2000년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집 제19권 제1(s)호

전산공력음향학에서 직교좌표를 이용한 곡면에서의 경계조건에 대한 고찰

빈종훈, 정철웅, 이수갑
서울대학교 기계항공공학부, 공력소음 및 소음제어 연구실

A Study on the Cartesian Boundary Condition of Curved Walls in Computational Aeroacoustics Scheme

Jonghoon Bin, Cheolung Cheong, and Soogab Lee
Aeroacoustics & Noise Control Lab
School of Mechanical and Aerospace Engineering Seoul National University
mrbin@snu.ac.kr ; accu99@snu.ac.kr ; solee@plaza.snu.ac.kr

요약문

본 연구에서는 원형실린더에 의한 음향파의 산란현상을 전산공력음향학 기법을 이용하여 계산하였다. 특히 전산공력음향학에서 정확도를 위해 요구되는 좌표의 직교성을 유지하기 위해서 그에 대한 적절한 관계식을 유도하였으며 정확성의 검증을 위해서 수치적인 해를 이론적인 해와 비교, 분석하였다. 공간차분법으로는 Taylor 전개를 통하여 ! 차 정확도를 가진 차분법을 바탕으로 주파수 공간에서 최적화된 DRP(Dispersion Relation Preserving) 기법을 사용하였으며, 시간차분법으로는 Adams-Bashford 방법을 기준으로 최적화된 4 단계 외재적(explicit) 적분방법을 사용하였다. 벽면 경계조건으로는 가상점 개념을 이용한 경계조건을 사용하였으며 원방 경계조건으로서는 선형화된 Euler 방정식의 점근해(Asymptotic Solution)을 이용한 방사경계조건(Radiation Boundary Condition)을 사용하였다.

1. 서 론

덕트 음향학이나 터보기계소음등과 같은 많은 공력소음 문제에 있어서, 평면보다는 음파와 곡면과의 상호작용이 대부분을 차지하기 때문에 이러한 문제들의 정확한 수치적 해를 구하기 위해서는 고차의 정확도를 가지는 scheme 뿐만 아니라 벽면에서의 경계 조건도 잘 만족하게 해주어야 한다. 본 연구에서는 고차의 유한 차분기법을 적용하기 위해 직교 격자를 이용한 곡면의 벽면 경계조건을 고려하고 그 타당성을 검토하고자 한다.

2. 이론

(1) 지배 방정식

지배방정식은 2 차원 교란에 대한 선형화된 오일러 방정식이며 길이 L, 속도 c, 시간 L/c, 밀도 ρ_0, 압력 $\rho_0 c^2$ 으로 무차원화 되었다.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=Q \tag{1}$$

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ u\\ v\\ p\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}\rho_0 u+\rho u_0\\ \dfrac{u_0 u+p}{\rho_0}\\ \dfrac{u_0 v}{\rho_0}\\ u_0 p+\gamma p_0 u\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}\rho_0 v\\ 0\\ \dfrac{p}{\rho_0}\\ \gamma p_0 v\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ S\end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 Q 는 음원항이며 자유류 $u_0 = \mathrm{U}$인 경우에 대해서 해석하였다.

위(1)의 방정식에 DRP 기법을 적용하면

$$U_{l,m}^{(n+1)}=U_{l,m}^{(n)}+\Delta t\sum_{j=0}^{3} b_j K_{l,m}^{(n-j)} \tag{3}$$

$$K_{l,m}^{(n)}=-\frac{1}{\Delta x}\sum_{j=-3}^{j=3} a_j E_{l+j,m}^{(n)}-\frac{1}{\Delta y}\sum_{j=-3}^{j=3} b_j F_{l,m+j}^{(n)}+Q_{l,m}^{(n)} \tag{4}$$

여기서 l,m 은 각각 x 및 y 방향의 격자 좌표를 나타내며 Δx 와 Δy 는 격자의 크기를 나타낸다. 그리고 계수 a_j 와 b_j 로는 *Tam*이 제시한 최적화된 계수를 사용하였다.

(2) 경계조건

가. 방사경계조건(Radiation boundary condition)

Euler 방정식에서 자유류가 없는 계산 영역에서는 음향 파만이 통과하게 되므로 음향파에 대한 점근해를 이용하여 다음과 같은 방사경계조건(Radiation Boundary Condition)을 사용한다.

$$\left(\frac{1}{V(\theta)}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2r}\right)\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\p\end{bmatrix}=\phi+O(r^{-5/2}) \qquad (5)$$

$$V(\theta)=u_0\cos\theta+\sqrt{a_0^2-u_0^2\sin^2\theta}$$

나. 벽면 경계조건(Rigid wall boundary condition)

벽면경계조건은

$$V\cdot n=0 \qquad (6)$$

이다. 여기서 n 은 표면에 수직인 방향벡터이며 V 는 속도 벡터이다.

이 식을 운동량 방정식에 대입하여 정리하면 경계조건 (6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial n}=0 \qquad (7)$$

아래 그림에서 알 수 있듯이 평면과는 달리 곡면에서의 벽면 경계조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial x}n_x+\frac{\partial p}{\partial y}n_y=0 \qquad (8)$$

임의의 볼록한 곡면의 경우 다음과 같은 3 가지의 기하학적 형상으로 표현 가능하다.

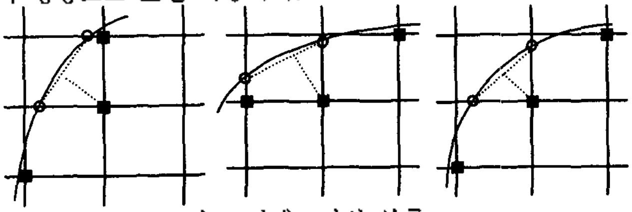


그림 1. 경계조건의 분류

경계조건을 만족하는 압력구배(Pressure gradient)의 값은 격자점 위의 값이 아니기 때문에 외부의 값을 내삽/외삽(Interpolation/Extrapolation)하였다. 여기서는 파장에 비해 격자의 길이가 짧으므로 외삽/외삽에는 보간 함수를 이용하였다.

특히 이러한 경계조건을 만족하는 식을 유도할 경우 아래 그림처럼 여러 개의 가상점(ghost-point pressure value)이 커플링(coupling) 되어있기 때문에 결과적으로 다음과 같은 행렬을 풀어야만 한다.

$$Ap=b \qquad (9)$$

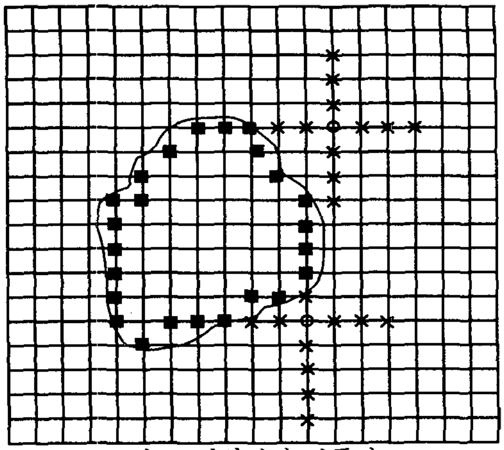


그림 2. 가상점의 커플링

여기서 p 는 가상점 열벡터이며 A 는 기하학적 형상에 의해 결정되는 $n\times n$ 행렬, b 는 외부의 압력값에 의해 결정되는 열벡터이다. 이때 행렬 A 는 곡면의 형상에 의해 결정되는 행렬이므로 시간에 대해 독립인 상수이다. 그리고 $N\times1$ 행렬 $b^{(n)}$ 은 각 단계에서 계산영역의 압력값으로 외삽(extrapolation)된 후 업데이트된다.

$$p^{(n)}=A^{-1}b^{(n)} \qquad (10)$$

(2) 인공 감쇠항(Artificial damping)

위와 같은 경계조건을 적용할 경우, 좌표의 직교성을 유지하기 힘들기 때문에 단파장의 수치적인 파가 생성되게 되며 이러한 수치적 파동은 수치적인 해를 오염시킬 뿐 아니라 수치적 불안정을 일으킬 수 있다. 이러한 이유로 인공적인 감쇠항이 필요하며 (4)식에 이를 첨가하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$K_{l,m}^{(n)}=-\frac{1}{\Delta x}\sum_j a_jE_{l+j,m}^{(n)}-\frac{1}{\Delta y}\sum_j b_jF_{l,m+j}^{(n)}$$
$$-\frac{L}{\Delta x}\frac{1}{\mathrm{Re}_{\Delta x}}\sum_j d_jU_{l+j,m}^{(n)}-\frac{L}{\Delta y}\frac{1}{\mathrm{Re}_{\Delta y}}\sum_j d_jU_{l,m+j}^{(n)}+Q_{l,m}^{(n)} \qquad (11)$$

3. 계산 결과 및 검토

(1) 2 차원 산란

가. 평면파 입사

계산의 검증을 위해 2 차원 산란 문제에 대해서 그 결과를 해석적인 결과와 비교 분석하였다.

여기서 격자크기는 $\Delta x=\Delta y=0.1$, $\Delta t=0.001$ 로 고정되었고, 격자는 201×201 이며, 음원 Q 항은 다음과 같다.

$$Q(x,y,t)=0.01e^{-\ln 2\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2}\cdot\sin(\omega t)$$

여기서 $x_o=4$, $r=0.2$, $\omega=0.1\pi$ 이다.

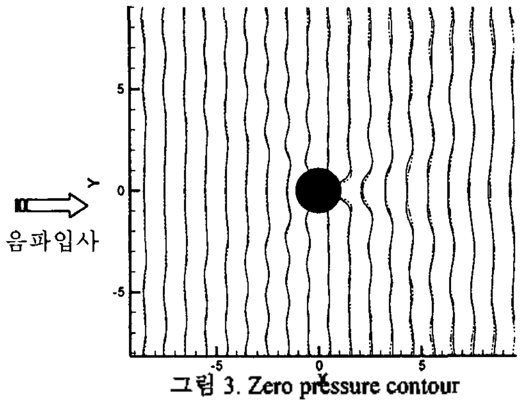


그림 3. Zero pressure contour

위의 그림 3은 수치적 계산결과와 해석적 결과를 비교하기 위해 압력이 0인 등압선을 그려본 결과이다. 이 그림을 살펴보면 대체적으로 잘 일치함을 알 수 있다. 위의 그림에서 실선은 수치해를, 점선은 이론해를 나타낸다.

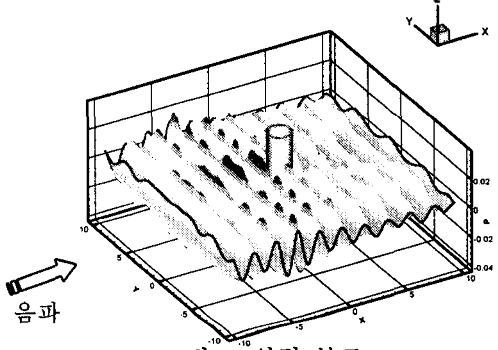


그림 4. 압력 분포

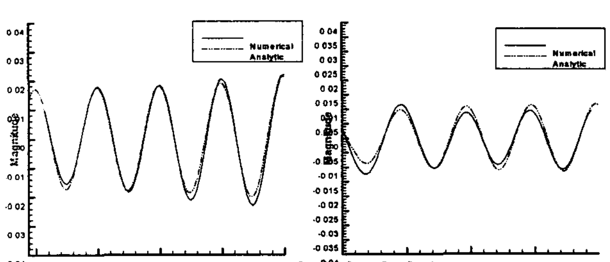


그림 5. y=0 에서의 압력분포

그림 5는 무차원화된 시간 t=14.5 일때 y=0 일때 x축에서 살펴본 실린더 앞뒤의 압력분포이다. 실린더 전반부에서는 정확한 편이지만 후반부는 차이가 있으며 이는 벽면 경계조건에서의 외삽/내삽에 의한 에러이다.

나. 구형파 입사

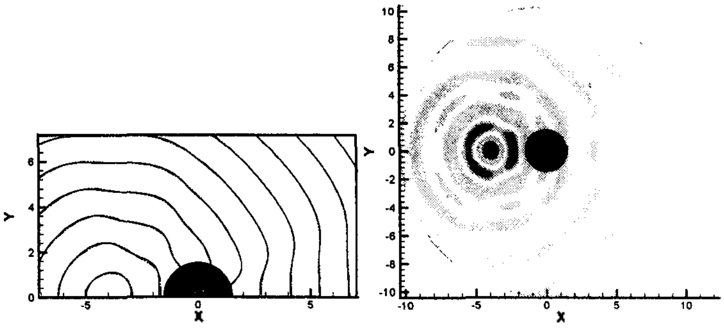
이 방법의 장점을 살펴보기 위해 CFD에서 벽면에 대한 직교좌표로 된 C-type 격자에서 계산된 값과 비교하였다.

이 경우는 물체에 격자를 수직하게 배치시킴으로서 벽면경계조건의 표현을 쉽고 간단하게 표현할 수 있다. 하지만 실린더 중심에서의 급격한 gradient 변화로 인해 벽면 근처에서의 값은 부정확할 수 있고, 복잡한 형상에는 사용할 수 없는 단점이 있다.

직교좌표의 정확성과 일반성을 위해 C-type grid 에 의한 결과와 비교하였다.

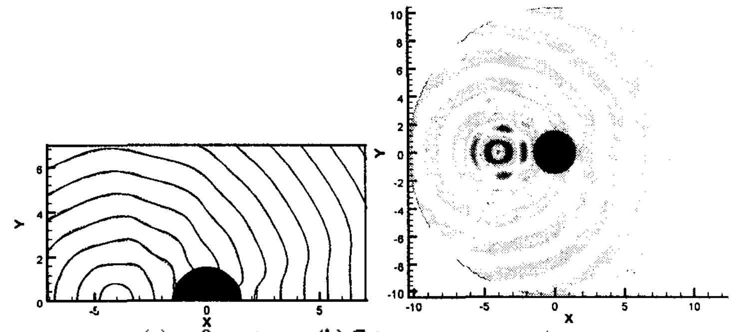
$$Q(x,y,t) = 0.01e^{-\ln 2\cdot\{\frac{(x-x_a)+(y-y_a)}{r}\}^2}\cdot\sin(\omega t)$$

여기서, $x_a = 4$, $y_a = 0$ $r = 0.2$ 며, C-type 격자는 201×101 이며 t=14.5 sec 일때의 결과이다.



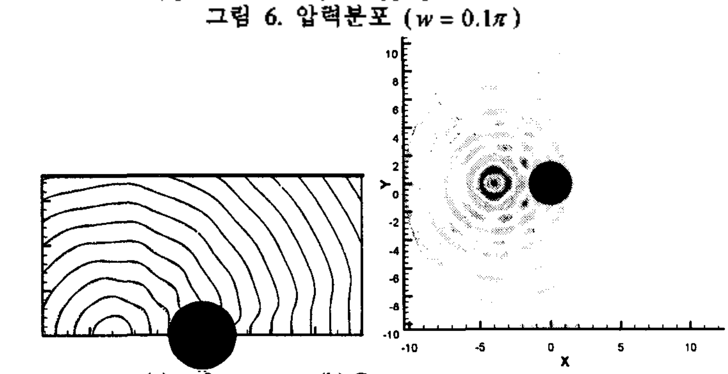
(a) p=0 contour (b) C-type pressure contour

그림 5. 압력분포 ($w = 0.08\pi$)



(a) p=0 contour (b) C-type pressure contour

그림 6. 압력분포 ($w = 0.1\pi$)



(a) p=0 contour (b) C-type pressure contour

그림 7. 압력분포 ($w = 0.12\pi$)

위의 그림에서 (a)는 압력이 0인 등압선이고 실선은 C-type 수치해, 점선은 직교좌표를 이용한 수치해, 그리고 쇄선은 이론해를 나타낸다. 결과를 살펴보면 전 영역에 걸쳐 오차가 적은 편이지만 상대적으로 실린더 부근에서는 오히려 C-type 결과가 이론해와 차이가 있음을 알 수 있다.

그림(b)는 각각의 주파수에 대한 C-type 압력 분포이며 주파수가 증가할수록 산란현상이 줄어듦을 알 수 있다.

4. 결론

이상에서 곡면에서의 벽면경계조건을 직교좌표를 이용하여 계산하였고 2차원 실린더에 대해서 그 해를 비교하였다. 그 결과 수치해와 이론해가 거의 일치하며 직교좌표를 이용하여 표현할 수 있음을 살펴보았다. 그리고 CFD 에서 자주 사용되는 격자를 이용한 결과와 비교하여 그 응용의 타당성을 검증하였다.

그 결과 실린더 부근에서의 계산값에 있어서 직교좌표를 이용한 계산결과가 C-type 계산결과보다 이론값에 더 가깝다는 것을 확인할 수 있었다. 하지만 전영역을 비교했을 때 이론값과 차이가 조금 있는데 이를 해결하기 위해서는 외삽/내삽 단계에서의 각별한 주의가 필요하다. 추가 연구를 통해 지금까지 단순한 형상이나 대칭구조물등에만 한정된 계산을 복잡한 형상에서도 사용 가능할 것으로 보이며 향후 전산공력음향학에서도 널리 응용될 것으로 기대된다.

참고문헌

[1]Tam, C.K. W.,"Computational Aeroacoustics; Issues and Methods",AIAA Journal,Vol.33, No.10,1995,pp.1788-1796

[2]K.A.Kurbatskii and C.K.W. Tam, "Cartesian Boundary Treatment of Curved Walls for High-Order Computational Aeroacoustics Schemes",AIAA Journal,Vol.35,No.1,Jan,1997

[3]V.John Mathews, Zhenhua Xie, "A Stochastic Gradient Adaptive Filter with Gradient Adaptive Step Size", IEEE, Vol.41, No.6,June 1993

[4]Maria A.Heckl, L.S. Mulholland,"Some Recent Development in the Theory of Acoustic Transmission in Tube Bundles", JSV(1995) 179(1), 37-62

[5]Tam,C.K.W,and K.A. Kurbatskii,"A Wavenumber Based Extrapolation and Interpolation Method for Use in Conjunction with High-Order Finite Difference Schemes",Journal of Computational Physics 157,588-617(200)