2000년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집 제19권 제1(s)호

자왜 재료 내의 파동 방정식에 관한 이론적 연구

강국진*, 노용래**
*경북대학교 센서공학과
**경북대학교 센서공학과/전자전기공학부

Theoretical study on the wave equation in magnetostrictive materials

Kukjin Kang* and Yongrae Roh**
*Department of Sensor Engineering, Kyungpook National University
** Dept. of Sensor Eng./School of Elec. and Elec. Eng., Kyungpook National University
*kkj@aslab.kyungpook.ac.kr, **yryong@eeg.kyungpook.ac.kr

요 약

자왜 재료는 자계 포화 이하에서 비선형 특성을 갖는다고 알려져 있다. 그러나 지금까지 비선형 특성을 표현하는 자왜 재료의 구조 방정식을 유도한 사례는 전무한 실정이다. 본 연구에서는 자계 포화 이하에서 비선형 특성을 갖는 자왜 재료의 비선형 구조 관계식을 유도하였다. 나아가 유도된 구조 관계식을 이용하여 자왜 재료 내의 파동 방정식을 정식화하였다. 그리고 비선형 특성을 갖는 자왜 재료에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때 이방성 자왜 재료를 등방성 재료로 가정하여 종파와 횡파 속도를 구하였다.

I. 서 론

자왜 효과(Magnetostrictive effect or Magnetostriction)라 함은 강자성 물질이 자화되었을 때 그 내부구조에 변화가 일어나고, 외부 자장에 비선형적으로 비례하여 재료에 변형이 발생하는 형상을 뜻한다. 자왜 재료의 자기 포화에 대응하는 자계 이하의 자속 밀도에 대해서는 발생된 정적 응력 변형이 자속 밀도의 제곱에 비례하는 것으로 알려져 있다[1].

대표적인 자왜재료로서, 수중 청음기에 많이 사용되던 Nikel은 화학적으로 안정하고, 정수압에 무관한 특성을 가지고 있지만, 전기기계 결합계수가 매우 작기 때문에 압전 재료로 대체 되었다. 금속 유리 합금은 얇은 적층 구조를 가지고, 전기기계결합계수가 매우 높다는 장점을 가지고 있어 수중 청음기에 많이 사용되고 있다[2]. 1980년 Clark은 희토유 산화물에서 매우 큰 자왜 변형을 가지고 있다는 것을 발견하였다. 희토유 산화물로 대표되는 Terfenol-D는 포화 자왜 변형 값이 매우 크기 때문에 압전 재료를 대체하여 저주파수의 수중 변환기에 매우 많이 사용되고 있다. 그리고 실제로 Terfenol-D와 PZT-4를 수중 청음기에 적용하였을 때 Terfenol-D가 매우 우수한 특성을 나타낸다는 연구 결과도 나와 있다[3].

그러나 지금까지 연구사례들은 실험 결과에 근간을 이루고 있으며 이론적인 연구 또한 자기 포화상태의 포화 자왜(saturation magnetostriction)값을 이용하거나 [4-6], 또는 자기 포화에 대응하는 자계 이하에서 선형적인 특성을 가진다고 가정한 상태(piezomagnetic)에서 해석을 행하고있다[7-8]. 자왜 재료들은 자기 포화에 대응하는 자계 이하에서는 비선형 특성을 가지고 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러므로 선형 특성을 가진다고 가정한 상태에서 해석을 행한 것은 정확한 해석을 했다고 볼 수 없다. 그리고 비선형 특성을 표현하는 구조 방정식을 유도한 연구사례는 전무한 실정이다. 또한 비선형 특성을 포함하는 자왜 재료 내의 파동 방정식을 유도한 사례도 없다.

따라서 본 연구에서는 자왜 재료가 가지는 비선형 특성을 해석하기 위한 기초가 되는 비선형 구조 방정식을 유도하고, 유도된 구조 방정식을 이용하여 자왜 재료 내에서의 파동 방정식을 정식화하였다. 위의 결과를 이용하여 자왜 재료 내에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때의 종파, 횡파 속도를 구하였다.

II. 이론적 배경

일반적으로 압자효과는 선형적인 압전효과와 유사하고, 자왜 효과는 2차 효과로서 전왜(electrostriction) 특성과 유사한 특성을 갖는다고 알려져 있다. 따라서 자왜 구조 방정식은 기존의 압자, 압전, 전왜특성 해석 결과를 바탕으로 유사하게 유도될 수 있다[9].

온도 변수를 제외한 열역학 함수로서 자왜 재료의 탄성 Gibbs 에너지는 식 (1)과 같이 표현된다[10].

$$G=-\frac{1}{2}c_{ijkl}^{H}S_{ij}S_{kl}+Q_{pqlm}S_{pq}H_{l}H_{m}+\frac{1}{2}\mu_{ij}^{S}H_{i}H_{j} \quad (1)$$

여기서 c_{ijkl}^{H}는 탄성계수(stiffness) 텐서, S_{ij}는 변형율(strain) 텐서, Q_{pqlm}은 자왜 상수(magnetostriction coefficient) 텐서, H_l는 자계(magnetic field intensity) 텐서, μ_{ij}^{S}는 투자율(permeability) 텐서이다.

압자재료에서와 마찬가지로 자속 밀도는 식 (2)와 같이 표현되고,

$$B_i=\left(\frac{\partial G}{\partial H_i}\right)_{S,T} \quad (2)$$

응력 텐서 T_{ij}는 식 (3)과 같이 표현된다.

$$T_{ij} = -\left(\frac{\partial G}{\partial S_{ij}}\right)_{B,H} \tag{3}$$

식 (1)을 식 (2)와 (3)에 적용하면 구조 관계식은 식 (4)와 같이된다.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c^{H}_{ijkl} S_{kl} - Q_{ijlm} H_l H_m \\ B_i &= 2Q_{klji} H_j S_{kl} + \mu^{S}_{ij} H_j \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 i와 j, k와 l은 서로 교환할 수 있고 대칭이기 때문에 자왜 상수 텐서는 식 (5)과 같이 압축된 자왜 상수로 표현할 수 있다.

$$Q_{ijkl} = Q_{mn} \quad ; \ m, n = 1,2,3,4,5,6 \tag{5}$$

식 (5)를 식 (4)에 적용하면 구조 관계식은 식 (6)과 같이된다.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c^{H}_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} H_k \\ B_i &= 2e_{ikl} S_{kl} + \mu^{S}_{ik} H_k \end{aligned} \tag{6}$$

편의상 e_{ikl} 을 대칭성을 고려한 matrix 형태로 표현하면 아래와 같다.

$$[\, e_{ikl}] = [\, Q_{klij} H_j] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
e_{11} &= Q_{11} H_1 + Q_{16} H_2 + Q_{15} H_3 \ , \\
e_{12} &= Q_{21} H_1 + Q_{26} H_2 + Q_{25} H_3 \ , \\
e_{13} &= Q_{31} H_1 + Q_{36} H_2 + Q_{35} H_3 \ , \\
e_{14} &= 2(Q_{41} H_1 + Q_{46} H_2 + Q_{45} H_3) \ , \\
e_{15} &= 2(Q_{51} H_1 + Q_{56} H_2 + Q_{55} H_3) \ , \\
e_{16} &= 2(Q_{61} H_1 + Q_{66} H_2 + Q_{65} H_3) \ , \\
e_{21} &= Q_{16} H_1 + Q_{12} H_2 + Q_{14} H_3 \ , \\
e_{22} &= Q_{26} H_1 + Q_{22} H_2 + Q_{24} H_3 \ , \\
e_{23} &= Q_{36} H_1 + Q_{32} H_2 + Q_{34} H_3 \ , \\
e_{24} &= 2(Q_{46} H_1 + Q_{42} H_2 + Q_{44} H_3) \ , \\
e_{25} &= 2(Q_{56} H_1 + Q_{52} H_2 + Q_{54} H_3) \ , \\
e_{26} &= 2(Q_{66} H_1 + Q_{62} H_2 + Q_{64} H_3) \ , \\
e_{31} &= Q_{15} H_1 + Q_{14} H_2 + Q_{13} H_3 \ , \\
e_{32} &= Q_{25} H_1 + Q_{24} H_2 + Q_{23} H_3 \ , \\
e_{33} &= Q_{35} H_1 + Q_{34} H_2 + Q_{33} H_3 \ , \\
e_{34} &= 2(Q_{45} H_1 + Q_{44} H_2 + Q_{43} H_3) \ , \\
e_{35} &= 2(Q_{55} H_1 + Q_{54} H_2 + Q_{53} H_3) \ , \\
e_{36} &= 2(Q_{65} H_1 + Q_{64} H_2 + Q_{63} H_3) \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

위의 일반적인 식 (7)을 등방성 재료에 대해 단순화시켜 보면[11],

$$\begin{aligned} Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{12}) \\ Q_{mn} &= 0 \quad , \ m \neq n \ (m, n = 4,5,6) \end{aligned}$$

따라서 식 (7)은 식 (8)로 표현된다.

$$[\, e_{ikl}] = \begin{vmatrix} Q_{11}H_1 & Q_{12}H_1 & Q_{12}H_1 & 0 & (Q_{11}-Q_{12})H_3 & (Q_{11}-Q_{12})H_2 \\ Q_{12}H_2 & Q_{11}H_2 & Q_{12}H_2 & (Q_{11}-Q_{12})H_3 & 0 & (Q_{11}-Q_{12})H_1 \\ Q_{12}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_3 & (Q_{11}-Q_{12})H_2 & (Q_{11}-Q_{12})H_1 & 0 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Ⅲ.자왜 재료 내의 파동 방정식의 정식화

자왜 재료 내에서의 파동 방정식을 유도하기 위한 응력 운동 방정식은 식 (9)와 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho_m \ddot{u}_i \tag{9}$$

여기서 ρ_m은 밀도, u_i는 변위이다.

정자기 전하 방정식(charge equation of magnetostatic)은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0 \tag{10}$$

변형율과 변위 관계는 식 (11)과 같이된다.

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{11}$$

준 정전 전위(quasi-static potential) ϕ는 식 (12)로 표현된다.

$$H_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \tag{12}$$

앞장에서 언급한 구조 관계식을 다시 한번 쓰면

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c^{H}_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} H_k \\ B_i &= 2e_{ikl} S_{kl} + \mu^{S}_{ik} H_k \end{aligned} \tag{13}$$

이며, 식 (11)과 (12)를 식 (13)에 대입하면 식 (14)와 같은 구조 관계식이 된다.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c^{H}_{ijkl} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \\ B_i &= 2e_{ikl} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) - \mu^{S}_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)를 식 (9)와 (10)에 대입하면 식 (15)가 된다.

$$\begin{aligned} c^H_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_j}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j}\right) + e_{kij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j} &= \rho_m \ddot{u}_i \\ 2e_{ikl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_i}\right) - \mu^S_{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

k와 l은 서로 교환될 수 있고 c^H_{ijkl}은 대칭이기 때문에 식 (15)는 식 (16)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} c^H_{ijkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j} + e_{kij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j} &= \rho_m \ddot{u}_i \\ 2e_{ikl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_i} - \mu^S_{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

i = 1, 2, 3을 대입하면 식 (16)은 식 (17)과 같이 변위 u_1, u_2, u_3와 준 정전 전위 ϕ에 대한 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} c^H_{1jkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j} + e_{k1j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j} &= \rho_m \ddot{u}_1 \\ c^H_{2jkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j} + e_{k2j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j} &= \rho_m \ddot{u}_2 \\ c^H_{3jkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j} + e_{k3j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j} &= \rho_m \ddot{u}_3 \\ 2e_{ikl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_i} - \mu^S_{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Ⅳ. 평면파(plane wave)가 자계 방향으로 전파될 때 파 속도 계산

x_1, x_2, x_3 가 각각 x, y, z 방향을 나타내고 평면파가 z 축을 따라 전파 될 때 자왜 재료의 종파와 횡파 속도는 다음의 전개과정에 의해 구할 수 있다.

$x_1 = x$, $x_2 = y$ 방향을 나타내고 z 축을 따라 평면파가 전파되기 때문에 경계조건은 $\partial/\partial x_1 = 0$, $\partial/\partial x_2 = 0$ 이다. 따라서 식 (17)에 경계조건을 적용하게 되면 식 (18), (19), (20), (21)과 같이된다.

$$c^H_{55}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{35}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \rho_m\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (18)$$

$$c^H_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + e_{34}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \rho_m\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \qquad (19)$$

$$c^H_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{33}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \rho_m\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \qquad (20)$$

$$2e_{35}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + 2e_{34}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + 2e_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \mu^S_{33}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{2}{\mu^S_{33}}\left\{e_{35}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{34}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + e_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right\} \qquad (21)$$

평면파 해를 (22)와 같이 가정하고,

$$\begin{aligned} u_j &= U_j\, e^{[i(\omega t - kz)]} \quad ;\ j = x,\ y,\ z \\ \phi &= \Phi\, e^{[i(\omega t - kz)]} \end{aligned} \qquad (22)$$

여기서, U_j 와 Φ 는 상수, k는 파수, ω는 각주파수 이다.

식 (21)과 (22)를 식 (18), (19), (20)에 대입하여 matrix 형태로 나타내면 (23)

$$k^2\begin{bmatrix} \left(c^H_{55}+\frac{2e^2_{35}}{\mu^S_{33}}\right) & \frac{2e_{35}e_{34}}{\mu^S_{33}} & \frac{2e_{35}e_{33}}{\mu^S_{33}} \\ \frac{2e_{34}e_{35}}{\mu^S_{33}} & \left(c^H_{44}+\frac{2e^2_{34}}{\mu^S_{33}}\right) & \frac{2e_{34}e_{33}}{\mu^S_{33}} \\ \frac{2e_{33}e_{35}}{\mu^S_{33}} & \frac{2e_{33}e_{34}}{\mu^S_{33}} & \left(c^H_{33}+\frac{2e^2_{33}}{\mu^S_{33}}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \rho_m\omega^2\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \qquad (23)$$

또는 (24)와 같이된다.

$$\begin{aligned} k^2[\Gamma][U] &= \rho_m\omega^2[U] \\ ;\ [\Gamma] &= \textit{stiffened Christoffel matrix} \end{aligned} \qquad (24)$$

식 (24)가 해를 갖기 위한 조건은

$$det\ |\ k^2[\Gamma] - \rho_m\omega^2[I]\ |\ = 0$$

이고 식 (25)로 표현된다.

$$\begin{vmatrix} \left(c^H_{55}+\frac{2e^2_{35}}{\mu^S_{33}}\right)k^2-\rho_m\omega^2 & \frac{2e_{35}e_{34}}{\mu^S_{33}}k^2 & \frac{2e_{35}e_{33}}{\mu^S_{33}}k^2 \\ \frac{2e_{34}e_{35}}{\mu^S_{33}}k^2 & \left(c^H_{44}+\frac{2e^2_{34}}{\mu^S_{33}}\right)k^2-\rho_m\omega^2 & \frac{2e_{34}e_{33}}{\mu^S_{33}}k^2 \\ \frac{2e_{33}e_{35}}{\mu^S_{33}}k^2 & \frac{2e_{33}e_{34}}{\mu^S_{33}}k^2 & \left(c^H_{33}+\frac{2e^2_{33}}{\mu^S_{33}}\right)k^2-\rho_m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

주어진 주파수에 대해서 식 (25)를 만족시키는 파수 k를 구하게 되면, 결국 이 값은 그 자왜 재료 내를 전파하는 탄성파의 속도를 가져온다. 그러나 식 (25)는 재료의 이방성에 따른 여러 개의 재료상수를 포함하고 있고, 따라서 이 식을 만족시키는 파수 k의 closed form은 상당히 복잡한 형태를 가진다. 식 (25)에 의한 속도값 도출의 간단한 예로서, 이방성 자왜 재료를 등방성 재료로 가정하면 자계 방향이 3방향을 나타내므로 $H_1 = H_2 = 0$ 이고 자왜 상수 matrix는 식 (26)과 같이 된다.

$$[e_{ikl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (Q_{11}-Q_{12})H_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q_{11}-Q_{12})H_3 & 0 & 0 \\ Q_{12}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

식 (26)을 (25)에 대입하여 정리하면

$$\left\{\left(c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S}\right)k^2 - \rho_m \omega^2\right\} \times \left(c_{44}^H k^2 - \rho_m \omega^2\right)^2 = 0 \tag{27}$$

따라서 자왜 재료의 종파 속도(v_l) 및 횡파 속도(v_s)는 식 (28), (29)와 같이 구하여진다.

$$v_l = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S}}{\rho_m}} \quad ; \text{종파속도} \tag{28}$$

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{44}^H}{\rho_m}} \quad ; \text{횡파속도} \tag{29}$$

V. 결론 및 향후계획

본 연구에서는 자기 포화에 대응하는 자계 이하에서는 비선형 특성을 갖는다고 알려진 자왜 재료의 비선형 구조 방정식을 4차 텐서를 이용하여 유도하였다. 나아가 유도된 구조 방정식을 이용하여 자왜 재료 내의 파동 방정식을 정식화하였다. 비선형 구조 방정식과 파동 방정식을 이용하여 자왜 재료에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때 종파와 횡파 속도를 구하였다.

향후에는 실제 자왜 재료의 물성과 특성을 측정하여 본 연구의 결과와 비교함으로써 본 연구에서 유도한 자왜 재료의 비선형 유도 방정식의 타당성를 검증하고자 한다.

후 기

본 연구는 수중음향특화센터의 지원을 받아 수행된 과제의 일부이며, 동 센터의 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

1. 차일환, *음향공학 개론*, 한신문화사, 1976.
2. Oscar Bryan Wilson, *Introduction to Theory and Design of Sonar Transducers*, Peninsula, Los Altos, 1988.
3. M. B. Moffett, A. E. Clark, M. Wun-Fogle, J. Linberg, J. P. Teter, and E. A. McLaughlin, "Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers," J. Acoust. Soc. Am. 89(3), 1448-1455, 1991.
4. M. Ali and R. Watts, "Measurement of saturation magnetostriction using novel strained substrate techniques and the control of the magnetic anisotropy," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 202, 85-94, 1999.
5. H. Szymczak, "From almost magnetostriction to giant magnetostrictive effects: recent results," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 200, 425-438, 1999.
6. Y. Chen, J. E. Snyder, C. R. Schwichtenberg, K. W. Dennis, D. K. Falzgraf, R. W. McCallum, and D. C. Jiles, "Effect of the elastic modulus of the matrix on magnetostrictive strain in composites," Applied physics letters, vol. 74, no. 8, 1159-1161, 1999.
7. L. Kvarnsjo and G. Engdahl, "Differential incremental measurements of magnetoelastic parameters of highly magnetostrictive materials," Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications, Naples, Italy, 24-26 May, 1993.
8. F. Claeyssen, N. Lhermet, and G. Grosso, "Giant magnetostrictive alloy actuators," Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications, Naples, Italy, 24-26 May, 1993.
9. "IEEE standard on magnetostrictive materials: piezomagnetic nomenclature," IEEE Standard 319, 1971.
10. C. L. Hom, S. M. Pilgrim, N. Shankar, K. Bridger, M. Massuda, and S. R. Winzer, "Calculation of quasi-static electromechanical coupling coefficients for electrostrictive ceramic materials," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 41, no. 4, 542-550, 1994.
11. J. F. Nye and F. R. S., *Physical properties of crystals*, Clarendon Press · Oxford, 1985.