하이퍼큐브와 계층적 Folded 하이퍼큐브 사이의 시뮬레이션 알고리즘

이형옥°, 이병만
한 국 전 산 원
e-mail:{leeok,lbm}@nca.or.kr

Simulation Algorithms Between Hypercube and Hierarchical Folded Hypercube

Lee Hyeong-Ok°, Lee Byoung-Man
National Computerization Agency

요약

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 $HFN(n,n)$과 $2n$-hypercube 사이의 임베딩을 분석한다. $2n$-hypercube를 $HFN(n,n)$에 연장율 3에 임베딩 가능함을 보이고, $HFN(n,n)$을 $2n$-hypercube에 임베딩하는 비용이 $O(n)$임을 보인다.

1. 서 론

병렬처리 컴퓨터는 크게 공유 기억장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산기억장치를 갖는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억장치를 갖고, 각 프로세서는 상호 연결망(interconnection network)에 의해 연결되어 있으며, 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 이루어진다. 상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현할 수 있다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k \times n$으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류가 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[5,6].

n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 2^n개의 노드와 $n2^{n-1}$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n-비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재한다. n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 분지수와 지름이 각각 n을 가지면서 망비용이 n^2을 갖는다[1,7,9]. 이러한 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭성을 갖고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도 및 재귀적 구조를 가져서 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 기존의 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼큐브의 지름을 1/2로 개선한 Folded-hypercube가 제안되었다.

또한, 하이퍼큐브와 Folded-하이퍼큐브의 장점을 가지면서 망비용을 개선한 상호 연결망으로 Hierarchical Folded-hypercube Network $HFN(n,n)$가 제안되었다.

본 논문에서는 $HFN(n,n)$과 $2n$-hypercube 사이의 임베딩을 분석한다.

상호 연결망의 임베딩은 어떤 연결망 G가 다른 연결망 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를

알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상(mapping)하는 것이다. 연결망 G가 연결망 H에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G에서 개발된 알고리즘을 연결망 H에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호 연결망에서 임베딩 문제는 매우 중요하다.

본 논문의 주요 연구결과는 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}를 $HFN(n,n)$에 연장율 3에 임베딩 가능함을 보이고, $HFN(n,n)$을 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}에 임베딩하는 비용이 $O(n)$임을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 관련연구에 대하여 논하고, 3장에서는 $HFN(n,n)$과 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 사이의 임베딩을 보이고, 4장에서 결론을 맺는다.

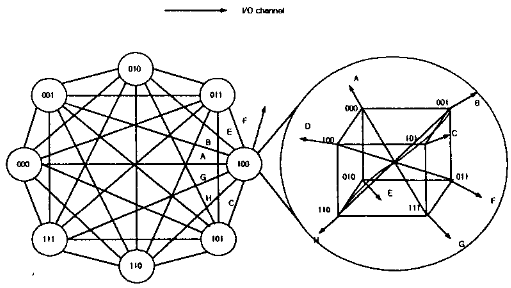
2. 관련연구

n-차원 하이퍼큐브 Q_n는 2^n 개의 노드와 $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n-비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 있다 [4,8].

하이퍼큐브의 단점은 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 것이다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 문제를 극복하기 위한 연결망으로 Folded-하이퍼큐브[3], $HCN(n,n)$, $HFN(n,n)$[2] 등이 제안되었다.

Folded-하이퍼큐브는 하이퍼큐브의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 것으로, 노드들의 주소는 보수관계에 있다. n차원 하이퍼큐브의 지름과 비교할 때 Folded-하이퍼큐브의 지름은 절반으로 줄어든다.

$HFN(n,n)$은 Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용하고, 2^{2n}개의 노드들을 가지고 $(n+2)2^{2n-1}-2^{n-1}$개의 에지들을 가지며, 분지수는 $n+2$이다. $HFN(n,n)$의 각 노드는 $HFN(I,J)$와 같이 두 개의 주소로 구성이 된다. I는 기본 모듈을 인식하고, J는 기본 모듈 내의 노드를 인식한다. 기본 모듈 안의 에지들은 내부 에지라고 말한다. 두 개의 기본 모듈 사이의 에지들은 외부 에지라고 하는데, non-diameter link를 말한다. non-diameter link는 $I(0\le I\le(2^n-1))$와 $J(0\le J\le(2^n-1))$가 같지 않을 때 노드 $HFN(I,J)$와 $HFN(J,I)$ 사이의 외부 에지를 말한다.



[그림 1] $HFN(3,3)$의 구조

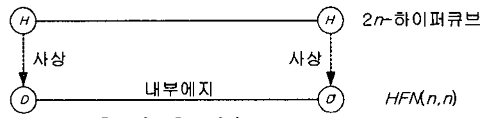
3. 임베딩

정리 1 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}은 $HFN(n,n)$에 연장율 3에 임베딩 가능하다.

증명 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 $H=(h_1h_2...h_nh_{n+1}....h_{2n})$와 $H'=(h'_1h'_2...h'_nh'_{n+1}....h'_{2n})$는 i-차원 에지$(1\le i\le 2n)$에 의해 인접한 노드라 가정하고, $HFN(n,n)$의 노드 $D=(d_1d_2...d_n,d_{n+1}...d_{2n})$, $D'=(d'_1d'_2...d'_n,d'_{n+1}...d'_{2n})$라 가정하자.

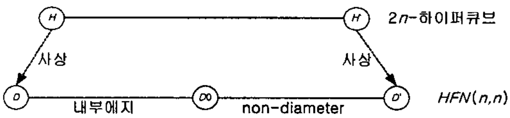
Q_{2n}의 노드 H를 $HFN(n,n)$의 노드 D로 Q_{2n}의 노드 H'를 $HFN(n,n)$의 노드 D'로 사상했을 때, D의 비트스트링에서 D'의 비트스트링을 연결하는데 적용되는 $HFN(n,n)$의 에지의 개수를 통하여 연장율을 분석한다. 노드 H와 인접한 H'의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1. $h_1h_2...h_n=h'_1h'_2...h'_n$이고 $h_{n+1}...h_{2n}\neq h'_{n+1}...h'_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H가 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n,d'_{n+1}...\overline{d}_j...d'_{2n})$이다$(1\le i\le n,\ n+1\le j\le 2n)$. 노드 D와 D'의 비트스트링에서 $d_i=d'_i$, $1\le i\le n$이고, 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 D와 D'는 $HFN(n,n)$의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, $HFN(n,n)$의 정의에 의해 노드 D와 D'는 서로 인접한 노드이다. 따라서 Q_{2n}의 노드 H와 H'를 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



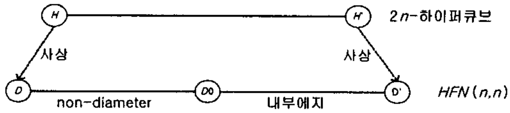
[그림 2] 경우 1

경우 2. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h_1h_2...h_n = h'_{n+1}...h'_{2n} = h_{n+1}...h_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H가 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$이다($1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le 2n$). 노드 D와 D'의 비트스트링에서 $di \neq d'i$, $1 \le i \le n$이므로 D와 D'는 $HFN(n,n)$의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$를 기본 모듈 내부에 있는$(d_1d_2...d_i...d_n,d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n,d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n)$는 non-diameter link에 의해 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d_1d_2...d_i...d_n)$에 연결이 된다. $d_1d_2...d_i...d_n$와 $d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n}$는 같다고 했으므로 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n, d_1d_2...d_i...d_n)$와 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$는 같다. 따라서 Q_{2n}의 노드 H와 H'를 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 2에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



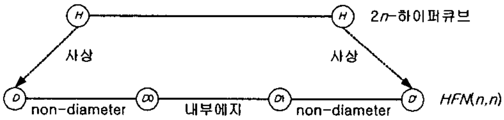
[그림 3] 경우 2

경우 3. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h'_1h'_2...h'_n = h_{n+1}....h_{2n} = h'_{n+1}...h'_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H가 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1d_2...\overline{d_i}...d_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n,d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$이다($1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le 2n$). 노드 D와 D'의 비트스트링에서 $di \neq d'i$, $1 \le i \le n$이므로 D와 D'는 $HFN(n,n)$의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 $(d_1d_2...\overline{d_i}...d_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$를 non-diameter link에 의해$(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d_1d_2...\overline{d_i}...d_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d_1d_2...\overline{d_i}...d_n)$를 모듈 내부에 있는 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d'_1d'_2...d'_i...d'_n)$에 연결한다. $d'_1d'_2...d'_i...d'_n$와 $d_{n+1}...d_j...d_{2n}$와 $d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n}$는 같다고 했으므로 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d'_1d'_2...d'_i...d'_n)$은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n,d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$와 같다. 따라서 Q_{2n}의 노드 H와 H'를 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 2에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 4] 경우 3

경우 4. $h_{n+1}...h_{2n} = h'_{n+1}...h'_{2n}$ 이고 $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H가 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 D의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$이고, 노드 H'가 사상된 노드 D'의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$이다($1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le 2n$). 사상된 $HFN(n,n)$의 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$를 non-diameter link에 의해 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d_1d_2...d_i...d_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d_1d_2...d_i...d_n)$를 모듈 내부에 있는 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n)$에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n},d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n)$를 non-diameter link에 의해$(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$에 연결한다. $d_{n+1}...d_j...d_{2n}$와 $d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n}$는 같다고 했으므로 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n,d_{n+1}...d_j...d_{2n})$와 $(d'_1d'_2...\overline{d'_i}...d'_n, d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$는 같다. 따라서 Q_{2n}의 노드 H와 H'를 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'에 각각 사상할 때 연장율 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 5] 경우 4

이상의 4가지 경우에서 증명한 바와 같이 하이퍼큐브 Q_{2n}를 $HFN(n,n)$에 임베딩을 하기 위해 필요한 연장율은 3이다.

정리 2 $HFN(n,n)$을 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}에 임베딩하는 비용은 $O(n)$이다.

증명 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 $H=(h_1h_2...h_nh_{n+1}....h_{2n})$와 $H'=(h'_1h'_2...h'_nh'_{n+1}....h'_{2n})$는 i-차원 에지($1 \le i \le 2n$)에 의해 인접한 노드라 가정하고, $HFN(n,n)$의 노드 $D=(d_1d_2...d_n,d_{n+1}...d_{2n})$, $D'=(d'_1d'_2...d'_n,d'_{n+1}...d'_{2n})$라 가정하자.

$HFN(n,n)$의 노드 D를 Q_{2n}의 노드 H로 $HFN(n,n)$의 노드 D'를 Q_{2n}의 노드 H'로 사상했을 때, H의 비트스트링에서 H'의 비트스트링을 연결하는데 적

용되는 Q_{2n}의 에지의 개수를 통하여 연장율을 분석한다. 노드 D와 인접한 D'의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1. $d_1d_2...d_n=d'_1d'_2...d'_n$이고 $d_{n+1}...d_{2n} \neq d'_{n+1}...d'_{2n}$ 일 때 : $HFN(n,n)$의 노드 D가 사상된 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H의 비트스트링은 $(h_1h_2...h_i...h_nh_{n+1}...h_j...h_{2n})$이고, 노드 D'가 사상된 노드 H'의 비트스트링은 $(h'_1h'_2...h'_i...h'_nh'_{n+1}...\overline{h'}_j...h'_{2n})$이다($1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 H와 H'의 비트스트링에서 $hi=h'i$, $1 \leq i \leq n$이고, 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 H와 H'는 Q_{2n}의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, Q_{2n}의 정의에 의해 노드 H와 H'는 서로 인접한 노드이다. 따라서 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'를 Q_{2n}의 노드 H와 H'에 각각 사상할 때 연장율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 2. $d_1d_2...d_n=d'_1d'_2...d'_n$이고 $d_{n+1}...d_{2n}$과 $d'_{n+1}...d'_{2n}$ 이 보수관계일 때 : $HFN(n,n)$의 노드 D가 사상된 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H의 비트스트링은 $(h_1h_2...h_i...h_nh_{n+1}...h_j...h_{2n})$이고, 노드 D'가 사상된 노드 H'의 비트스트링은 $(h'_1h'_2...h'_i...h'_n\overline{h'_{n+1}...h'_j...h'_{2n}})$이다($1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 H와 H'의 비트스트링에서 $hi=h'i$, $1 \leq i \leq n$이므로 노드 H와 H'는 Q_{2n}의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, Q_{2n}의 정의에 의해 노드 H와 H'가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링만큼의 에지가 필요하다. 따라서 H와 H'가 연결되기 위해서는 n개의 에지가 필요하므로 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'를 Q_{2n}의 노드 H와 H'에 각각 사상할 때 연장율 n에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3. $d_1d_2...d_n \neq d'_1d'_2...d'_n$일 때 : $HFN(n,n)$의 노드 D가 사상된 하이퍼큐브 Q_{2n}의 노드 H의 비트스트링은 $(h_1h_2...h_i...h_nh_{n+1}...h_j...h_{2n})$이고, 노드 D'가 사상된 노드 H'의 비트스트링은 $(h'_1h'_2...h'_i...h'_nh'_{n+1}...h'_j...h'_{2n})$이다($1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 H와 H'의 비트스트링에서 $hi \neq h'i$, $1 \leq i \leq n$이므로, 노드 H와 H'는 Q_{2n}의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있다. Q_{2n}의 정의에 의해 노드 H와 H'가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링만큼의 에지가 필요하다. 노드 H와 H'가 non-diameter로 연결될 때 $h_1h_2...h_i...h_n$과 $h_{n+1}...h_j...h_{2n}$가 보수관계이면 가장 많은 수의 에지를 필요로한다. 노드 H와 H'의 비트스트링은 $2n$개이므로 두 노드의 연결을 위해 필요한 에지의 개수는 $2n$이다. 그러므로 $HFN(n,n)$의 노드 D와 D'를 Q_{2n}의 노드 H와 H'에 각각 사상할 때 연장율 $2n$에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이 $HFN(n,n)$을 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}에 임베딩을 하기 위해 필요한 비용은 $O(n)$이다.

4. 결론

본 논문에서는 $HFN(n,n)$과 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}사이의 임베딩을 분석했다. $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}를 $HFN(n,n)$에 연장율 3에 임베딩 가능함을 보였고, $HFN(n,n)$을 $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}에 임베딩하는 비용이 $O(n)$임을 보였다. 이러한 결과는 하이퍼큐브와 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩 결과를 분석함으로써, $2n$-차원 하이퍼큐브 Q_{2n}에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 $HFN(n,n)$에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미하고, 하이퍼큐브의 변형된 연결망과 $HFN(n,n)$의 관계를 분석할 수 있음을 의미한다.

참 고 문 헌

[1] N. Corp, "NCUBE/ten : an Overview," November 1985.
[2] D. R. Duh, G. H. Chen and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 6, No. 7, pp.714-723, 1995.
[3] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 2, No. 1, pp.31-42, 1991.
[4] F. Harary, J. P. Hayes, and H-J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercube Graphs," Comput. Math. Appl., Vol. 15, pp.277-289, 1988
[5] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.
[6] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.
[7] S. Ranka, Y. Won and S. Sahni, "Programming a Hypercube Multiprocessor," IEEE Software, Vol. 5, pp. 69-77, 1988.
[8] Y. Saad and M. H. Schutltz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
[9] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp. 800-803, Dec. 1993.