

# 일정 압력에 의한 3차원 평면균열에서의 응력확대계수 계산

안 득 만\*

## Calculation of Stress Intensity Factor in Arbitrarily Shaped Plane Crack under Uniform Pressure Loading

Deuk Man An

**Key Words:** Boussinesq-Papkovich Potential(부시네스크 파코비치 포텐셜), Elliptic Crack(타원 균열), Mobius Transformation(뫼비우스 사상), Stress Intensity Factor(응력확대 계수), Dyson's formula(다이슨의 공식), Least Square Method(최소 자승법)

### Abstract

In this paper the stress intensity factor under uniform pressure in the arbitrarily-shaped plane crack configuration transformed elliptic crack by Mobius mapping are determined. Using Dyson's formula Boussinesq-Papkovich potentials for mode I deformation are constructed. In the example the stress intensity factors are approximately calculated by least square method

### 1. 서론

3차원 균열 문제의 해석은 일반적으로 까다롭다. 3차원 균열 문제 중 해석적으로 가능한 해는 평면 균열 중 몇몇 특수한 형상에 국한되어 있다. 즉, 무한 물체에 존재하는 반 무한 균열과 원형 및 타원형의 평면 균열 등등이다. 본 논문에서는 타원형의 균열에 뫼비우스 사상을 적용하여 새로운 형상에 대한 응력 확대 계수 (stress intensity factor)를 구하는 방법을 기술하고 예제를 통하여 이를 보여주고자 한다.

### 2. Boussinesq-Papkovich Potential

변위를 다음과 같이 표현하자. 즉,

\*부산대학교 공과대학 기계공학부

$$\begin{aligned} u &= \phi_1 + z \phi_x, \\ v &= \phi_2 + z \phi_y, \\ w &= \phi_3 + z \phi_z \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  및  $\phi$  는 3차원 Laplace 식을 만족하는 조화 함수이고 첨자  $x, y, z$  는 각각 독립변수에 대한 미분을 나타낸다. 여기서 변위  $u, v, w$  가 평형방정식을 만족하여야 하므로 체적력이 없다고 가정하면 다음과 같은 Navier Equation을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} e_x + (1-2\nu) \nabla^2 u &= 0 \\ e_y + (1-2\nu) \nabla^2 v &= 0 \\ e_z + (1-2\nu) \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\nu$  는 Poisson의 비이고  $e$  는 단위 체적당 체적의 변화량을 나타낸다. 즉,

$$e = u_x + v_y + w_z$$

이다.

그리고  $\nabla^2$ 은 다음과 같은 3차원에서의 Laplacian 연산자이다.

$$\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

따라서 식 (1)에서 정의된 potential  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  및  $\phi_n$ 는 식(2)의 조건으로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\phi_{1x} + \phi_{2y} + \phi_{3z} + (3-4\nu)\phi_z = 0 \quad (3)$$

Mode I 인 경우 x-y 평면 즉, z=0에서  $\tau_{yz}=0, \tau_{zx}=0$  이고 u, v 가 z 에 대하여 우 함수이고 w가 z 에 대하여 기함수 이어야 한다. 따라서 식 (3)을 만족하고 위와 같은 조건을 만족하는 장은 한 개의 조화함수 G 로서 기술할 수 있다. 따라서 식 (1)에서 변위는

$$\begin{aligned} u &= -z G_{xz} - (1-2\nu) G_x, \\ v &= -z G_{yz} - (1-2\nu) G_y \end{aligned} \quad (5)$$

$$w = -z G_{zz} + 2(1-\nu) G_z$$

와 같이 되고 응력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2\mu\{ (z G_{xz})_z + 2\nu G_{yy} \}, \\ \sigma_y &= -2\mu\{ (z G_{yz})_z + 2\nu G_{xx} \}, \\ \sigma_z &= -2\mu(z G_{zzz} - G_{zz}), \\ \tau_{xy} &= -2\mu\{z G_{xyz} + (1-2\nu) G_{xy}\} \\ \tau_{yz} &= -2\mu z G_{yz} \\ \tau_{xz} &= -2\mu z G_{xz} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\mu$  는 강성계수 (shear modulus) 이다. 여기서 2 차원에서의 Laplacian을 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$$

식 (6)으로부터 균열 면에 작용하는 압력은

$$p(x, y) = 2\mu\Delta G(x, y, \pm 0) \quad (7)$$

on  $C^\pm$

와 같이 나타낼 수 있다. 조화함수 G 가 변수 z 에 대하여 우 함수이어야 하므로 G를 다음과 같은 한겹(single layer) 으로 된 위치에너지로 표현하자.

$$G(x, y, z) = \alpha \int_C f(\xi, \eta) R^{-1} d\eta d\xi \quad (8)$$

여기서,

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} ;$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$$

이다. 식 (8)로부터

$$w = \pm f(x, y) \text{ on } C^\pm \quad (9)$$

가 된다. 다음과 같은 적분 연산자를 정의하면

$$Tf = \alpha \int_C f(\xi, \eta) [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2} d\xi d\eta \quad (10)$$

균열 면에서의 위치에너지

$$g(x, y) = G(x, y, \pm 0) \text{ 는 } Tf = g \quad (11)$$

와 같이 쓸 수 있고 식 (7)은 다음과 같은 적분 미분 방정식으로 된다.

$$p(x, y) = 2\mu\Delta Tf \quad (12)$$

where  $(x, y)$  on  $C$

윗 식은 균열 면에 작용하는 압력  $p(x, y)$  가 주어졌을 때 함수  $f(x, y)$  즉 균열 개구 변위  $w(x, y)$ 를 구하는 문제가 된다. 균열 윗 면에서의 변위  $w$  가 주어지면 균열 끝을 따라 변하는 응력 확대 계수는 평면 변형의 점근 식[4]으로부터

$$w(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\mu} (1-\nu) h^{1/2} k(s) \quad (13)$$

와 같이 된다. 여기서  $h$  는 점  $(x, y)$ 에서 균열 끝  $s$  까지의 거리를 나타낸다. 따라서 모든 문제는 식 (12)로 주어진 적분 미분 방정식의 해를 구하는 것으로 귀착된다. 타원 균열인 경우에는 무한 공간에서의 타원 디스크에 의한 위치에너지를 이용하여 식 (12)의 해를 구할 수 있다. 즉, 타원 디스크상의 표면 밀도를  $\sigma(x, y)$  라 두면 위치 에너지는

$$\Phi(x, y, z) = \int_C \sigma(\xi, \eta) R^{-1} d\xi d\eta \quad (14)$$

와 같이 쓸 수 있다.

윗 식을 식 (8)과 비교하면

$$\sigma(x, y) = -\frac{w}{4\pi(1-\nu)} \quad (15)$$

Dyson [5] 에 의하면 타원 디스크 상에서의 밀도 또는 균열 개구 변위가

$$w(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \frac{1-\nu}{\mu E(k)} b p_0 f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \quad (16)$$

으로 주어질 때 균열 면에서 면적 적분으로 주어진 위치에너지 식 (14)를 다음과 같은 1차 적분으로 표현할 수 있다.

$\phi(x, y, 0)$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{ab^2 p_0}{8\mu E(k)} \int_0^\infty \frac{ds}{q(s)} E \left( 1 + \frac{s E}{2^2!} D + \frac{s^2 E^2 D^2}{2^4! 3 \cdot 2} \right. \\
 &\quad + \frac{s^3 E^3 D^3}{2^6! 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{s^4 E^4 D^4}{2^8! 4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\
 &\quad \left. + \dots \right) f\left(\frac{ax}{a^2+s}, \frac{by}{b^2+s}\right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

여기서  $a, b$  는 타원 균열의 장축과 단축을 뜻하고  $E(k)$  는  $k$  를 변수로 하는 제 2종 완전 타원적분이다. 즉,

$$\begin{aligned}
 E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta, \tag{18} \\
 k^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

이고 식 (17)에서  $p_0$  는 상수를 나타내고  $q(s)$ ,  $E$  및  $D$  는 각각 다음으로 주어진다.

$$q(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s} \tag{19}$$

$$E = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} \tag{20}$$

$$D = \frac{a^2+s}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{b^2+s}{b^2} \frac{d^2}{dy^2}$$

### 3. 뫼비우스 사상

여기서 해가 알려져 있는 균열 면의 좌표를

$z = x + i y$  라 두자. 평면  $z$  에서  $z'$  로의 뫼비우스 사상을 다음과 같이 두자.

$$z' = F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{22}$$

여기서  $a, b, c$ , 및  $d$  는 복소 상수이다. 식 (22)로부터 사상된 두 점 사이의 거리는

$$\begin{aligned}
 &|F(z) - F(\zeta)|^2 \\
 &= \left| \frac{ad-bc}{(cz+d)(c\zeta+d)} \right|^2 \cdot |z-\zeta|^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

와 같이 되고 뒷 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$|F(z) - F(\zeta)|^2 = |F'(z)| \cdot |F'(\zeta)| \cdot |z-\zeta|^2 \tag{24}$$

여기서  $F'(z)$  는  $z$  에 대한 미분을 나타낸다. 그리고 식을 간단히 하기 위하여

$$\begin{aligned}
 A^2(x, y) &= |F'(z)|, \\
 A^2(\xi, \eta) &= |F'(\zeta)|
 \end{aligned} \tag{25}$$

라 두자.

$z'$  평면에서의 위치에너지와 균열 변위와 관계는

$$\begin{aligned}
 g'(x, y) &= \\
 &a \int_C f(\xi, \eta) [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2} d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{26}$$

와 같이 되어 식 (24)로부터

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= A^3 \cdot f'(x', y') \\
 g(x, y) &= A \cdot g'(x', y')
 \end{aligned} \tag{27}$$

으로 된다. 여기서 좌표변환에 따른 Jacobian 은

$$\begin{aligned}
 d\xi d\eta &= J(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
 J(\xi, \eta) &= |F'(\zeta)|^2 = A^4(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{28}$$

으로 표현되는 것을 이용하였다. 그리고 2차원 Laplace 연산자의 변환은

$$\Delta L(x', y') = A^4 \Delta' L(x, y) \tag{29}$$

가 되어 균열 면에 작용하는 압력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(x, y) = 2\mu A^4 \Delta' [A(x', y') g'(x', y')] \tag{30}$$

여기서  $\Delta'$  는  $x', y'$  에 대한 2차원 Laplacian 연산자이다. 그리고 응력확대계수는

$$k(s) = A^4 k'(s) \tag{31}$$

으로 된다.

### 4. 사상에 의한 응력 확대계수 계산

여기서 우리는 위치에너지를 근사적으로 간단한 경우의 위치에너지  $G_n$  의 선형 조합으로 구하자. 즉,

$$\begin{aligned}
 G(x, y, z) \\
 \approx G^*(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \lambda_n G_n(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{32}$$

으로 가정하자. 식 (32)에서 위치에너지  $G^*$ 에 의한 균열 면에서의 압력은

$$2\mu \Delta G^*(x, y, 0) = 2\mu \Delta g^*(x, y) \tag{33}$$

와 같이 되므로 일정 압력과의 차이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2\mu \left[ -1 + \sum_{n=1}^N \lambda_n \Delta g_n \right] \tag{34}$$

여기서 계수  $\lambda_n$  은 Galerkin[7] 의 방법을 사용하여  $G_n$  에 의한 변위  $w_n$  에 대하여 식 (34) 으로 주어진다. 오차가 균열 면의 적분에 대한

여 수직으로 된다는 조건으로 구한다. 즉,

$$\iint_C \left[ -1 + \sum_{n=1}^N \lambda_n \Delta g_n \right] \cdot w_k \, dx dy = 0, \quad (35)$$

for  $k=1, 2, \dots, N$

에서 구한다. 식 (35) 는 다음과 같은 선형 연립 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\sum_{k=1}^N M_{kn} \lambda_n = q_k; \quad k=1, 2, \dots, N \quad (36)$$

여기서

$$M_{kn} = \iint_C w_k \cdot \Delta g_n \, dx dy \quad (37)$$

$$q_k = \iint_C w_k \, dx dy$$

이다. 식 (36)에서  $\lambda_n$ 이 구해지면 응력확대 계수는 식 (31)을 사용하여 구한다.

### 5. 예제

피비우스 사상을 이용한 균열 해석으로  $z$  평면에 존재하는 타원 균열과  $z$  평면에 존재하는

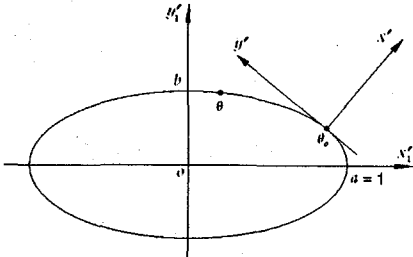


Fig.1 Elliptic crack with coordinates  $(x', y')$

균열이 다음과 같은 사상으로 변환되었다고 생각하자.

$$z = \frac{c}{c-z}, \quad (38)$$

$$z = x + iy,$$

$$z = x + iy$$

여기서 상수  $c$  는 크기는  $c$  와 같고 차원은 길이의 제곱이다. 계수  $c$  및  $c$  가 위의 조건을 만족할 때 식 (38) 은 단순 확대 및 축소를 제외한 모든 피비우스 사상을 표현할 수 있다. Fig.1 에서와 같이  $z=0$  즉, 타원 균열이 존

재하는 좌표의 원점은 타원 상에 있고  $x'$  의 방향은 타원에 수직된 방향이다. 식 (38)에서

$$F(z) = c - \frac{c}{z} \quad (39)$$

가 되고 따라서

$$A^2 = \frac{|c|}{x^2 + y^2} \quad (40)$$

$$= \frac{|c|}{(x'-c)^2 + y'^2}$$

가 된다. 여기서 타원의 곡선 좌표 계  $\theta$  를 사용하면 좌표 계  $z$  의 원점은

$$x_1 = a \cos \theta_0, \quad y_1 = b \sin \theta_0 \quad (41)$$

가 되고 원점이 타원 중심인 좌표 계  $z_1 = x_1 + iy_1$  와  $z$  와 의 관계는 다음과 같다.

$$x_1 = x \frac{n_1 - y}{n_2 + a \cos \theta_0} \quad (42)$$

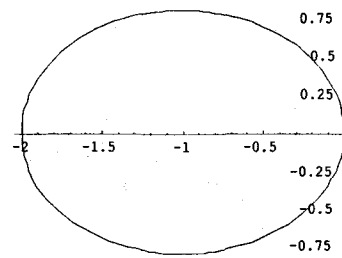
$$y_1 = x \frac{n_2 + y}{n_1 + b \sin \theta_0}$$

여기서

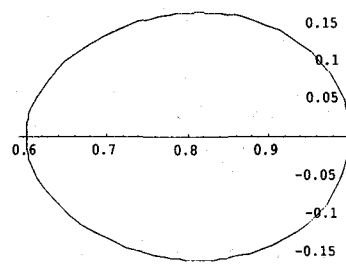
$$n_1 = \frac{b \cos \theta_0}{N}, \quad n_2 = \frac{a \sin \theta_0}{N} \quad (43)$$

$$N = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta_0 + b^2 \cos^2 \theta_0}$$

이다.



(a)



(b)

Fig.2 (a) Elliptic crack ( $a=1, b=0.8$ )  
(b) Image by Mobius mapping

사상의 Jacobian에 따라 식 (30)으로 주어지는 사상 균열에서의 압력이 매우 급격하게 변하므로 [1] 여기서는 타원균열의 모양이 조금 변하는 경우에 대하여 예를 들어보자.

$z'$  평면에 존재하는 타원 균열의 형태를  $a=1, b=0.8$  을 택하고 좌표의 원점은  $\theta_0=0$  상에 두고  $c=3$  으로 놓았다.

Fig. 2 는 이들 변수에 의한 타원과 피비우스 사상에 의한 사상된 모양을 보여 주고 있다. 여기서 우리가 구하고자하는 것은 사상된 균열에 일정한 압력이 작용할 때 균열 끝을 따라서 응력확대 계수가 어떻게 변하는지를 구하고자 한다.

타원 균열에 일정한 압력  $p_0$  가 작용할 때 Boussinesq-Papkovich Potential 은 식 (16) 및 (17)에서 함수  $f(x,y)$ 를 상수(constant) 1 로 두면 된다. 여기서  $f(x,y)=1$  일 때 타원 균열 표면에서의 위치에너지를  $F_0$  라 두면 사상된 균열 면에 작용하는 압력  $p$  는 식(30) 과 (17)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{b^2}{4\sqrt{\epsilon} E(k)} A^4 \mathcal{A}'(A, F_0) \quad (44)$$

여기서

$$\epsilon = \frac{b}{a}$$

이다.

식 (44) 에서와 같이 사상된 균열에서의 압력이 균열 면에서 일정하지 않으므로 알려진 해 (solution)들을 중첩하여 근사적으로 균열 면에서의 압력을 일정하게 만들 수 있다.

즉, 식 (32) ~ (37)에서와 같이 Galerkin 의 방법을 사용하여 선형 중첩에 사용되는 계수를 구하면 된다. 여기서는 식(37)에서의 적분을 피하기 위하여 최소 자승법을 사용하기로 하자.

즉, 사상된 균열 표면에 일정한 점들을 택하고 이들 점에서의 압력이  $p_0$  에 근사하도록 선형 중첩의 계수를 구한다.

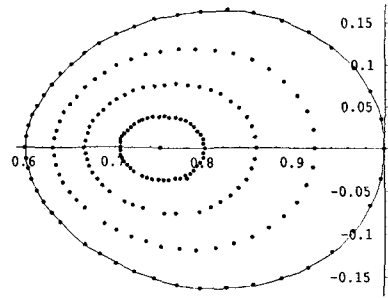


Fig.3 Points on the crack face for the least square method

Fig.3 은 최소 자승법 계산을 위하여 택한 193개의 점들을 보여 주고 있다. 식 (44)에서  $p$  즉, 사상 균열 면에서의 압력을  $p_0$  라 두고 식 (17)에서  $f(x,y)$ 를  $n$ 차원 다항식으로 택하면 최소 자승법으로 구해야할 계수  $\lambda_n$  은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' A(x', y') &= \sum_{i=0}^n (\lambda_i F_i) \\ &= \frac{4\sqrt{\epsilon} E(k)}{b^2 A^4(x, y)} \end{aligned} \quad (45)$$

여기서 다음과 같은 행렬을 정의하면

$$R = [r_{ij}], \quad d = [d_i] \quad (46)$$

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \mathcal{A}' A(x_i, y_j) F_j(x_i, y_j) \\ d_i &= \frac{4\sqrt{\epsilon} E(k)}{b^2 A^4(x_i, y_i)} \end{aligned}$$

계수  $\lambda_n$  는

$$\lambda_n = (R^T R)^{-1} R^T d$$

으로 주어진다. 식 (46)에서 첨자  $i$  는 1에서 193 까지 변하고 첨자  $j$  는 0에서  $n$  까지 변한다. 본 예제에서는 5차 다항식까지를 사용하였다. 최소 자승법으로 계산된  $\lambda_n$  의 값은 표1과 같다. 5차 다항식까지 사용하여 최소 자승법으로 사상된 균열 면에서의 압력을 계산한 결과 최대 오차는 균열 끝에서 발생했으며 일정 압력을 1로 했을 때 약 0.918 이었다. 균열 면에서의 압력분포는 Fig.4 와 같다. 그리고 사상된 균열 끝을 따라 변하는 응력 확대계수는 Fig.5 와 같다.

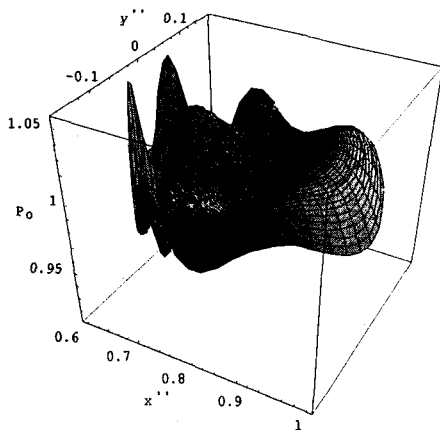


Fig.4 Pressure distribution on the image crack face

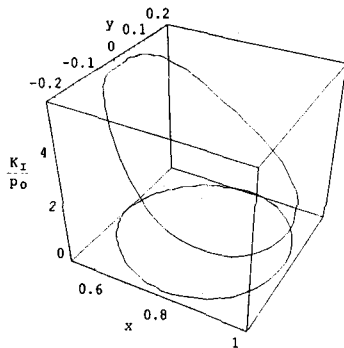


Fig.5 Stress Intensity Factors along the crack tip in the image crack

Table 1 Coefficients  $\lambda_n$  in the expression eq.(32)

$f(x, y)$	1	$x$	$y$	$x^2$
$\lambda_n$	0.0605598	0.0570443	0	0.0224545
$f(x, y)$	$y^2$	$x^3$	$x^2y$	$xy^2$
$\lambda_n$	0.00610807	-0.00186245	0	-0.00526567
$f(x, y)$	$y^3$	$x^4$	$x^3y$	$x^2y^2$
$\lambda_n$	0	0.00222309	0	0.0000588202
$f(x, y)$	$xy^3$	$y^4$	$x^5$	$x^4y$
$\lambda_n$	0	-0.0029561	-0.000995617	0
$f(x, y)$	$x^3y^2$	$x^2y^3$	$xy^4$	$y^5$
$\lambda_n$	-0.00348302	0	-0.00264044	0

## 6. 결론

본 논문에서는 뫼비우스 사상을 이용하여 타원 균열로부터 사상된 균열에 일정한 압력이 작용하는 경우에 대한 응력 확대계수를 구하는 방법을 제시하였다. 예제를 통하여 Dyson 의 공식과 최소 차승 법을 사용하여 사상된 균열에 대한 응력 확대계수를 구하였다.

## 참고문헌

- (1) 안득만, 1995년, 선형분수사상을 이용한 3차원 균열해석, 대한기계학회 논문집 제19권 제1호, pp. 61-78.
- (2) Green, A. E. and Zerna, W. A. ,1968, Theoretical Elasticity, Oxford University Press,
- (3) Sih, G.C. and Liebowitz, H., 1968, Fracture : an Advanced Treatise, Edited by Liebowitz, H., Academic Press, Vol. II, pp. 67- 190.
- (4) Bueckner, H. F. ,1973, Field Singularities and Related Integral Representations, Mechanics of Fracture I : Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Edited by Sih, G.C. , Noordhoff, Leyden, pp.239-314.
- (5) Dyson, F.W., 1891, " The Potentials of Ellipsoids of Variable Densities," Quart. J. Math. Oxford Ser., Vol.25, pp. 259-288.
- (6) 안 득만,1994, " 타원 균열에 대한 Mode I 무계함수 계산," 부산대학교 생산기술연구소 논문집 제47집, pp. 129-141.1.