

모델링오차에 따른 Filtered-X LMS 알고리즘의 오동작에 관한 고찰

박병욱*, 고병섭*, 김학윤*

*청주대학교 전자공학과

A study of defects of filtered-X LMS algorithm for modeling error

Park, Byoung-Uk*, Ko, byeong-Seob*, Kim, Hack-Yoon*

*Dept. Electronic Eng., Chongju Univ.

bupark@chongju.ac.kr, kmediart@naver.com, hykim@chongju.ac.kr

“ 본 연구는 과학기술부·한국과학재단 지정 청주대학교 정보통신연구센터의 지원에 의한 것입니다.”

요 약

ANC시스템에 있어서 현재 많이 이용되고있는 Filtered-X LMS 알고리즘에서 2차 음원과 제어점간의 임펄스응답은, 미리 동정하여 사용하는 것이 일반적이지만, 2차 음원과 제어점간의 전달특성이 이후에 변화할 경우, 실제의 전달함수와 적용에 이용한 전달함수간에 모델링 오차가 발생하게된다.^[2] 이 모델링 오차에 의하여 알고리즘은 오동작을 일으키고, 시스템은 불안정하게 되기도 한다.

따라서, 본 연구에서는 참조신호가 랜덤신호일 경우에 발생하는 모델링 오차와 Filtered-X LMS 알고리즘의 오동작에 관한 이론식을 도출하고, 시뮬레이션을 통하여 이를 입증하였다.

1. 서 론

현재 ANC(Active Noise Control)시스템에서는 적응 필터를 이용한 Feedforward 컨트롤 시스템이 주류를 이루고 있으며, 적응 알고리즘으로는 Filtered-X LMS 알고리즘이나 Multiple Error Filtered-X(MEFX) LMS 알고리즘이 이용되고 있다.^[2,3] 그러나, 이와 같은 알고리즘은 2차음원(소음 제거용 음원)과 제어점간의 임펄스 응답을 적응 필터의 입력신호에 콘볼루션한 신호를 필요로 하고 있다.^[2,3] 즉, 2차음원과 제어점간의 임펄스응답은 ANC동

작시, 미리 동정하여 사용하는 것이 일반적이지만, 2차 음원과 제어점간의 전달특성이 변화하는 경우에는 실제의 전달함수와 적용에 이용한 전달함수간에 모델링 오차가 발생하게된다. 모델링 오차가 발생하게 되면, 알고리즘은 오동작을 일으키고, ANC 시스템은 최악의 경우 불안정하게 된다는 문제점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 지금까지 Elliot, Boucher 등에 의해서 모델링오차와 Filtered-X LMS 알고리즘의 오동작과의 관계에 대해서 참조(refence)신호가 주기신호인 경우만을 대상으로 하여 검토를 행하여왔다.

따라서, 본 논문에서는 참조신호가 랜덤신호일 경우에 일어나는 알고리즘의 오동작에 관한 이론식을 유도하고 시뮬레이션을 통하여 이론 식을 입증하고자 한다.

II. ANC 시스템의 구성

Filtered-X LMS 알고리즘을 이용한 ANC 시스템의 일반적인 블록도를 그림 1에 나타냈다. 이와 같은 ANC 시스템은 CASE(K,M,L)시스템이라고 하며, K는 제어입력수, M은 2차 음원수, L은 제어점수를 나타낸다.

그림. 1에 나타낸 시스템의 오차신호(e_n)는

$$e_n = [e_{1n} \dots e_{1n} \dots e_{Ln}] \quad (1)$$

$$d_n = [d_{1n} \dots d_{1n} \dots d_{Ln}] \quad (2)$$

$$y_n = [y_{1n} \dots y_{1n} \dots y_{Ln}] \quad (3)$$

이 되는 벡터표시로 다음과 같이 나타낼 수 있다

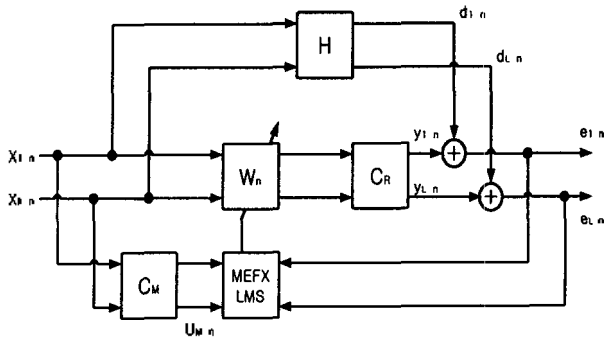


그림 1. ANC 시스템의 블록도

$$e_n = d_n + y_n. \quad (4)$$

한편, 적응 필터가 FIR형이라고 한다면, 적응 필터계수 (w_n)는 아래의 식(5)에 의해 갱신된다.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + \mu(-\nabla_{Mn}) \\ &= w_n + 2\mu U_{Mn}^T e_n \end{aligned} \quad (5)$$

III. 알고리즘의 오동작에 관한 이론적 검토

III-1. 모델링 오차의 영향

식 (5)에서 적응 필터의 계수(w_n)는,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-\nabla_{M i}) \\ &= w_n + 2\mu \sum_{i=0}^{n-1} U_{M i}^T e_i \end{aligned} \quad (6)$$

와 같이되고, 전달계 모델 (C_M)의 특성은 실제 계의 전달계 (C_R)의 특성이 동일한 것이 이상적인 형태가 된다.

$$U_{Mn} = U_{Rn} \quad (7)$$

그러나, 모델링오차가 발생하여 전달계 모델(C_M)의 특성이 본래의 제거음 전달계(C_R) 특성과 다르게 되는 경우,

$$U_{M i} \neq U_{R i} \quad (8)$$

와 같이 된다. 이 결과, 구배 벡터도

$$\nabla_{M i} \neq \nabla_{R i} \quad (9)$$

와 같이 되기 때문에, 시각 n 에서 적응 필터계수 값 (w_n)도 이상적인 경우와 다르게 된다.

그러므로, 이상적인 상태에서는 안정하다 하여도, 모델링 오차가 발생하면 알고리즘이 오동작을 일으키고, 시스템이 불안정하게 되는 경우가 있다. 또한, 불안정하게 되는 것만으로도, 적응 필터의 수렴과정이나 최종적인 수렴값은, 일반적으로 이상적인 경우와 다른 값이 되게 된다. 적응필터의 수렴값이 최적해와 많은 차이가 생긴

다면, ANC 시스템의 추정성능은 대단히 나빠진다.

III-2. 근사 시스템을 이용한 이론적 검토

그림 1에 나타낸 시스템의 동작은, 식 (4) 및 (5)의 y_n 에 관한 식으로 구성된 연립방정식으로 기술되지만, 이 식을 직접 이용하여 해석하는 것은 곤란하다. 그러므로, 여러 가지 가정을 도입하여 적응필터 계수(w_n)에 관한 1계 상계수 벡터 차분방정식을 유도하고 해석한다.

우선, 적응이 비교적 천천히 이루어지고 있다고 가정하면, 그림 1의 시스템을 그림 2의 시스템으로 근사화되므로 출력 y_n 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_n = U_{Rn} w_n \quad (9)$$

따라서, 시스템의 오차신호는 다음과 같이 된다.

$$e_n = d_n + U_{Rn} w_n \quad (10)$$

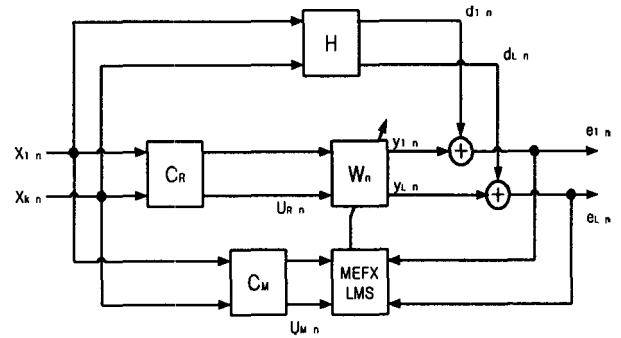


그림 2. 근사화된 ANC 시스템

또한, 식(5), (10)으로 부터 e_n 을 소거하고, 양변의 집합평균을 구하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E[w_{n+1}] &= E[w_n] - \alpha E[U_{Mn}^T d_n] - \alpha E[U_{Mn}^T U_{Rn} w_n] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $\alpha = 2\mu$ 이다.

시각 n 에서 적응 필터의 계수값(w_n)과 U_M , U_R 의 값(U_{Mn} , U_{Rn})이 독립이라고 가정한다면, 식(11)을 아래와 같이 치환할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[w_{n+1}] &= E[w_n] - \alpha E[U_{Mn}^T d_n] \\ &\quad - \alpha E[U_{Mn}^T U_{Rn}] E[w_n] \\ &= (I - \alpha R_R) E[w_n] + (-\alpha p_R) \end{aligned} \quad (12)$$

즉, 식 (12)에서는 U_M 과 U_R 의 상호 상관행렬 및 U_M 과 d 의 상호상관벡터는 각각 다음 식과 같다.

$$E[U_{Mn}^T U_{Rn}] = R_R \quad (13)$$

$$E[U_{Mn}^T d_n] = p_R \quad (14)$$

여기서, U_{Mn}, U_{Rn}, d_n 이 정상이라고 가정한다면, R_R, p_R 이 일정하게 되기 위해, 식 (12)은 1계 상계수 벡터 차분방정식이 되며, 이것의 해($E[w_n]$)는,

$$E[w_n] = (I - \alpha R_R)^n w_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (I - \alpha R_R)^{n-i-1} (-\alpha p_R) \quad (15)$$

와 같다.

한편, 「 $I - \alpha R_R \neq 0$ 인 동시에 R_R 이 비특이」라고 하면, 식(12)에 의해,

$$E[w_{n+1}] + R_R^{-1} p_R = (I - \alpha R_R)^n (E[w_n] + R_R^{-1} p_R) \quad (16)$$

이 얻어지며, R_R 은

$$R_R = Q_R \Lambda_R Q_R^{-1} \quad (17)$$

여기서, Λ_R : R_R 의 고유값으로부터 되는 대각행렬

Q_R : R_R 의 고유 벡터로부터 되는 행렬

와 같이 분해 가능하면, 식(16)은

$$Q_R^{-1} \{E[w_{n+1}] + R_R^{-1} p_R\} = \{I - \alpha \Lambda_R\} Q_R^{-1} (E[w_n] + R_R^{-1} p_R) \quad (18)$$

이 된다. 그러므로 식(12)의 해($E[w_n]$)는, 식 (19)으로 주어진다.

$$E[w_{n+1}] = Q_R \{I - \alpha \Lambda_R\}^n Q_R^{-1} (w_0 + R_R^{-1} p_R) - R_R^{-1} p_R \quad (19)$$

또한,

$$v_n = Q_R^{-1} \{E[w_n] + R_R^{-1} p_R\} \quad (20)$$

와 같이 놓으면, 식(18)으로부터,

$$v_n = \{I - \alpha \Lambda_R\}^n v_0 \quad (21)$$

가 얻어진다.

따라서, 식 (19)에 의해, 적응 필터의 수렴속도는 R_R 의 고유값에 의존하게 되므로, 수렴값(w_R^*)은,

$$w_R^* = -R_R^{-1} p_R \quad (22)$$

가 된다.

그러므로, 모델링 오차가 발생하면, 시스템이 불안정하게 되는 경우가 있다는 것은 미리 서술하였지만, 시스템의 안정조건은, 식(12)에서 $(I - \alpha R_R)$ 의 모든 고유값 $\lambda_{R_{ai}}$ 가, $|\lambda_{R_{ai}}| < 1$ 을 만족하고, 식(19)에서 행렬 R_R 의 모든 고유값 λ_i 가, $0 < |1 - \lambda_{R_{ai}}| < 1$ 을 만족하여야만 한다.

IV. 시뮬레이션에 의한 이론식의 검증

IV-1 시뮬레이션의 개요

시뮬레이션은 그림 3에 제시한 CASE(1,1,1)시스템을 대상으로 하였으며, 이론 계산은 그림 3의 시스템을 그림 4의 시스템으로 근사화하여 행하였다. 먼저, 이론 계산을 위해서 h, c_R, c_M 을 설정하였고, 참조신호는 평균파워가 1인 백색잡음(white noise)을 사용하였으며, 상관행렬(R) 및 상관벡터(p)를 구하였다. 또한, R 의 고유값(Λ) 및 적응필터의 수렴값(w^*)을 산출하였다. 또한, 적응 필터의 tap수는 2 tap, c_R, c_M 의 tap수는 3 tap, h 의 tap 수는 4 tap으로 설정하고, 시스템의 안정성과 적응필터의 수렴속도 및 수렴값을 예측하였다.

한편, 이론 계산에 이용한 것과 동일하게 h, c_R, c_M 을 설정하였고, 참조신호는 평균파워가 1인 백색잡음(white noise)을 사용하여, 그림 3에 나타난 시스템을 이용하여 동작 시뮬레이션을 행하였다. 이때, 적응 필터 계수의 초기값은 0으로 하였다.

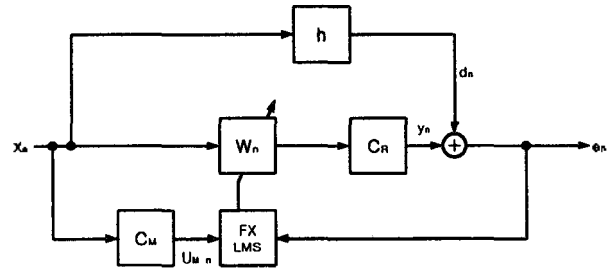


그림 3. CASE(1,1,1)시스템

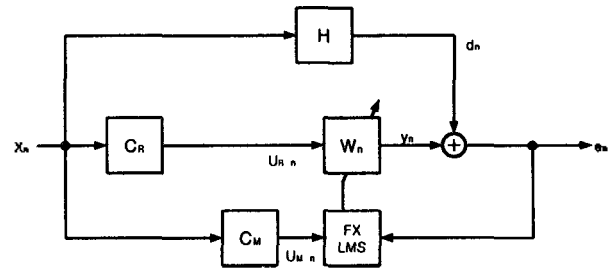


그림 4. CASE(1,1,1) 근사 시스템

IV-2 시뮬레이션 결과

첫 번째, R 의 고유값이 안정조건을 만족하지 않고, 불안정하게되는 경우의 시뮬레이션 조건은 다음과 같다.

$$h = [0.134 \ -0.613 \ 0.674 \ 0.390]^T$$

$$c_R = [0.548 \ 0.685 \ 0.480]^T$$

$$c_M = [-0.548 \ -0.685 \ 0.480]^T$$

위의 조건하에서 이론적으로 계산한 상관행렬 R 의

고유값이 안정조건을 만족하지 않기 때문에, 시스템은 불안정하게 될 거라고 예상되며, 시뮬레이션에서도 적응 필터가 그림 4와 같이 발산하는 형태, 즉, 불안정하게 되었다.

그러나, 이 예에서는 적응 값이 모두 음이었으므로, 스텝사이즈 파라메타를 음의 적당한 값으로 설정한다면, 시스템은 안정하게 되리라고 예측된다. 따라서, 스텝사이즈 파라메타를 -0.01 로 설정하여 시뮬레이션을 해보면 예상한대로 그림 5와 같이 안정한 상태가 됨을 알았다.

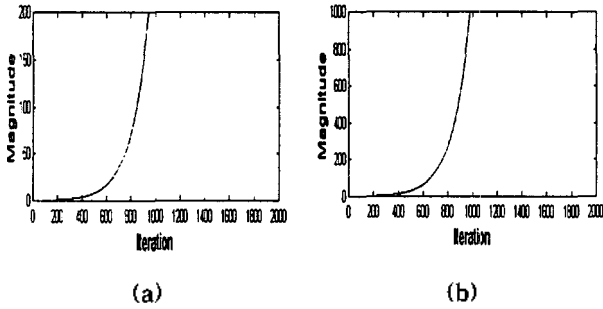


그림 4. 불안정한 경우 (a) w_0 (b) w_1

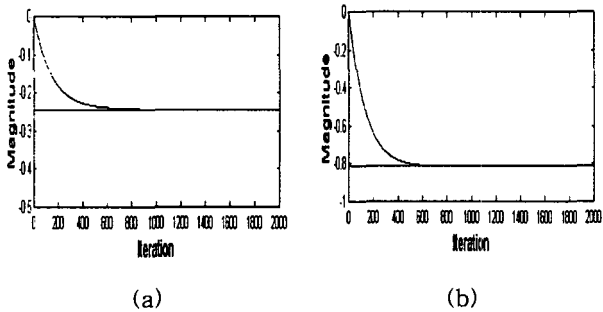


그림 5. $\alpha = -0.01$ 로 놓고 계산한 경우 (a) w_0 (b) w_1

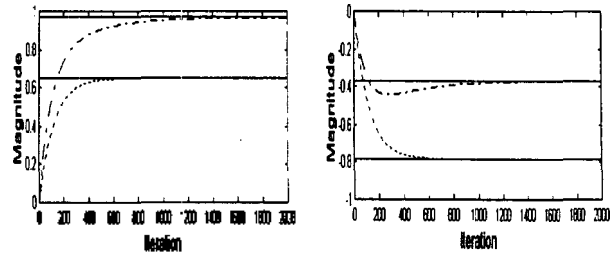
둘째, 수렴속도와 수렴 값이 함께 변화하는 경우의 시뮬레이션 조건은 다음과 같다.

$$h = [0.0216 \quad -0.577 \quad 0.732 \quad 0.361]^T$$

$$c_R = [0.0994 \quad 0.994 \quad 0.0497]^T$$

$$c_M = [-0.379 \quad 0.758 \quad -0.531]^T$$

위의 조건하에서 이론적으로 계산한 결과, c_M 에 대하여 수렴속도, 수렴 값이 동시에 변화하는 조건이 성립하였다. 그림 6에서 실선은 이론적인 계수값(w_0, w_1)이고, 점선은 $c_M = c_R$ 인 경우의 계수값이며, 일점 사선은 $c_M \neq c_R$ 인 경우의 계수값을 나타낸 것이다. 이 시뮬레이션 결과를 보면 이론값과 거의 일치함을 볼 수 있다.



(a) (b)

그림 6. 수렴속도와 수렴 값이 w_0, w_1 함께 변화하는 경우

이상과 같이, 이론계산 결과와 시뮬레이션 결과가 일치하였으며, 이론 검토에 의해 얻어진 결과의 타당성이 CASE(1,1,1)시스템에서 증명되었다.

V. 결론

본 논문에서는 2차음원과 제어점간의 실제의 전달특성과 적응에 이용한 전달특성간의 오차가 발생한 경우에, Filtered-X LMS알고리즘에서 발생하는 오동작에 대하여, 이론 및 시뮬레이션에 의해 검토를 하였다.

그 결과, 이론적인 검토에 의해 모델링 오차는 Filterd-X LMS알고리즘의 오동작을 일으키고, 안정성 및 적응필터의 수렴속도, 수렴값에 영향을 주고 있는 것을 입증하였고, 동일조건하에서 시뮬레이션을 행하여 이론계산과 시뮬레이션에 의한 결과의 타당성을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] S. Heykin, Adaptive Filter Theory, Prentice Hall, 1996
- [2] M. Kuo, R. Morran, Active Noise Control System Algorithm and DSP Implementation, JOHN WILEY & Sons INC, 1996
- [3] Hamada Hareo, Practical Digital Processing, 1996
- [4] B.Widrow, S.D.Sterns. Adaptive Signal Processing. Prentice Hall. 1985