



## 2 차원 벽구동 캐비티유동 분기현상의 수치해석

조 지룡, 홍 상표

인제대학교 기계공학과

E-mail: [mechjrc@ijnc.inje.ac.kr](mailto:mechjrc@ijnc.inje.ac.kr)

### Numerical analysis for Bifurcation phenomenon in a Two dimensional wall-driven cavity flow

Ji Ryong Cho, Sang Pyo Hong

본 연구에서는 2 차원 벽구동 캐비티 유동에 의하여 나타나는 이력효과에 의한 분기(Bifurcation)현상을 전산유체기법을 사용하여 연구하였다. 캐비티는 북쪽과 동쪽벽이 움직일 수 있고, 다른 두 벽은 고정되어있는 구조이다. 실험은 Reynolds 수 100 에서 1000 까지 증가시켜가면서 북쪽벽과 동쪽벽을 동시에 가속 시켜 정상상태에 이르게 한 경우와 북쪽벽이 먼저 가속되어 정상해에 이른 후 동쪽벽을 나중에 가속하여 재차 정상상태에 이르게한 경우를 비교하였다. 그 결과 Reynolds 수가 약 200 이상부터 벽에 작용하는 항력, 유량함수의 값, 재부착점등이 분기현상을 나타냄을 확인하였다.

**Keywords:** 분기(Bifurcation), 이력효과 (History Effect), 캐비티 유동(Cavity Flow), 임계 Reynolds 수(Critical Reynolds Number), 순수 벡터 포텐셜 방법 (Pure Vector Potential Method), 1-방정식 방법 (One Equation Method)

#### 1. 서론

유체유동을 기술하는 Navier Stokes 방정식은 대류항이 가지는 비선형성으로 인해서 다중정상해를 가질 수 있는 가능성이 있고, 이로 인해 나타나는 다중해(Multiple solution)와 분기(Bifurcation)현상에 대한 연구가 국내에서 많이

보고 되고있다.

국내에서는 정 등[1]은 수평동심환상 공간내의 자연대류에 대한 연구에서 Rayleigh 수가 커짐에 따라 열적 불안정성으로 인해 다중셀구조가 나타남을 수치실험을 통하여 나타내고, 이 다중셀 구조에 대해서 동심환의 반경비와 Prantl 수를 인자로 하여 다중셀 구조로 분기되는 천이

구역을 찾아내었다. 강 등[2]은 윗면이 오른쪽에서 왼쪽으로 기울어진 사다리꼴 밀폐공간내에서 윗면이 냉각되고 아랫면이 가열될 때 높은 Rayleigh 수에서 관성력, 부력 그리고 점성력의 평형상태에 따라서 분기 현상을 나타냄을 보고하였다. 유 등[3]은 공간주기적인 온도분포를 갖는 두 평행판 사이에서 일어나는 자연대류에 대한 연구에서 Rayleigh 수의 증가에 따른 분기현상의 증가를 데이터로 보고 하였다. 조 등[4]은 2 차원 벽구동 캐비티 유동에서 경계조건을 부여시점을 다르게 주었을 때 Reynolds 수가 충분히 큰 조건에서 다중해가 나타남을 보였다.

본 연구에서는 2 차원 벽구동 캐비티에서 발생하는 분기현상을 수치실험을 통하여 분석하였다. Reynolds 수는 100에서 1000까지 증가시키며 실험 하였으며, 캐비티는 북쪽벽과 동쪽벽을 움직일 수 있고, 나머지 두 벽은 고정되어 있는 구조이다(Fig. 1).

## 2. 유동장의 정식화

### 2.1 와도-벡터 포텐셜 방정식

본 연구에서는 비압축성, 비정상 유체유동에 관심이 있으며, Navier-Stokes 방정식은 Cartesian 좌표계에서 와도  $\omega_i$  와 벡터 포텐셜  $\psi_i$  의 방정식으로 무차원화 하여 쓰여질 수 있다 [5].

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} = -\omega_i \quad (2)$$

여기서 Re 는 유동의 Reynolds 수를 나타내며,

와도와 벡터 포텐셜은 속도벡터  $u_i$  를 이용하여 다음과 정의되었다.

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (3a)$$

$$u_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad (3b)$$

윗 식 (1), (2)와 (3b)를 이용하면 임의의 3 차원 유동장을 해석할 수 있다. 이 경우 상기의 식들은 잘 알려진 와도-유량함수 방법으로 귀결이 된다. 2 차원의 경우는 와도와 벡터 포텐셜이 다음과 같이 표현이 되고

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega \\ \psi_x = \psi_y = 0 \quad \psi_z = \psi \end{aligned} \quad (4)$$

속도성분은

$$u = \partial \psi / \partial y \quad v = -\partial \psi / \partial x \quad (5)$$

로 주어진다. 이를 윗 식(1)과 (2)에 적용을 하면

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega - \varepsilon_{ij3} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (6)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (7)$$

여기서  $\Delta$  는 Laplace 연산자이다. 이 두식에서 와도를 소거하면 2 차원 비정상 유동에 대한 순수 벡터 포텐셜 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta (\Delta \psi) - \varepsilon_{ij3} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (8)$$

### 2.2 좌표변환과 유한차분식

유동의 경계가 임의의 형태로 주어지는 보다 일반적인 상황하에서도 앞으로 전개할 수치적 알고리즘을 적용시키기 위하여 앞 절에서 제시한 방정식들을 다음과 같이 물리적 공간  $(x, y)$  에서 계산공간  $(\xi, \eta)$  으로 좌표변환을 수행한다.

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x_j} = \frac{g_{jm}}{J} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_m} \quad (9a)$$



$$J = g_{x\xi} g_{y\eta} - g_{x\eta} g_{y\xi} \tag{9b}$$

$$g_{x\xi} = \partial y / \partial \eta \quad g_{x\eta} = -\partial y / \partial \xi \tag{9c}$$

$$g_{y\xi} = -\partial x / \partial \eta \quad g_{y\eta} = \partial x / \partial \xi$$

이 좌표변환 관계를 식(8)에 적용하면 계산공간에서의 2 차원 벡터 포텐셜에 대한 수송량 방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \tilde{\Delta} \psi}{\partial t} = G(\psi) \tag{10a}$$

$$G(\psi) = \varepsilon_{ij3} \frac{g_{im} g_{jn}}{J} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{h^{mn}}{Re} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi_n} \right) \tag{10b}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{J} \tilde{\Delta} \psi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( h^{mn} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \right) \tag{11}$$

$$h^{mn} = g_{jm} g_{jn} / J \tag{12}$$

식 (10a-b)에 대하여 여러가지의 차분화 식을 고안 할 수 있겠으나, 본 연구에서는 시간에 대해서는 Crank-Nicolson 방법을 적용하고, 공간좌표에 대해서는 중심차분을 취하여, 시공간에 대하여 모두 2 차의 정확도를 가지도록 하였다.

$$\tilde{\Delta} \psi_D^{n+1} = \delta t (G(\psi^{n+1}) + G(\psi^n)) / 2 + \tilde{\Delta} \psi^n - \tilde{\Delta} \psi_{OD}^{n+1} \tag{13}$$

여기서  $\delta t$  는 적분 시간간격을, 상첨자  $n$  은 적분 시점을 나타낸다. 이 식의 수치해를 구하기 위하여  $\tilde{\Delta} \psi^{n+1}$  의 대각선 성분인  $\tilde{\Delta} \psi_D^{n+1}$  만으로 시스템 매트릭스를 구성하며, 비대각선 성분인  $\tilde{\Delta} \psi_{OD}^{n+1}$  과 플럭스항  $G(\psi^{n+1})$  은 겉보기 원천항으로 처리를 하고, 주어진 시점에서 수렴된 해를 구하기 위하여 하부 반복계산 (Sub-iteration)

을 수행한다.

$$a_{i,j} \psi_{i,j}^{n+1,k+1} - a_{i+1,j} \psi_{i+1,j}^{n+1,k+1} - a_{i-1,j} \psi_{i-1,j}^{n+1,k+1} - a_{i,j+1} \psi_{i,j+1}^{n+1,k+1} - a_{i,j-1} \psi_{i,j-1}^{n+1,k+1} = -H_{i,j}^k \tag{14}$$

for  $2 \leq i \leq NI-1$  and  $2 \leq j \leq NJ-1$

여기서 계수들은 다음과 같이 표시되고

$$a_{i+1,j} = \left( h_{i+1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2$$

$$a_{i-1,j} = \left( h_{i-1,j}^{\xi\xi} + h_{i,j}^{\xi\xi} \right) / 2$$

$$a_{i,j+1} = \left( h_{i,j+1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2$$

$$a_{i,j-1} = \left( h_{i,j-1}^{\eta\eta} + h_{i,j}^{\eta\eta} \right) / 2 \tag{15a}$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \tag{15b}$$

$$H_{i,j}^k = \frac{\delta t}{2} (G_{i,j}^{n+1,k} + G_{i,j}^n) + \tilde{\Delta}_{i,j} \psi^n - \tilde{\Delta}_{i,j} \psi_{OD}^{n+1,k} \tag{15c}$$

$k$  는 하부 반복계산 횟수를 나타낸다. 식 (14)는 TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)를  $\xi$  방향과  $\eta$  방향으로 교차로 적용하여 해를 구한다. 충분히 수렴된 해가 얻어지면 다음 시간 단계로 진행을 하여 비정상유동에 대한 해를 구하는 과정을 반복한다. 이 과정에서 속도 성분은 필요할 시점에서만 다음과 같이 구하면 된다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{g_{ym}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \tag{16a}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g_{xm}}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \tag{16b}$$

### 2.3 경계조건

식 (15)를 풀기 위해서는 경계면에서의 벡터 포텐셜  $\psi$  와 플럭스 항에 포함이 되는  $\Delta \psi$  의 경계면에서의 값을 부여하여야 한다. 이차원 유동의 경우  $\psi$  값은 손쉽게 구할 수 있다. 반면  $\Delta \psi$  는 유동 경계면에서

$$J\Delta\psi = h^{\xi\xi} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + h^{\eta\eta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + 2h^{\xi\eta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} + \left(\frac{\partial h^{\xi\xi}}{\partial\xi} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial\eta}\right) \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial h^{\eta\eta}}{\partial\eta} + \frac{\partial h^{\xi\eta}}{\partial\xi}\right) \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (17)$$

로 주어진다. 경계면에서의 벡터 포텐셜의 1 차 미분항은 물리적 속도벡터 성분  $(u, v)$  과 계산공간에서의 속도성분  $(u_\xi, u_\eta)$  관계를 이용하여 결정한다. 즉, 식 (16)에서

$$u_\xi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = g_{x\xi}u + g_{y\xi}v \quad (18a)$$

$$u_\eta \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = g_{x\eta}u + g_{y\eta}v \quad (18b)$$

이 관계는 또한 2 차의 교차미분  $\partial^2\psi/\partial\xi\partial\eta$  의 평가에도 적용이 된다. 나머지 2 차 미분항들은 경계면을 따라서는 중심차분법으로, 경계면에 수직인 방향은 편방향 차분(One-sided difference) 을 하되 공간좌표 격자간격에 대하여 대하여 공히 2 차의 정확도를 가지도록 차분화를 하였다.

### 3. 수치실험 결과 및 토의

수치해석은 정방형 용덩이의 폭, 벽면의 이동속도, 그리고 유체의 점성에 의하여 주어지는 Reynolds 를 100 에서 1000 까지 증가시키며 실험하였고, 계산에 사용된 격자계는 x 및 y 방향으로 각기 81 개의 등간격 격자계를 사용하였다. 캐비티 내부의 초기 유동상태는 정지 상태에 있다고 가정하였다(Fig.1).

초기경계조건의 부여 방법은 Fig. 2 처럼 (a)의 경우는 북쪽벽과 동쪽벽을 동시에 가속시켜 점차적으로 정상상태에 도달하는 경우이고, (b)의 경우는 북쪽벽이 먼저 가속되어 정상

상태(t=100)에 도달한 후에 동쪽벽을 가속하여 재차 정상상태에 도달하도록 하였다. 적분 시간간격은 다음과 같이 Courant 수가 1 이 되도록 하였다:  $C \equiv U_{REF}\delta t/\delta x = 1$ , 식 (14)를 계산할 때 안정된 계산과 함께 수렴속도를 증진시키기 위하여 SOR 을 적용하였는데, 현재의 시스템 매트릭스 구조에서는 많은 수치실험 결과 Courant 수가 1 이고 약간의 over relaxation 을 적용할 때 ( $\beta=1.03-1.11$ ) 가장 효율적인 계산이 수행되었다. 하부 반복계산에

$$\text{수렴의 판정은 } |\psi^{n+1,k+1} - \psi^{n+1,k}|_{\max} < 10^{-5}$$

로 하였으며 이때 질량의 불평형의 최대치  $|\partial u_i / \partial x_i|_{\max}$  는 전체 계산과정에서  $0.3 \times 10^{-5}$  보다도 작았다.

Fig. 3 은 대표적인 두 Reynolds 수  $Re=100$  인 경우와  $Re=400$  인 경우 정상 상태에서의 유선을 나타낸다.  $Re=100$  인 경우에는 경계조건의 부여 방법과 무관하게 동일한 유선형태가 얻어지지만,  $Re=400$  인 경우에는 경계조건의 부여방법에 따라 정상 상태의 해가 서로 다른 모습을 가짐이 확인되고 있다. 유선의 Dash line 은 음의 유동함수 값을 나타내고 Solid line 은 양의 유동함수 값을 나타낸다. Reynolds 수가 100 일 때 (a)의 경우와 (b)의 경우가 동일하게 좌하부 모서리점과 우상부 모서리점을 잇는 대각선을 기준으로 mirror image 를 보여 일반적인 예견과 같다. 그러나 Reynolds 수가 더 높아져서 400 일 때는 (c)의 경우는 Reynolds 수 100 일때와 마찬가지로 대칭적 유동형태를 보이지만 (d)의 경우는 이력



효과로 인한 분기현상으로 음의값을 갖는 유동세포가 양의 값을 갖는 유동세포의 크기보다 현저히 커진 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 Reynolds 수가 400 인 경우 캐비티의 수평과 수직축을 지나는 x 축방향의 속도 성분 U와 y 축방향 속도 성분 V를 각각 x와 y 좌표에 따라서 나타낸 것이다. (a)와 (b) 두 그림에서 Normal 은 캐비티의 북쪽벽만 움직이는 경우이고, Symmetric 은 북쪽벽과 동쪽벽이 같이 움직였을 경우, 즉 좌표 (0,0) 과 (1,1)을 잇는 대각선을 기준으로 mirror image를 나타내는 경우이며, Un-Symmetric 은 이력효과로 인해 mirror image 가 깨어진 경우이다. Normal 인 경우의 x 축 속도 성분 U 는 이미 Ghia 등의 정상상태 수치해와 비교하여 입증한 바 있다.[5] Symmetric 한 경우와 Un-Symmetric 한 경우는 경계조건에 따라 통상적인 예견으로는 시간이 충분히 지난 후 초기값의 설정이 더 이상 영향을 미치지 않게 되면 Symmetric 한 경우와 Un-Symmetric 한 경우가 완전히 일치할 것으로 예견되나 (a)는 약  $y=3.7$  을 기준으로 하부의 Symmetric 한 경우의 속도 U 가 Un-Symmetric 한 경우보다 더 크고, (b)의 경우는 약  $x=0.28$  을 기준으로 캐비티 왼쪽유동의 속도 V 가 Symmetric 한 경우보다 더 큰 것을 관찰 할 수 있다.

Fig. 5 는 Reynolds 수에 따른 항력의 변화로 나타낸 것이다. 그림에서 Reynolds 수 225 이하 에서는 분기 현상이 나타나지 않으나 그 이상의 Reynolds 수에서는 분기현상이 나타난다.

Fig. 6 은 각 Reynolds 수에 따른 유동함수

의 최대값과 최소값을 절대값으로 나타내어 비교한 것이다. 이 그래프에서도 Reynolds 수 225 까지는 두 값이 차이를 보이지 않고 있으나 225 이상에서는 분기현상을 보이고 있다. 여기서 특이할만한 사항은 절대값을 취한 유동함수의 최소값이 Reynolds 수 약 600 에서 다시 감소하고 있고, 유동함수의 최대값은 반대로 계속 증가하여서 Reynolds 수 약 700 에서 서로 교차하고 있는 것이다. 현재 연구단계에서는 그 원인을 알 수 없지만, 부분적으로 수치해의 격자 의존성에 기인하는 것으로 추정이 된다.

Fig. 7 에서 (a)는 동쪽벽의 움직임에 의해 생기는 오른쪽 유동세포의 크기변화를 Reynolds 수에 따라서 나타낸 것이고, (b)는 좌하부 모서리점과 우상부 모서리 점을 잇는 대각선을 기준으로 하여 분기현상으로 인한 재부착점의 움직임을 각변화로 표시한 것이다. (a)의 결과들은 분기현상에 의한 오른쪽 유동세포의 크기가 Reynolds 수에 따라 변화되는 과정이 잘 관찰되고 있다. Reynolds 수가 200 보다 작아지면 유동장이 실제로는 대칭적 유동 패턴을 갖지만, 좌하부 영역에서는 유동이 매우 느린 관계로 재도착점( $X_R$ )의 위치결정이 어렵고 격자의존성 또한 크므로  $X_R$  이 1.0 이 되지 못하고 수치적 오류를 보인다. Reynolds 수 200, 225, 300 에서의  $X_R$ 을 이용하여 외삽법으로  $X_R=1$  이 되는 Reynolds 수를 구하면 분기현상이 일어나는 임계 Reynolds 수는 약 189로 나타난다.

## 요약

본 연구에서는 2 차원 벽구동 캐비티 유동에서 경계조건의 부여방법에 따른 내부유동의 이력으로 인해 발생하는 분기현상을 수치실험을 통하여 관찰하였다. 그 결과 각 Reynolds 수를 100 에서 1000 까지증가 시켰을 때, 임계 Reynolds 수 200 이상에서는 항력,유동함수의 최대값 및 최소값, 재부착점등의 결과에서 분기현상이 나타남이 확인 되었다.

## 참고문헌

- [1] 정재동,김찬중,유호선,이준식 “수평동심환상 공간내 자연대류의 다중해에 관한 수치적 연구”, 대한기계학회논문집(B), V21, pp. 252 - 263,1997.
- [2] 강신형,김진권,이준식, “사다리꼴 밀폐공간에서 자연대류의 이중해에 관한 연구”,대한기계학회논문집,V17,pp.458-466,1993.
- [3] 유주식, “공간주기적인 온도분포를 갖는 두 평행평판 사이에서의 자연대류”,Ph.D,1991.
- [4] 조지룡,홍상표,김근오,김윤택, “ 2 차원캐비티 유동에서 다중 정상해에 관한 연구”, 한국전산유체공학회 추계학술대회 논문집,pp.127-138,1999.
- [5] 조지룡, “2 차원 비정상유동 해석을 위한 1-방정식 방법”, 한국전산유체공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 113-121, 1999.

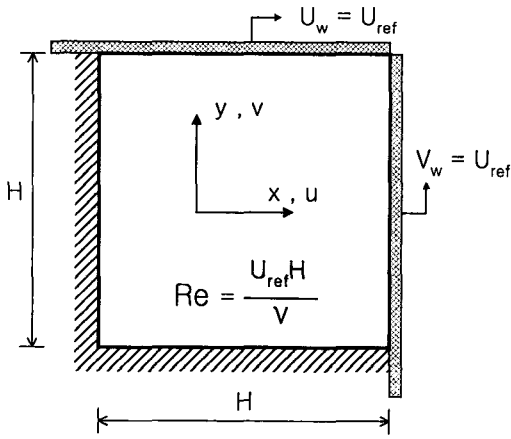
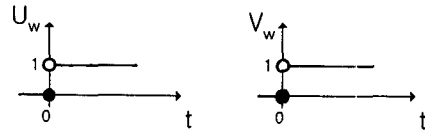
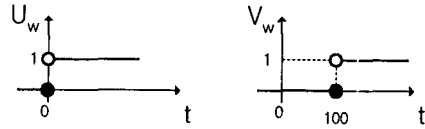


Fig. 1 Configuration of the cavity

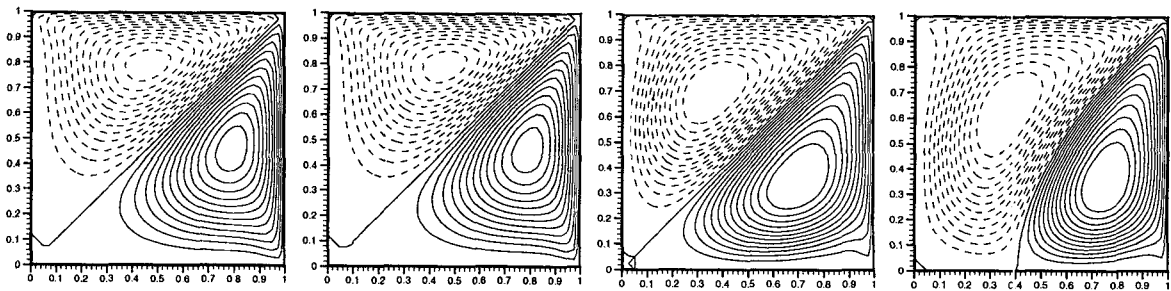


(a) Symmetric condition



(b) Un-Symmetric condition

Fig. 2 Time history of the boundary condition



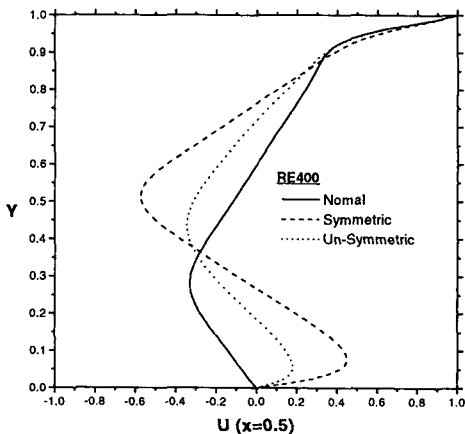
(a) RE100\_S

(b) RE100\_US

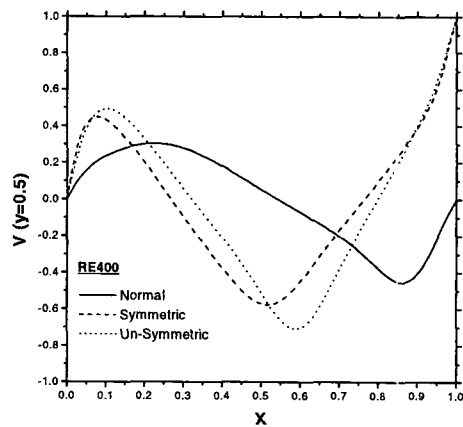
(c) RE400\_S

(d) RE400\_US

Fig. 3 Stream line patterns at Re=100 and 400



(a)



(b)

Fig. 4 Velocity profiles at Re=400.

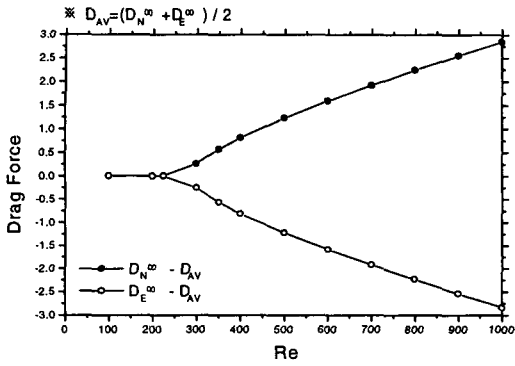


Fig. 5 Bifurcation diagram for the drag force.

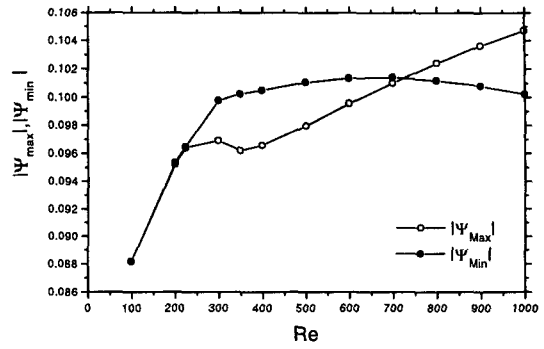
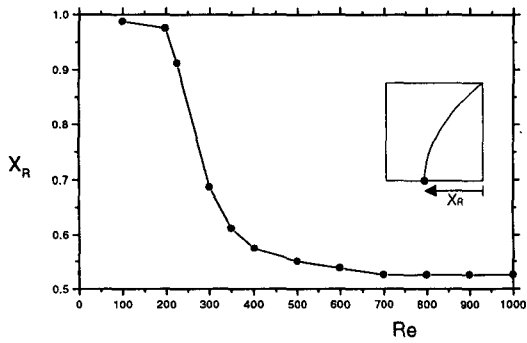
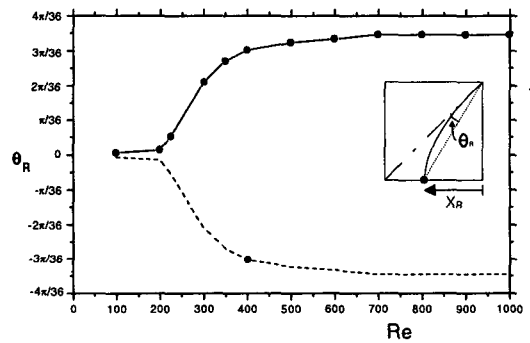


Fig. 6 Variation of the stream function value



(a)



(b)

Fig. 7 Bifurcation of the reattachment point.