

유한요소법을 이용한 압전 수중음향센서의 음향특성 해석

°손선봉°, 김재환**

*인하대학교 기계공학과 대학원 **인하대학교 기계공학과

Acoustic Characteristics Analysis of Piezoelectric Underwater Acoustic Sensors Using Finite Element Method.

°Sun Bong Son° Jae Hwan Kim**

Department of mechanical engineering, Inha University

E-mail : jaehwan @dragon.inha.ac.kr

ABSTRACT

본 연구에서는 유한요소법(FEM)을 이용하여 압전 수중음향센서의 모델링 및 음향특성을 해석하였다. 압전 복합구조 수중음향센서의 해석에서 기본적인 압전-탄성 구조물과 유체-구조물의 연성해석을 위한 유한요소 정식화를 하였으며 무한영역의 음향유체를 처리하기 위하여 IWEE(Infinite Wave Envelop Element)를 도입하였다. Topitz 형 수중음향센서를 수중 산란체로 볼 경우 입사파가 산란체의 표면을 가진할 때 산란체로부터 발생하는 산란파는 IWEE로 인하여 무한 유체영역에서의 산란파의 감소특성을 갖게 되어 무한영역을 유한영역으로 나눈 인위적인 경계에서 반사가 일어나지 않게 되므로 산란파의 음압을 정확히 구할 수 있었다. 또한, 이러한 산란해석을 바탕으로 입사파에 대한 음향센서 내부의 전기적 응답특성인 RVS(Receiving Voltage Signal)를 구하였다. 이러한 일련의 연구 과정들은 소나(SONAR) 시스템을 정확히 해석하고 음향특성을 예측하는 데 큰 도움이 될 것이다.

I. 서론

소나(SONAR)와 같은 수중의 음탐장비와 음향대량장비등 음파를 이용한 수중장비들이 다양한 외부환경의 변화 가운데서도 뛰어난 성능을 갖게 하기 위해서는 이들의 음향특성을 정확하게 파악하는 것이 매우 중요하다. 수중음향센서는 외부에서 오는 음향신호만을 정확히 탐지하는 센서이다. 그러나 수중음향센서는 목적으로 하는 외부신호만이 아니라 각종 구조적, 환경적 요인들에 의한 여러가지 소음성분들, 센서에 가해지는 급격한 충격이나 주위를 둘러싼 각종 경계조

건의 변화, 센서가 설치된 플랫폼의 진동, 수중의 유동박리에 의한 소음등 여러가지 소음성분들에 노출되어 있다. 이들로 인한 잡음의 신호는 실제로 그 강도가 높아서 측정하고자 하는 음향신호를 저해하는 경우가 많다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 복합구조 수중음향 센서의 특성 해석 Software 를 개발하는 것이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 고유의 독자적인 복합구조 수중음향센서 해석 전용 Software 개발의 한 과정으로 압전 수중음향센서의 해석 및 특성예측을 위한 기능을 개발하였다.

II. 이론

2.1 압전 복합구조 수중음향센서 해석을 위한 유한요소 정식화

복합구조 수중음향센서는 탄성체의 구조재료 및 압전재료와 같은 능동재료 그리고 물이나 공기와 같은 유체의 영역으로 나눌 수가 있다. 구조재료 및 능동재료로 구성된 탄성체의 영역의 부분은 유한하며 유체의 영역은 무한하다고 볼 수가 있다.

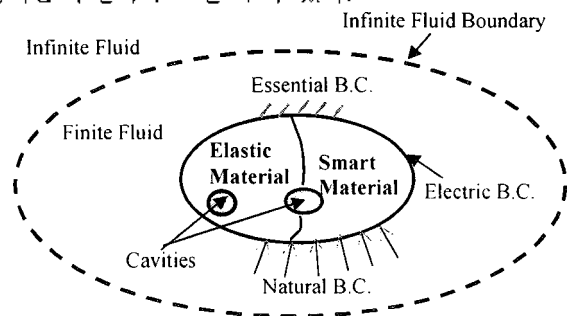


Fig.1 A Schematic Diagram of Underwater Acoustic Sensor

능동재료를 구성하고 있는 압전재료와 구조재료를 구성하고 있는 탄성재료가 연결된 문제의 유한요소정식화는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{m\phi} \\ K_{\phi m}^T & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (1)$$

U 는 탄성체 및 압전체의 절점변위, Φ 는 압전체의 절점 전기장, F 는 압전체 및 탄성체에 작용하는 절점력, Q 는 압전체에 인가되는 절점 전하벡터이다. M 은 탄성체 및 압전체의 질량행렬, K_{mm} 는 이들의 강성행렬, $K_{m\phi}$ 와 $K_{\phi\phi}$ 는 압전체의 유전행렬이다. 재료가 이방성이든지 등방성이든지 위의 식은 적용될 수 있으며 K_{mm} , $K_{m\phi}$, $K_{\phi\phi}$ 를 복소수로 처리하면 재료의 감쇠를 처리할 수 있다. 이 때 U, Φ, F, Q 도 복소수이어야 한다.

구조물과 유체가 연성되어 있을 때 구조물은 변위의 동적 탄성 방정식으로 표현되고 유체영역은 압력 또는 속도장의 음향방정식이나 변위의 운동방정식으로 표현될 수 있다. 유체영역을 Lagrangian 방식으로 변위를 사용했을 때 유체와 탄성체간의 방정식의 차이가 없으므로 유체와 탄성체를 연결시켜주기 위한 특별한 처리가 필요하지 않지만 Eulerian 방식을 사용하게 되면 유체영역을 압력변수를 사용하여 정식화하면 유체영역에서는 압력변수 하나만 사용하므로 자유도는 줄어든다. 하지만, 구조물과 유체의 경계면에서 압력과 변위를 연결시켜 주는 일종의 접속요소(Interface element)가 필요하게 된다. 압력을 사용한 탄성-유체 연성계의 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho Q^T & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 M, C, K 는 탄성체 구조물의 질량, 감쇠, 강성행렬이고 E, A, H 는 유체의 질량, 감쇠 및 강성행렬들이며 Q 는 구조물과 유체의 연성행렬이다. f_1 과 f_2 는 구조물에 작용하는 외력 및 파동에 의한 작용력을 나타낸다. 만일 조화해석인 경우 시간에 대한 미분이 주파수의 값으로 바뀌므로 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M + i\omega C + K & -Q \\ -\omega^2 \rho Q^T & -\omega^2 E + i\omega A + H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

2.2 무한유체영역의 처리

IWEE(Infinite Wave Envelop Element)는 형상함수에서 원음장의 특성과 파동적 변화의 특성을 동시에 나타내고 있으며 형상함수의 공액복소수를 가중함수로 사용하는 변형된 Gerakin 법을 사용하고 있다. 기존의 유한요소와 결합하여 바깥쪽의 경계면인 인위적인 경계(Artificial Boundary)에 위치함으로써 무한영역에서 방사나 산란문제를 유한영역으로 나타내어 해석하게 된다. 음의 방사나 산란을 해석하게 될 경우 수치해석적인 문제로 인하여 외부음장으로 전파되는 음이 인위적인 경계면에서 반사되는 문제점이 발생하는데 이러한 영향을 제거하기 위해 거리가 멀어짐에 따라 음압

이 감소하는 Sommerfeld 방사 조건을 만족하는 IWEE로 모델링하여 외부음장을 표현하게 된다.

2.3 산란해석

압전 복합구조 수중음향센서의 특성에 있어서 방사 문제 뿐만 아니라 산란문제도 매우 중요하다. 예를 들어 외부의 유체로부터 음파입력에 대한 음향센서 내부의 전기적 응답(Response)을 구하기 위해서는 산란파의 음압을 정확히 구해야 한다. 산란문제에 있어서 입사파가 산란체를 만나면 산란파가 생기게 되며 산란파와 입사파가 합해져서 임의 지점에서 전체의 음압을 이루게 된다. 따라서 임의의 형상을 갖는 탄성체의 산란을 수치적으로 해석하기 위해서는 탄성체와 연계해서 풀어야 한다. 유체-탄성체가 연계된 문제에서 $p = p_i + p_s$ 이다. 식(2)에서 전체 음압 p 를 대입하면 p_i 는 입사파에 의하여 아는 값이고 p_s 는 산란파로서 미지수이므로 p_s 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho Q^T & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + Qp_i \\ f_2 - (E\ddot{p}_i + A\dot{p}_i + Hp_i) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

만일 조화해석인 경우는

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M + i\omega C + K & -Q \\ -\omega^2 \rho Q^T & -\omega^2 E + i\omega A + H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + Qp_i \\ f_2 - (-\omega^2 E p_i + i\omega A p_i + H p_i) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

따라서, 유한요소와 무한요소를 사용하여 무한영역을 모델링하여 산란장의 음압을 구할 수 있다.

III. 결과 및 고찰

3.1 무한실린더 및 구의 방사해석

IWEE의 타당성을 검증하기 위하여 2차원 선형 유체요소와 선형 IWEE를 사용하여 Dirichlet 경계조건인 무한 실린더로부터의 방사해석을 하였다. Fig.2 (a)는 2차원 방사해석의 모델을 나타낸다.

반경이 1m인 실린더 내면에 압력이 1Pa의 압력이 일정하게 작용할 때 외부의 무한유체를 반경 1.4m의 경계면을 설정하여 이 경계면 내부는 4절점의 선형유체요소를 2열로 모델링하였고 외부는 선형 IWEE로 모델링하였다. 반경방향의 압력변화는 무한 실린더이므로 이론적으로는 Henkel 함수의 형태를 나타내며 일정한 압력이 내부에 작용하므로 원주 방향으로의 변화가 없다. Fig.3은 주파수가 100Hz일 때의 방사음압을 반경에 대하여 나타낸 것이다. 이 때 IWEE는 차수(order) 5를 사용하였다. 여기서 차수는 IWEE의 형상함수를 다항식으로 표현할 때 그 차수를 나타낸다. 참고로 고체-유체의 연성계를 풀 수 있는 상용 프로그램

램인 SYSNOISE의 결과를 함께 나타내었다. IWEE를 사용했을 때 이론해 및 상용프로그램의 결과가 모두 잘 맞고 있음을 알 수 있다. 이로서 2차원 선형 IWEE가 방사문제에 무한영역을 처리하기에 타당함을 알 수 있었으며 그 정확도를 확인하였다.

원형구의 방사해석을 통하여 3차원 선형 유체요소와 3차원 선형 IWEE를 테스트하였다. Fig.2 (b)는 3차원 방사해석 모델로서 원형구의 1/8만 나타내었다.

반경 1.16m의 원형구 내면에 1Pa의 압력이 일정하게 작용할 때 구 외부의 무한유체를 반경 1.33m의 경계면을 설정하여 이 경계면 내부는 8절점 선형 유체요소를 1개 사용하여 1열로 모델링하였고 외부는 3차원 선형 IWEE를 사용하여 무한영역을 모델링하였다. 원주방향으로 대칭이므로 요소를 한 개씩만 잡았다. 반경방향의 압력변화는 원형구이므로 이론적으로 $1/r$ 의 형태로 나타난다. Fig.4는 주파수가 100Hz일 때의 방사음압을 반경에 대하여 나타낸 것이다.

이 때 IWEE는 차수(order) 5를 사용하였다. IWEE를 사용한 결과 방사음압이 이론해와 잘 맞음을 알 수 있었다. 따라서, 3차원 IWEE 요소의 정확성을 확인하였고 이로서 3차원 IWEE 역시 방사문제에 무한영역을 처리하여 사용하기에 타당함을 알 수 있었다.

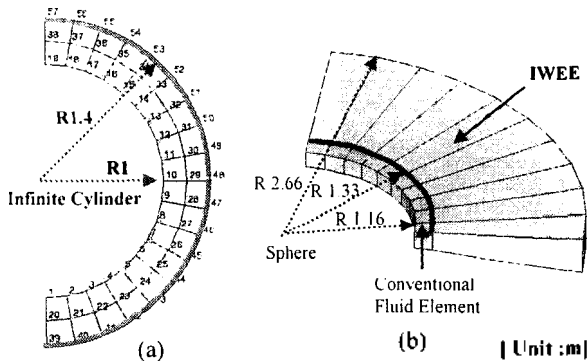


Fig.2 2D& 3D-Model of Radiation Analysis

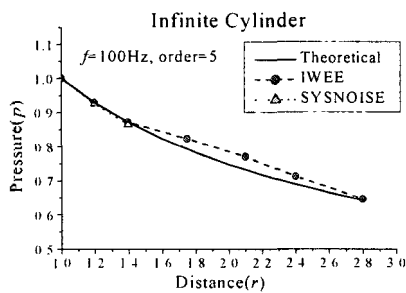


Fig.3 Result of 2D-Radiation Analysis (100Hz order5)

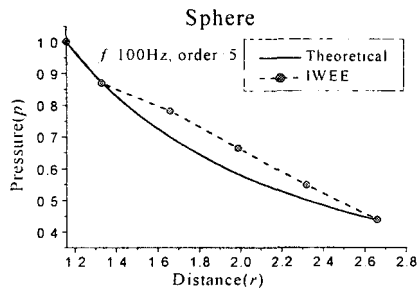


Fig.4 Result of 3D-Radiation Analysis (100Hz order5)

3.2 압전 복합구조 수중음향센서의 모델링

가장 기본적인 형태의 음향센서인 Tonpilz형 변환기를 해석수행 모델로 선정하였다. 원형 압전재료 (Piezoelectric material)를 Head Mass와 Tail Mass 사이에 놓고 압축력을 가한 것으로 Head Mass 전방에는 음향창(Acoustic window)이 붙어 있고 음향창은 유체와 접촉하고 있다. Tonpilz형 변환기는 축대칭형으로 여러 개의 요소가 배열되어 Hydrophone을 이루며 각 요소는 Onion Skin과 Coprene으로 쌓여 있어서 서로간의 접촉을 막아 주고 있다. Tonpilz형 변환기가 축대칭형이므로 반단면을 취하여 2차원으로 모델링하였다. Fig.5는 Tonpilz형 2차원 모델을 나타낸다.

전처리(Pre-processing) 과정을 통하여 433절점과 123개의 8절점 이차요소를 생성하였으며 총 9가지 재료를 사용하였다. 경계조건은 대칭형이므로 중심축과 Coprene 외벽에 대하여 y방향으로 고정시키고 Onion Skin Paper에서 축방향으로 힘을 받아 주는 부분을 x방향으로 고정시켰다.

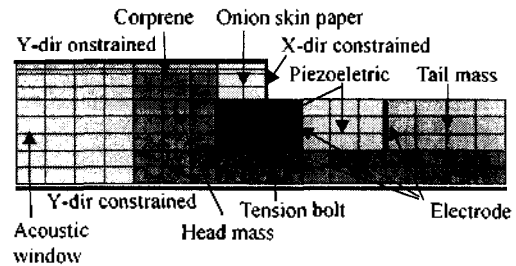


Fig.5 2D-Model of Tonpilz Transducer

3.3 Tonpilz형 수중음향센서 모델의 산란해석

가장 기본적인 형태의 음향센서인 Tonpilz형 변환기를 무한 유체영역속에 놓여 있는 수중 산란체라 보고 무한 유체영역에서의 산란장을 해석하고자 Fig.6과 Fig.7 같이 2차원과 3차원 해석 모델을 각각 설정하였다.

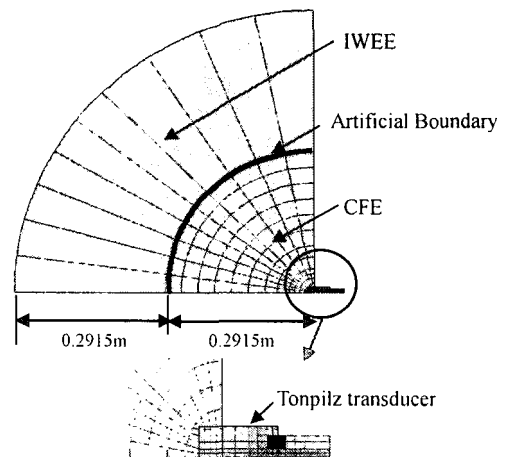


Fig.6 2D-Model of Scattering Analysis

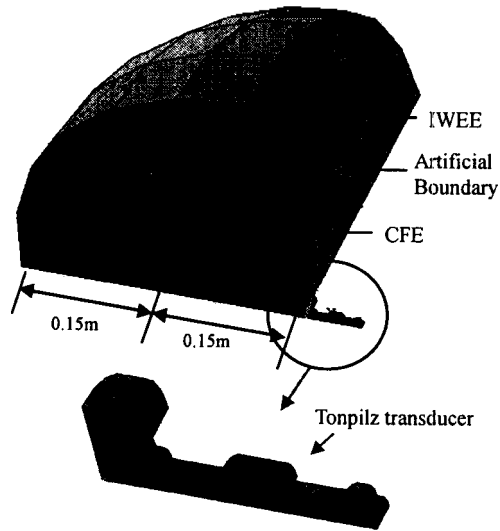


Fig 7 3D-Model of Scattering Analysis

2 차원 모델의 경우 전처리(Post-processing) 과정을 통하여 711 개의 절점과 8 절점의 이차요소 200 개 그리고 차수가 5 인 이하 IWEE 를 10 개 생성하였다. 반경 0.2915m 의 경계면을 설정하여 이 경계면 내부는 8 절점의 이차 유체요소를 사용하여 모델링하였고 외부는 산란체에서 인위적인 경계면까지의 거리인 반경 0.2915m 만큼의 거리로 이차 IWEE 를 사용하여 무한영역을 나타내었다. Tonpitz 형 변환기가 축대칭이므로 반단면을 취하여 2 차원으로 모델링하였고 유체영역은 원형의 1/4 만을 모델링하여 Tonpitz 형 변환기와 결합하였다. 3 차원의 경우 1562 개의 절점과 8 절점 선형 요소 1026 개 그리고 차수가 2 인 선형 IWEE 를 27 개 생성하였다. 0.15m 의 경계면을 설정하였고 내부는 8 절점 선형 유체요소를 외부는 선형 IWEE 로 모델링하여 무한영역을 나타내었다. Tonpitz 형 변환기는 1/8 만 취하여 3 차원으로 모델링하였고 유체영역 또한 구형의 1/8 만 모델링하여 Tonpitz 형 변환기와 결합하였다.

유체영역으로부터 입사각이 0°인 100Pa 의 평면파가 입사하여 산란체를 가진할 때 가진 주파수 변화에 따른 유체영역에서의 산란장의 음압을 구해서 후처리(Post-processing) 과정을 통하여 나타내었다. Fig.8 은 2 차원 해석모델의 100kHz 에서의 산란장의 음압을 나타낸 것이며 탄성 산란체와 인접한 유체영역에서의 산란장의 음압의 변화를 볼 수 있었으며 평면 입사파 입사 압력 100Pa 의 거의 2 배에 달하는 202.56Pa 까지 변화함을 볼 수 있었다. 이는 탄성 산란체인 Tonpitz 형 변환기와 유체의 상호작용의 연성효과로 인한 유체영역에서의 음압의 변화를 나타낸 것이다. 10kHz 미만의 가진 주파수 영역에서는 평면 입사파의 입사 압력장과 동일한 압력장으로 산란장의 음압을 구할 수 있었고 이는 탄성 산란체인 Tonpitz 형 변환기와 유체의 상호작용에 의한 연성 효과가 거의 없음을 나타낸다. Fig.9, Fig.10 은 2 차원 Tonpitz 변환기의 공진 주파수로 추정되는 64.6kHz 와 123.8kHz 에서의 산란장의 음압을 나타낸다.

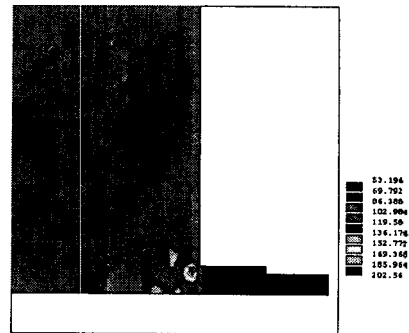


Fig 8 Scattered Pressure Field at 100kHz (100Pa, 0° incidence)

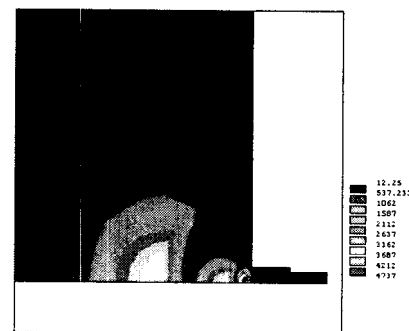


Fig 9 Scattered Pressure Field at 64.4kHz (100Pa, 0° incidence)

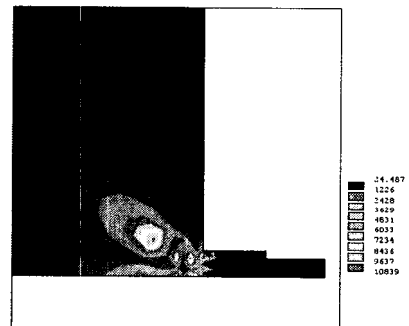


Fig 10 Scattered Pressure Field at 123.8kHz (100Pa, 0° incidence)

3.4 Tonpitz 형 수중음향센서 모델의 RVS (Receiving Voltage Signal)

소나는 변환하는 장치이므로 음압에 따라 발생하는 전압과 관련된 응답(Response)이 존재하게 된다. 본 연구에서 구하고자 하는 RVS(Receiving Voltage Signal)는 단위 음압의 평면파가 입사될 때 변환기의 전기적 터미널에 발생하는 전압을 말한다. 이것은 개회로(Open Circuit)일 때의 응답이다. RVS 를 정확히 구하려면, IWEE 를 통한 무한 유체영역을 모델링해서 입사파로 인한 탄성 산란체에 의하여 생성되는 산란파의 무한영역에서 감소특성을 처리하게 되어 인위적인 경계에서 반사가 일어나지 않게 함으로서 유체와 접한 소나 변환기의 음향장 표면에서 전체음압을 정확하게 구해야 한다. 전체음압이란 입사파와 산란파의 음압을 더한 것이다. 이 전체음압이란 앞서 언급한 탄성체의 산

란문제를 처리함으로써 구할 수가 있다.

Fig.11 과 2 차원 해석모델에서 각각 유체영역으로부터 입사각이 0°인 100Pa 의 평면파가 입사하여 탄성 산란체인 소나 변환기를 가진할 때 1Hz 에서 130kHz 까지의 가진 주파수 변화에 따른 Tonpiliz 형 소나 변환기의 전기적 응답을 구한 것이다. 64.6kHz 와 123.8kHz 에서 Tonpiliz 변환기의 공진에 의해 높은 응답이 발생한 것을 알 수 있다. 또한, Fig. 12 는 3 차원 해석모델에서 결과이고 86kHz 에서 높은 응답이 발생한 것을 알 수 있다.

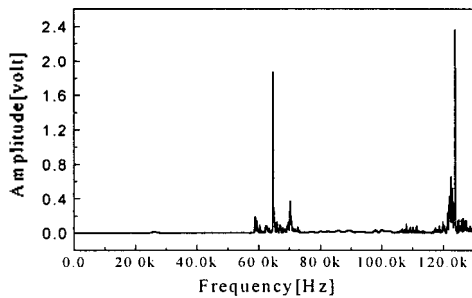


Fig 11 2D- Receiving Voltage Signal (100Pa, 0°incidence)

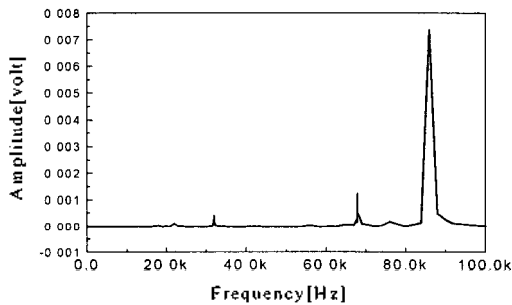


Fig 12 3D- Receiving Voltage Signal (100Pa, 0°incidence)

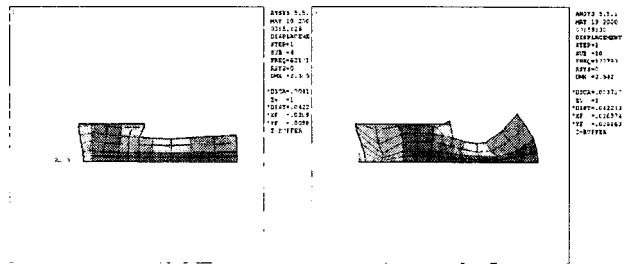
3.5 모드해석

앞에서 발견된 공진모드를 확인하기 위하여 기존의 상용 프로그램인 ANSYS 를 사용하여 압전 복합구조 수중음향센서의 모드해석을 수행하였다. Fig.6 에서 유체영역을 제외한 Tonpiliz 형 소나 변환기 부분을 해석 모델로 130kHz 까지의 주파수 영역에서 모드해석을 통하여 구해진 공진 주파수들을 Table.1 에 나타내었다.

Table. 1 Comparison of resonance frequencies

	Modal Analysis using ANSYS	Result of RVS
1 st mode	3.135 kHz	-
2 nd mode	44.225 kHz	-
3 rd mode	53.316 kHz	-
4 th mode	62.101 kHz	64.6 kHz
5 th mode	87.514 kHz	-
6 th mode	93.662 kHz	-
7 th mode	95.079 kHz	-
8 th mode	100.14 kHz	-
9 th mode	104.32 kHz	-
10 th mode	123.79 kHz	123.8 kHz

앞서 구한 입사파에 대한 Tonpiliz 형 소나 변환기 내부의 전기적 응답 특성인 RVS 값으로부터 추정되는 공진 주파수 64.6kHz, 123.8kHz 는 상용 프로그램인 ANSYS 를 사용하여 수행된 모드해석으로부터 구해진 공진 주파수 62.101kHz, 123.79kHz 와 거의 일치함을 확인하였다. 62.101kHz 와 123.79kHz 에서의 각각의 모드형상을 구하여 실제 변형형상과 모드형상을 Fig.13 에서 각각 비교하였다.



(a) 62.101kHz (b) 123.79kHz

Fig 13 Mode Shape (ANSYS)

IV. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 바탕으로 복합구조 수중음향센서의 센서 재료인 압전재료, 등방성/이방성의 구조재료, 점탄성의 음향원도 및 백킹재료로 이루어진 복합구조물이 유체와 연성된 시스템을 해석함으로써 수중음향센서 음향특성을 예측하였다.

구조물의 방사해석을 통하여 IWEE 가 방사문제에 무한 영역을 처리하기 위해 사용하기에 타당함을 알 수 있었고 그 정확도를 이론해를 통하여 확인하였다.

가장 기본적인 형태의 음향센서인 Tonpiliz 형 변환기를 수중산란체로 볼 경우 입사파가 산란체의 표면을 가진할 때 산란체로부터 발생하는 산란파는 방사해석을 통하여 무한영역을 처리하기에 타당함이 입증된 IWEE 로 인하여 무한 유체영역에서의 산란파의 감소 특성을 처리하게 된다. 따라서 인위적인 경계에서 반사가 일어나지 않게 되므로 산란파의 음압을 정확히 구할 수 있었다. 공진 주파수를 제외한 영역에서 가진 주파수가 높아짐에 따라 고주파수 영역에서는 유체와 탄성 산란체의 상호작용에 의한 연성의 효과가 커져서 산란체 표면근처에서는 입사파의 음압에 거의 두 배에 달하는 산란파의 음압의 분포를 확인하였다.

산란파의 음압을 정확하게 구하게 되므로 입사 음파로부터 음향센서 내부 압전체에서의 전기적 응답 특성인 RVS(Receiving Voltage Signal)를 구할 수 있었다. 그리고 가진 주파수의 변화에 따라 음향센서 내부에서 측정된 RVS 값이 공진주파수 영역에서는 매우 커짐을 확인하였다.

후 기

본 연구는 수중특화음향연구센터의 지원으로 수행된 과제(UA32)의 일부이며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

- (1) H. Alik and T. J. R. Hughes, finite Element Method for Piezoelectric Vibration International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, pp.151-157, 1970
- (2) R. Lerch, Simulation of Piezoelectric Device by Two- and Three-Dimensional Finite Elements IEEE Transaction on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, Vol 37, No 2, May 1990
- (3) J.Kim, V.V. Varadan and V.K. Varadan, finite Element Modeling of Structures Including Piezoelectric Active Device International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp.817-832, 1997
- (4) K.J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1982
- (5) P. Bettess, Infinite Elements International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 53-64, 1977
- (6) L. Cremers, K.R. Fyfe and J.P. Coyette, Variable Order Infinite Acoustic Wave Envelope Element Journal of Sound and Vibration, Vol. 171(4), pp. 483-508, 1994
- (7) R.J. Astley, G.J. Macaulay and J.P. Coyette, Coupled Wave Envelope Elements for Acoustical Radiation and Scattering Journal of Sound and Vibration, Vol. 170(1), pp.97-118, 1994
- (8) O.C. Zienkiewicz, K. Banedo, P. Bettess, C. Emson and T.C. Chiam, Coupled Infinite Elements for Exterior Wave Problems International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp.1229-1251, 1985
- (9) O.C. Zienkiewicz and P. Bettess, Fluid-structure dynamic interaction and wave force : An introduction to numerical treatment International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.13, pp. 1-10, 1978
- (10) G. C. Everstine, Symmetric potential formulation for fluid-structure interaction Journal of Sound and Vibration, Vol. 79(1), pp.157-160, 1981