로 해결할 수 있는 새로운 가상재료를 제안한다. 그리고, 2차원과 3차원 예제를 통해 이를 검증하였다.

* 서울대학교 기계항공공학부
** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

2. 위상최적화

위상최적화는 정적문제뿐만 아니라 동적 문제 등 많은 엔지니어링 문제에 적용될 수 있다. 본 논문에선 제안된 가상재료의 효율성을 검증하기 위해 컴플라이언스 최소화문제만을 고려하겠다. 컴플라이언스 최소화 문제는 식(1)과 식(2)에 의해 최적화 문제로 정의된다. 자세한 것은 참고문헌[2,3,4]을 살펴보기 바란다.

Minimization of $L(\rho)$:

$$L(\rho)=\{U\}^T[K]\{U\} \tag{1}$$

Subjected to

$$H(\rho)=\sum_{e=1}^{N}\int_{\Omega_e}\rho_e d\Omega-M_0\le 0$$

$$\rho=\{\rho_e\}^T \tag{2}$$

3. 가상재료를 사용한 위상최적화

균질화는 무한히 반복되는 미세 구조를 가정하여 최적화 문제를 이완시킨다. 이에 반해 가상재료는 미세구조를 생각하지 않고 밀도와 탄성계수 간의 관계를 간단한 다항식형태로 최적화 문제를 이완시킨다. 이 가상재료는 균질화에 비해 간단하게 위상최적화를 수행 할 수 있는 장점이 있어 많이 쓰이고 있다. 또한, 가상재료는 최근에 Bendsoe와 Sigmund(1999)[7]에 의해 균질화이론에 근거한 미세구조를 찾아 낼 수 있음이 입증되었다. 이 가상재료는 탄성계수와 밀도에 대한 관계를 식(3)과 같이 가정한다.

$$E(\rho_e) = \rho_e^n E_0 \qquad (3)$$

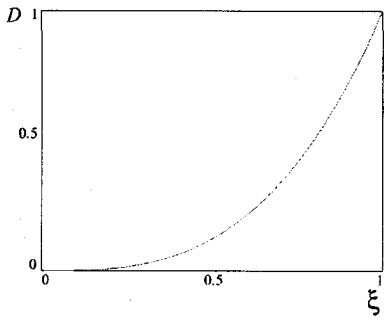

Fig. 1 Relationship between Young's modulus and design variable of classical artificial material model

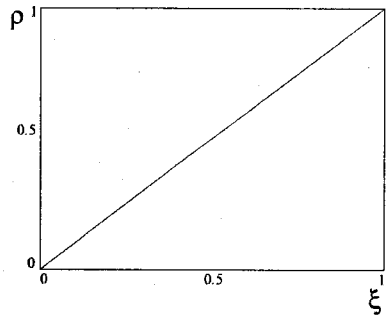

Fig. 2 Relationship between density and design variable of classical artificial material model

여기서 n은 함축된 페널티(Implicity Penalty)이다. 통상적으로 2나 3이 쓰이고 있다.[5]

4. S 모양의 가상재료

일반적으로 위상최적화를 수행할 경우 깨끗한 위상이 나오지 않는다. 이는 최적화 문제를 이완시키기 위해 사용한 균질화와 가상재료 때문이다. 이런 한계를 수치적 한계를 극복하기 위해서 목적함수에 임의적으로 경계선 억제 (Perimeter Control) 나 $\sum_{e=1}^{N}\int \rho_e(1-\rho_e)dv$ 와 같은 항을 넣어 주어 강제로 0과 1에 수렴하게 한다[7]. 또한, 가상재료에는 함축된 페널티 (Implicity Penalty) n이 정적해석을 기본으로 한 컴플라이언스 (Compliance) 최소화 문제에 주로 사용된다[7].

본 논문에서 제안하려 하는 것은 새로운 함축된 페널티(Implicity Penalty)를 가지는 가상재료이다. 이 새로운 가상재료 모델은 기존의 가상재료를 기반으로 해서 밀도값이 0 또는 1로 수렴하도록 스케일링 해주는 기능을 가지고 있다. 즉, 0과 1사이에서는 밀도 공간상에서 큰 민감도를 가지고 있어도 밀도가 0.5 근방에 있는 요소의 민감도보다 상대적으로 작게 해주어, 수치알고리즘으로 하여금 0.5 근방의 변수를 상대적으로 0과 1에 가까운 변수보다 잘 바꿔주는 구조를 가지고 있다. 이 논문에서 제안하는 가상재료는 다음과 같이 정의된다.

$$D(\xi) = K(\xi)^n D_0,\ V(\xi) = \int_\Omega K(\xi)dv$$

$$K(\xi) = \frac{1}{1+\exp(-s(a*\xi-b))} \qquad (4)$$

(단, 여기서 s, a와 b는 실수)

제안한 가상재료와 기존의 가상재료는 디자인 변수와 탄성계수사이의 관계, 그리고 디자인 변수와 구속조건인 밀도의 관계에서 차이가 난다. 다음 그림들과 Fig. 1과 Fig. 2를 비교해보면 그 차이를 알 수 있다.

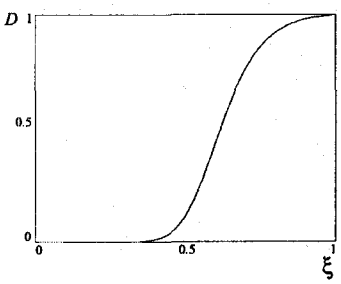

Fig. 3 Relationship between Young's modulus and design variable of the present s-shape artificial material model

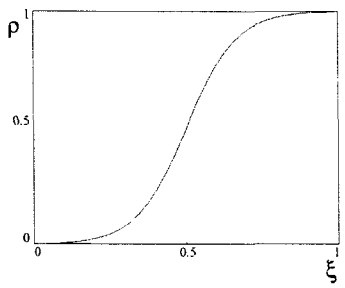

Fig. 4 Relationship between density and design variable of the present s-shape artificial material model

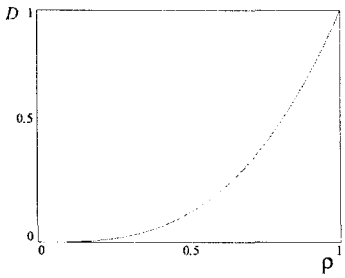

Fig. 5 Relationship between Young's modulus and density of the present s-shape artificial material model (s=0.2, a=60, b=30, n=3)

디자인 변수와 밀도 그리고, 디자인 변수와 탄성계수와의 사이가 S 모양과 유사하게 생겼기 때문에 S 모양 가상재료가로 명명한 것을 밝혀둔다.

5. S 모양 가상 재료의 민감도 해석

이 가상재료를 사용하여 수치적인 최적화방법을 사용하기 위해서는 목적 함수를 계산하고 구속조건을 계산하는 것뿐만 아니라, 목적함수의 디자인 변수에 대한 미분값과 구속조건의 디자인 변수에 대한 미분값인 민감도 해석이 필수적이다. 먼저 기존의 가상재료의 목적함수와 구속조건의 밀도에 대한 편미분을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_e} = -\ U_e^T \frac{\partial [\ K_e]}{\partial \rho_e}\ U_e$$
$$= -\frac{n}{\rho_e}\ U_e^T K_e\ U_e$$

$$\frac{\partial M}{\partial \rho_e} = \int_{\Omega_e} d\Omega_e \qquad (5)$$

여기서, 제안된 가상재료상의 민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_e} = \frac{\partial L}{\partial \rho_e}\frac{\rho_e}{\xi_e} = -\frac{n}{\rho_e}\ U_e^T K_e\ U_e * \frac{\rho_e}{\xi_e}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi_e} = \frac{\partial M}{\partial \rho_e}\frac{\rho_e}{\xi_e} = \int_{\Omega_e} d\Omega_e * \frac{\rho_e}{\xi_e}$$

$$\frac{\rho_e}{\xi_e} = \frac{s*a*\exp(-s(a*\xi_e - b))}{(1+\exp(-s(a*\xi_e - b)))^2} \qquad (6)$$

6. S 모양 가상재료 특성

기존의 가상재료와 제안된 S모양 가상재료의 차이점을 살펴보기 위해서 다음과 같은 *Michell*문제의 밀도가 다음의 분포를 보일 때 민감도가 어떻게 수치알고리즘에 반영되는지 살펴보겠다.

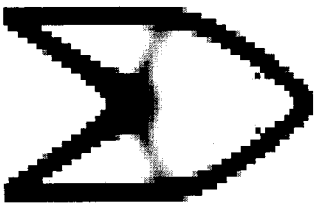

Fig. 6 Density distribution (ρ) of michell problem

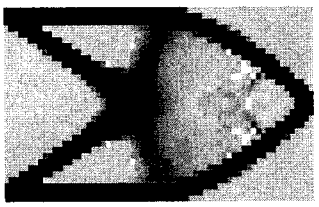

Fig. 7 Design variable distribution (ξ) in Fig. 6

위의 그림에서 각각의 유한 요소별의 밀도를 크기 순서대로 나타낸 후 그에 대한 기존의 방법의 목적함수의 민감도와 제안된 S 모양의 가상재료상의 목적함수의 민감도를 비교해보면 다음과 같다.

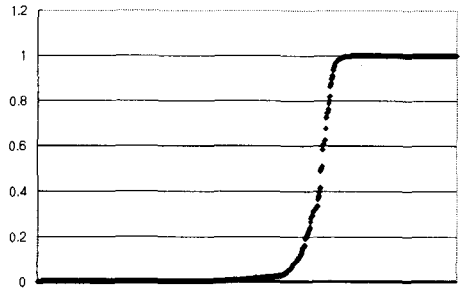

Fig. 8 Density distribution of FEM element

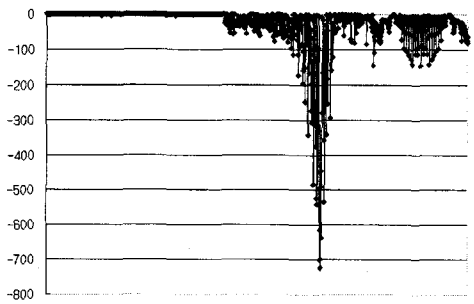

Fig. 9 Object gradient distribution of FEM element *in classical artificial material model*

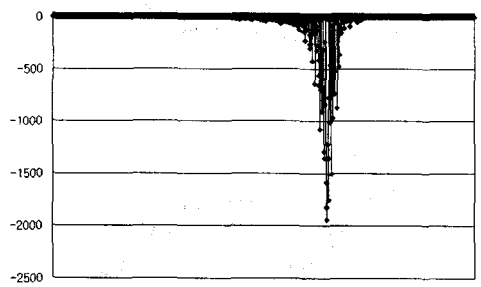

Fig. 10 Object gradient distribution of FEM element in the present artificial material model

위의 그림에서 보는 것과 같이 기존의 가상재료에서는 밀도가 0과 1 부근에 있는 변수들의 민감도 값들이 밀도가 0.5 부근에 있는 민감도에 비해 무시할 수 없을 정도의 값을 가지고 있으나, 제안된 *S*모양의 가상함수의 목적함수는 밀도가 0과 1 부근에 있는 목적함수의 민감도를 효과적으로 감소시키고 밀도가 0.5 부근에 있는 변수들의 민감도를 증폭시키는 역할을 한다. 이는 수학적 방법을 사용한 최적화 알고리즘에서 효과적으로 변수들을 변환할 수 있도록 한다.

7. 수치예제

7.1 2차원 예제

위에서 제안된 *S* 모양의 가상재료의 장점을 검증하기 위해 컴플라이언스 최소화를 위한 위상최적화를 수행하겠다. 최적화 알고리즘은 FDM (*Feasible Direction Method*)를 사용하였다.

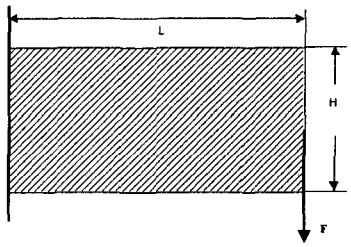

Fig. 11 Michell problem (Mass:37.5% L:16 H:10)

다음은 기존의 가상재료와 제안된 가상 재료를 사용하여 *2048*개의 유한 요소 망을 사용하여 위상최적화를 수행한 결과이다.

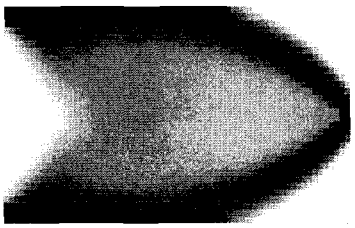

Fig. 12 Optimization result using classical artificial material model
(no penalty and no postprocessing)

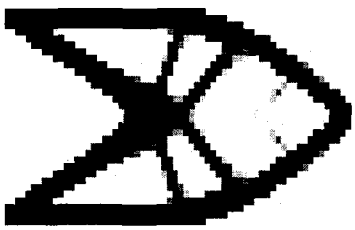

Fig. 13 Optimization result using the present s-shape artificial material model (no penalty and no postprocessing)

Table 1. Comparison results

Method	Classical	Present
Iteration	32	40
Function	131	128
Object	4805.9	3549.88

위의 계산결과를 보면 제안된 가상재료를 쓸 경우 기존의 가상재료 보다 실용가능한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 다른 2차원 예제에서도 위와 같이 제안된 가상재료를 쓸 경우 수치적 어려움을 해결할 수 있음을 살펴 볼 수 있었다.

7.2 3차원 예제

위의 S 모양 가상재료를 3차원 예제에 적용시켜 보았다. 깨끗한 해를 얻기 위해 어떠한 외부조건을 주지 않았다.

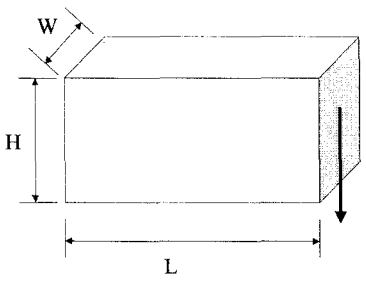

Fig. 14 Three Dimensional mitchell problem
(L:16 H:10 W:10 V: 300/1600, 31.25%)

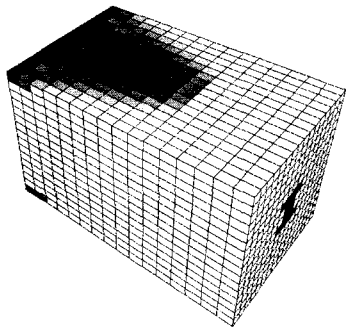

Fig. 15 Optimization result using classical artificial material model
(no penalty and no postprocessing)

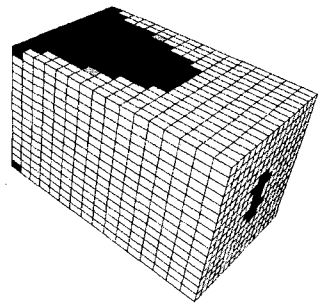

Fig. 16 Optimization result using the present s-shape artificial material model (no penalty and no postprocessing)

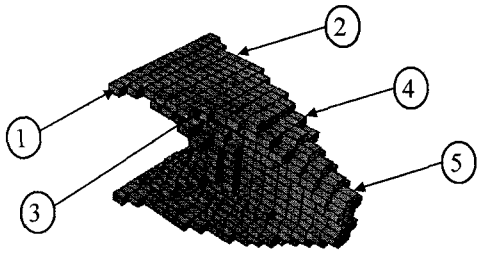

Fig. 17 Optimization result using the present s-shape artificial material model after postprocess

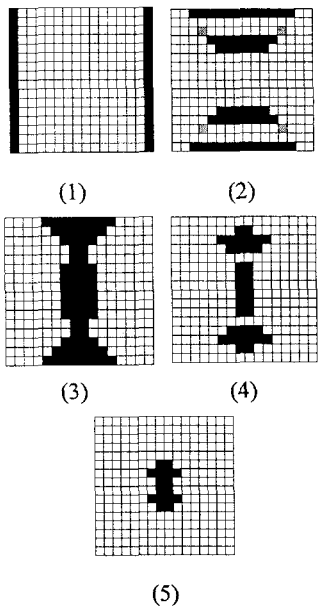

Fig. 18 Section optimization results defined in Fig. 17

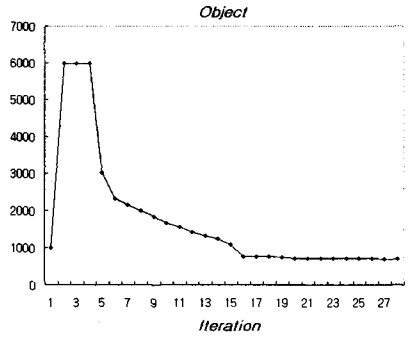

Fig. 19 Object iteration history using the present material model

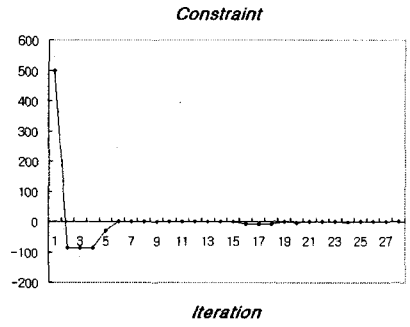

Fig. 20 Constraint iteration history using the present material model

Fig. 15와 Fig. 16을 비교해 보면 본 논문에서 제안된 S 모양의 가상 재료가 3차원 문제에도 효율적으로 적용됨을 알 수 있다.

8. 결론

본 논문에서는 새로운 가상재료를 제안하였다. 제안된 가상재료는 기존의 가상 재료가 수학적 최적화 알고리즘(Mathematical Programming)에서 보여주었던 수치적인 수렴의 불안정성을 효과적으로 해결하였다.

제안된 가상재료는 함축된 페널티(Implicity Penalty)를 가지고 있으며 이는 기존의 외형적 페널티(Explicit Penalty)와 비교해서 목적함수와 구속조건의 민감도측면에서 장점을 가지고 있다.

이 제안된 가상재료의 효율성을 검증하기 위해서 컴플라이언스 최소화라는 2차원과 3차원의 최적화 문제에 적용시켜보았다.

참고문헌

[1] Bendsoe, M.P., Kikuchi, N., 1988. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. Comp. Meth. Appl. Mechs. Engng. 71, 197-224.

[2] Hassani, B., Hinton, E., 1998a. A review of homogenization and topology optimization I - Homogenization theory for media with periodic structure. Comput. Struct. 69, 707-717.

[3] Hassani, B., Hinton, E., 1998b. A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization equations. Comput. Struct. 69, 719-738.

[4] Hassani, B., Hinton, E., 1998c. A review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria. Comput. Struct. 69, 739-756.

[5] Bendsoe, M.P., 1995. Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Springer, New York.

[6] Sigmund, O., Petersson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Struct. Optim. 16, 68-75.

[7] Bendsoe, M.P., Sigmund, O., 1999. Material interpolation schemes in topology optimization. Archive of Applied Mechanics. 69, 635-654.