2000년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집 제19권 제1(s)호

웨이블릿 변환을 이용한 시간 지연 추정법

° 김도형 박영진
한국과학기술원 기계공학과
소음 및 진동 제어 연구 센터

Time Delay Estimation using Wavelet Transform

° Doh-Hyoung Kim Youngjin Park
Center for Noise and Vibration Control(NoViC), Department of Mechanical Engineering,
Korea Advanced Institute of Science and Techonology
ventus@bomun.kaist.ac.kr yjpark@sorak.kaist.ac.kr

Abstract : A fast estimation method using wavelet transform for a time delay system is proposed. Main point of this method is to get the wavelet transform of the correlation between the input signal and delayed signal using transformed signals. But wavelet transform using Haar wavelet functions has basis with different phases and can offers a bisection method to estimate a time delay of a signal. Selective computation of the transform of correlation is performed and the computational complexity is reduced. Computational order of this method is $\mathcal{O}(N \log N)$ and it is much lower than a simple correlation esimation when the length of signal is long.

Keywords : Wavelet Transform, Time Delay Estimation

1. 서론

능동 소음 제어나 잔향 제거기 등, 각종 음향 시스템 모델링에서 음향의 전달 경로를 나타내는 시스템은 흔히 단순 시간 지연 시스템이나 유한개의 단순 시간 지연 시스템으로 단순화되는 경우가 많다. 이러한 단순 시간 지연 시스템의 지연 시간을 추정하기 위한 새로운 방법으로 웨이블릿 변환을 이용한 지연 시간 추정법을 제안한다. 이 방법은 지연 시간을 추정할 수 있는 상호 상관 관계 계수값의 웨이블릿 변환역 값에 대해 선택적 계산을 함으로써 지연시간이 긴 경우, 계산량을 크게 줄일 수 있다는 장점을 가지고 있다.

2. 웨이블릿 변환

웨이블릿 변환은 신호를 복소지수 기저함수를 이용하여 표현하던 Fourier 변환과는 달리 유한한 길이를 가진(Compactly supported) 기저 함수를 이용하여 표현하는 변환 방법이다[1, 2]. 웨이블릿 변환은 시간-주파수 영역에서 가장 일반적인 표현 형태를 제공하므로 비정상 신호에 대해 알맞은 주파수 해석 방법이라고 볼 수 있다.

연속시간에서의 웨이블릿 변환은 다음과 같이 표현된다.

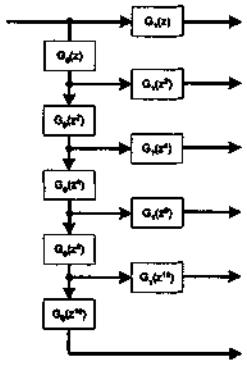

그림 1: FIR filter bank using sparse synthesis filter bank

$$\begin{aligned} \bar{f}(a,b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)dt \qquad (1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \end{aligned}$$

윗식에서 보듯이 웨이블릿 변환은 주파수가 아닌 스케일(scale) a과 이동(dilation) b를 인자로 가지는 기저함수 $\psi_{a.b}(t)$를 가지고 있다. 기저함수는 고주파 성분을 가지는 웨이블릿 함수 $\psi(t)$와 저주파 성분을 가지는 스케일 함수 $\varphi(t)$로 나뉘어진다. 이 기저함수중에서 서로 독립적인 기저함수들을 선택하는 방법이 이진 샘플링(dyadic sampling) 방법으로 다음과 같이 기저함수를 선택하였을 경우,

$$(a,b) \in \{(2^m, 2^m n t_0) | m,n \in Z\} \qquad (2)$$

이를 이산시간 웨이블릿 변환 (Discrete Wavelet Transform) 혹은 DWT 라고 부른다. DWT를 이용하여 신호를 분석하면 신호 $x(t)$를

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = &\sum_{m=-\infty}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\psi_{m,n}, x(t))\psi(t) \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\varphi_{M,n}(t), x(t))\varphi(t) \qquad (3) \end{aligned}$$

($(x(t),y(t))$는 내적)와 같이 M가지의 스케일을 이용하여 근사화하는 것이 가능하다.

이산 웨이블릿 변환의 실제 구현은 필터 뱅크를 이용하여 이루어지며 매 시간 변환이 이루어지는 이동 변환(sliding transform)의 경우 그림 1 처럼 웨이블릿 합성 필터 $G(z)$를 변형한 필터를 이용하여 구현되어야 한다.

웨이블릿 변환은 선형변환의 일종으로 이산 시간 신호 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ 에 대한 변환역 신호 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ 는 변환 행렬 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 를 이용하여 다음과 같은 행렬 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}_t \qquad (4)$$

변환 행렬 $\mathbf{T}$는 웨이블릿 변환의 기저 벡터들을 열벡터로 가지는 행렬이다.

$$\mathbf{T} = \left[\phi_0^T, \phi_1^T, \cdots, \phi_{N-1}^T\right]^T \in \mathbb{R}^{N\times N} \qquad (5)$$

여기서 $\phi_n^T \in \mathbb{R}^{N\times 1}$, $(n = 0, 1, \cdots, N-1)$.

기저 벡터의 지표(index)는 다음과 같이 스케일 지표(scale index) i 와 이동 지표(dilation index) j 로 구분하여 표시하는 것이 편리하다.

$$\phi_n = \phi_{i,j} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \cdots, \log N - 1 \\ j &= 0, 1, \cdots, 2^i - 1 \end{aligned}$$

그림 2. 에서 Haar 웨이블릿, $N = 8$의 경우 에 대해 기저 벡터를 표시하고 있다.

이동 웨이블릿 변환에 드는 곱셈 계산량은 그림 1 의 필터 뱅크를 사용할 경우 단위 시간 당 $\mathcal{O}(\log N)$ 이 된다. [2] 따라서 $2N$개의 전체 신호에 대해서는 $\mathcal{O}(N \log N)$ 이 된다.

3. 시간 지연 모델 및 추정 방법

시간 지연 시스템의 충격응답을 $h[n]$이라고 할 때, 이 시스템의 입력 $x[n]$와 출력 $y[n]$의 상관관계신호는 $x[n]$이 정상 신호(stationary signal)일 때, 다음과 같은 관계를 가진다.

$$c_{yx}[l] = h[l] * C_x[l] \qquad (7)$$

여기에서

$$\begin{aligned} c_x[l] &= \mathcal{E}\{x[n]x^*[n-1]\} \qquad (8) \\ c_{yx}[l] &= \mathcal{E}\{y[n]x^*[n-1]\} \qquad (9) \end{aligned}$$

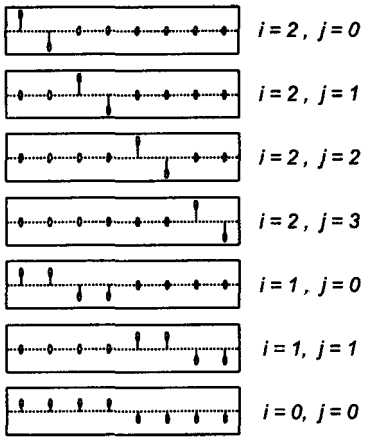

그림 2: Haar basis and indexes for $N = 8$

입력 신호가 백색 잡음일 경우 $c_x[l] = \delta[l]$ 이므로

$$c_{yx}[l] = h[l] \tag{10}$$

이 된다.

본 연구는 입력 신호가 정상 상태의 백색 잡음일 경우에 대해 이루어졌으며 이러한 조건을 만족하지 않는 경우 예측기(predictor)를 사용하여 입력 신호를 백색 잡음화 하는 방법[3]을 사용하여 이 조건을 만족시킬 수 있다.

시간 지연 시스템이 단순하게 Δ 스텝의 지연 시간을 갖는 경우를 고려하면

$$c_{yx}[l] = h[l] = \delta[n - \Delta] \tag{11}$$

이다.

따라서 입력 신호와 출력 신호로부터 $c_{yx}[l]$ 값을 추정하고 이로부터 Δ를 찾아내는 방법을 생각할 수 있다. $c_{yx}[l]$의 추정값 $c = \hat{c}_{yx}[l]$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_{yx}[N-1] \\ \vdots \\ \hat{c}_{yx}[0] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} y[2N-2] & \cdots & y[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-1] & \cdots & y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[N-1] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N}\mathbf{Y}\mathbf{x} \tag{12}$$

식 12 에서 상호 상관 계수를 추정하기 위해서는 $\mathcal{O}(N^2)$ 의 곱셈 계산이 필요하게 되므로 음향 시스템과 같이 지연시간이 길어지는 경우, 측정해야 할 시간의 길이가 길어져 계산량이 급격히 증가한다. 또한 추정된 상호 상관 계수값으로부터 지연 시간을 측정하는 것도 각 스텝의 상호 상관 계수값을 비교하여 최대값을 찾아내는 절차를 밟아야하므로 추가적인 계산이 필요하게 된다.

4. 웨이블릿 변환을 이용한 시간 지연 추정

웨이블릿 변환을 이용하여 상호 상관 계수의 변환역 값을 알아내기 위해 출력값의 변환역 값을 이용한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Tc} &= \mathbf{TYx} && (13) \\ \mathbf{c_t} &= \mathbf{T}\,[\mathbf{y[N-1]}\cdots\mathbf{y[0]}]\,\mathbf{x} \\ &= [\mathbf{Ty[N-1]}\cdots\mathbf{Ty[0]}]\,\mathbf{x} \\ &= [\mathbf{y_t[N-1]}\cdots\mathbf{y_t[0]}]\,\mathbf{x} && (14) \end{aligned}$$

여기에서

$$\mathbf{y}[n] = [y[n+N-1]\cdots y[n]]^T \tag{15}$$

출력 신호의 변환역 값 Y_t을 구하기위해 N번의 이동 변환이 필요하므로 이 때 필요한 곱셈계산량은 $\mathcal{O}(N \log N)$이다. 또한 $Y_t x$를 계산하여 상호 상관 계수의 변환역 값을 모두 알기위해서는 원래 $\mathcal{O}(N^2)$의 곱셈 계산이 필요하지만 다음과 같은 Haar 웨이블릿의 특성을 이용하면 선택적 계산을 통해 $\mathcal{O}(N \log N)$으로 계산량을 감소시킬 수 있다.

Haar 웨이블릿 기저 함수는 다음과 같은 특성을 가지고 있다.

$$\phi_{i,j}^T[n]\delta[n-\Delta] = \begin{cases} 0, & \text{if}\Delta < \frac{N}{2^i}j \text{or} \Delta \geq \frac{N}{2^i}(j+1) \\ 1, & \text{if}\frac{N}{2^i}j \leq \Delta < \frac{N}{2^i}j + \frac{N}{2^{i+1}} \\ -1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이러한 성질을 이용하면 다음과 같은 선택적 계산법을 이용하여 c_T 의 N개의 계수값 중 $\log N$ 개만을 선택적으로 계산하여 전체 계산량을 감소시킬 수 있다.

---

for k=0, $\quad i_0 = 0, j_0 = j_0(i_0) = 0$

given i_k, j_k

$$i_{k+1} = i_k + 1$$

$$j_{k+1} = \begin{cases} 2j_k & \text{if } c_{i_k,j_k} > 0 \\ 2j_k + 1 & \text{if } c_{i_k,j_k} > 0 \end{cases}$$

그림 4. 에서 $N = 128$이고 $\Delta = 23$인 경우에 대해 모의 실험을 수행한 결과를 보여주고 있다. 그림에는 모든 변환역 상호 상관 관계값이 나타나 있지만 실제로는 부호가 붙어있는 상호 상관계수 변환값만이 선택된 값이 되며 이 선택과정에서 $\Delta = 23$임을 알 수 있다.

보통의 상관관계 추정법을 사용할 경우의 곱셈 계산량은 16384 이며 제안된 방법을 사용할 경우의 곱셈 계산량은 2688로 약 84%의 계산량 감소를 얻을 수 있다.

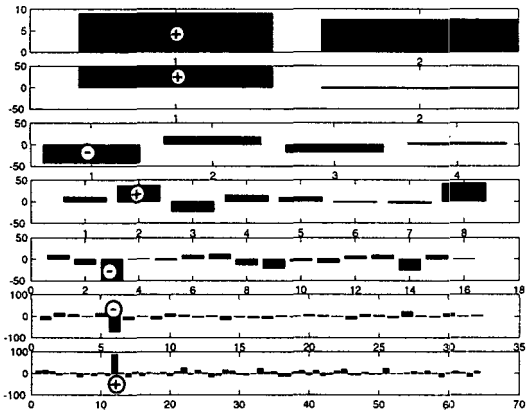

그림 3: Example of Transform domain cross correlation

5. 결론

본 연구에서는 단순 시간 지연 시스템의 지연 시간을 추정하기 위한 새로운 방법으로 웨이블릿 변환을 이용한 지연 시간 추정법을 제안하였다. 이 방법은 지연 시간을 추정할 수 있는 상호 상관 관계 계수값의 웨이블릿 변환역 값에 대해 선택적 계산을 함으로써 지연시간이 긴 경우, 계산량을 크게 줄일 수 있다는 장점을 가지고 있다. 다만 입력 신호가 백색 잡음이 아닌 경우 적응 필터를 사용한 방법 등의 추가적인 고려가 필요해지고 현재 단순 시간 지연 시스템에 대해서만 적용할 수 있다. 유한개의 임펄스를 가지는 복잡한 시간 지연 시스템의 경우에 대해서도 이 방법을 확장할 수 있는 연구가 진행중에 있다.

참고 문헌

[1] Stéphane Mallat. *a Wavelet tour of signal processing.* Academic Press, 1997.

[2] Martin Vetterli and Jelena Kovačević. *Wavelets and Subband coding.* Prentice Hall, 1995.

[3] Mamadou Mboup, Madeleine Bonnet, and Neil Bershad. LMS coupled adaptive prediction and system identification: A statistical model and transient mean analysis. *IEEE TRANSACTION ON SIGNAL PROCESSING*, 42(10):2607-2615, OCTOBER 1994.