자왜 재료의 비선형 구조 방정식에 관한 연구

강국진*, 노용대**, 김연보*** *경북대학교 센서공학과 **경북대학교 센서공학과/기계공학부 *** 대구대학교 정보통신공학부

A study on the nonlinear constitutive relation in magnetostrictive materials

Kukjin Kang*, Yongrae Roh**, Yeon-Bo Kim*** *Department of Sensor Engineering, Kyungpook National University **Dept. of Sensor Eng./School of mechanical Eng., Kyungpook National University ***School of Computer and Communication, Taegu University

*kkj@aslab.knu.ac.kr, **yryong@eeg.kyungpook.ac.kr, ***ybkim@biho.taegu.ac.kr

요약

자왜 재료는 자계 포화 이하에서 비선형 특성을 갖는 다고 알려져 있다. 그러나 지금까지 비선형 특성을 표 현하는 자왜 재료의 구조 방정식을 유도한 사례는 전무 한 실정이다. 본 연구에서는 자계 포화 이하에서 비선 형 특성을 갖는 자왜 재료의 비선형 구조 방정식을 4 차 탠서를 이용하여 유도하였다. 나아가 유도된 구조 방정식을 이용하여 자왜 재료 내의 파동 방정식을 정식 화하였다. 그리고 비선형 특성을 갖는 자왜 재료에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때 등방성 자왜 재 료의 탄성과 속도를 구하였다. 이상의 결과를 검증하기 위해서 자왜 재료 중에서 가장 널리 사용되고 있는 Terfenol-D의 탄성파 속도를 측정하여 본 연구에서 유 도한 자왜 재료 비선형 구조 방정식의 타당성을 일부 검증하였다.

향후에 자왜 재료의 정확한 특성을 측정하여 본 연구 결과와 비교함으로써 본 연구에서 유도한 비선형 구조 방정식의 타당성을 검중하고자 한다.

I. 서 론

자왜 효과(Magnetostrictive effect or Magnetostriction)라 함은 강자성 물질이 자화되었을 때 그 내 부구조에 변화가 일어나고, 외부 자장에 비선형적으로 비례하여 재료에 변형이 발생하는 형상을 뜻한다. 자왜 재료의 자기 포화에 대응하는 자계 이하의 자속 밀도에 대해서는 발생된 정적 응력 변형이 자속 밀도의 제곱에 비례하는 것으로 알려져 있다[1].

대표작인 자왜 재료로서, 수중 청음기에 많이 사용되 던 Nikel은 화학적으로 안정하고, 정수압에 무관한 특 성을 가지고 있지만, 전기기계 결합계수가 매우 작기 때문액 압전 재료로 대체 되었다. 금속 유리 합금은 얇 은 적충 구조를 가지고, 전기기계결합계수가 매우 높다 는 장점을 가지고 있어 수중 청음기에 많이 사용되고 있다[2]. 1980년 Clark은 회토유 산화물에서 매우 큰 자 왜 변형을 가지고 있다는 것을 발견하였다. 회토유 산 화물로 대표되는 Terfenol-D는 포화 자왜 변형 값이 매우 크기 때문에 압전 재료를 대체하여 저주파수의 수 중 변환기에 매우 많이 사용되고 있다. 그리고 실제로 Terfenol-D가 매우 우수한 특성을 나타낸다는 연구 결 파도 나와 있다[3].

그러나 지금까지 연구사례들은 실험 결과에 근간을

이루고 있으며 이론적인 연구 또한 자기 포화상태의 포 화 자왜(saturation magnetostriction)값을 이용하거나 [4-6], 또는 자기 포화에 대응하는 자계 이하에서 선형 적인 특성을 가진다고 가정한 상태(piezomagnetic)에서 해석을 행하고있다[7-8], 자왜 재료들은 자기 포화에 대응하는 자계 이하에서는 비선형 특성을 가지고 있다 는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러므로 선형 특성을 가 진다고 가정한 상태에서 해석을 행한 것은 정확한 해석 을 했다고 볼 수 없다. 그리고 비선형 특성을 표현하는 구조 방정식을 유도한 연구사례는 전무한 실정이다. 또 한 비선형 특성을 포함하는 자왜 재료 내의 파동 방정 식을 유도한 사례도 없다.

따라서 본 연구에서는 자왜 재료가 가지는 비선형 특성을 해석하기 위한 기초가 되는 비선형 구조 방정식 을 유도하고, 유도된 구조 방정식을 이용하여 자왜 재 료 내에서의 파동 방정식을 정식화하였다. 위의 결과를 이용하여 자왜 재료 내에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때의 종파, 횡과 속도를 구하였다. 나아가 대표 적인 자왜 재료인 Terfenol-D의 탄성파 속도를 측정하 여 본 연구에서 유도한 자왜 재료의 비선형 구조 방정 식의 타당성을 일부 검증하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

일반적으로 압자효과는 선형적인 압전효과와 유사하 고, 자왜 효과는 2차 효과로서 전왜(electrostriction) 특 성과 유사한 특성을 갖는다고 알려져 있다. 따라서 자 왜 구조 방정식은 기존의 압자, 압전, 전왜특성 해석 결 과를 바탕으로 유사하게 유도될 수 있다[9].

온도 변수를 제외한 열역학 함수로서 자왜 재료의 탄성 Gibbs 에너지는 식 (1)과 같이 표현된다[10].

$$G = -\frac{1}{2} c_{ijkl}^{H} S_{ij} S_{kl} + Q_{pglm} S_{pg} H_{l} H_{m} + \frac{1}{2} \mu_{ij}^{S} H_{i} H_{j} \quad (1)$$

여기서 c_{ijkl}^{H} 는 탄성계수(stiffness) 텐서, S_{ij} 는 변형율 (strain) 텐서, Q_{polm} 은 자왜 상수(magnetostriction coefficient) 텐서, H_{l} 는 자계(magnetic field intensity) 텐서, μ_{ij}^{S} 는 투자율(permeability) 텐서이다.

압자재료에서와 마찬가지로 자속 밀도는 식 (2)와 같 이 표현되고,

$$B_i = \left(\frac{\partial G}{\partial H_i}\right)_{S,T} \tag{2}$$

용력 텐서
$$T_{ij} = \langle (3) \mu \ \mathcal{E} \circ h \ \mathcal{E} \circ \mathcal{E}$$
 (3)
 $T_{ij} = -\left(\frac{\partial G}{\partial S_{ij}}\right)_{B,H}$ (3)

식 (1)을 삭 (2)와 (3)에 적용하면 구조 관계식은 삭 (4)와 같이된다.

$$T_{ij} = c_{ijkl}^{ij} S_{kl} - Q_{ijlm} H_l H_m$$

$$B_i = 2Q_{klji} H_j S_{kl} + \mu_{ij}^{S} H_j$$
(4)

여기서 *i와 j, k와 l*은 서로 교환할 수 있고 대칭이기 패문에 자왜 상수 탠서는 식 (5)과 같이 압축된 자왜 상수로 표현할 수 있다.

$$Q_{ijkl} = Q_{mn}$$
; $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (5)

식 (5)를 식 (4)에 적용하면 구조 관계식은 식 (6)과 같 이된다. $T_{ii} = c^{H}_{iik}S_{kl} - e_{iik}H_{k}$

 $\begin{aligned} I_{ij} &= C_{ijkl}S_{kl} - e_{ijk}H_k \\ B_i &= 2e_{ikl}S_{kl} + \mu_{ik}^S H_k \end{aligned} \tag{6}$

편의상 e_{ite} 을 대칭성을 고려한 matrix 형태로 표현하 면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} e_{ikl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{klkl} H_{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$
(7)

여기서,

위의 일반적인 식 (7)을 등방성 재료에 대해 단순화시 켜 보면[11],

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{12})$$
$$Q_{mn} = 0 , m \neq n (m, n = 4, 5, 6)$$

따라서 식 (7)은 식 (8)로 표현된다.

 $\begin{bmatrix} e_{32} \end{bmatrix} = \begin{cases} Q_{11}H_1 & Q_{12}H_1 & Q_{22}H_1 & Q_{22}H_1 & 0 & (Q_{11} - Q_{22})H_1 & (Q_{11} - Q_{22})H_2 \\ Q_{12}H_2 & Q_{11}H_2 & Q_{22}H_2 & (Q_{11} - Q_{22})H_1 & 0 & (Q_{11} - Q_{22})H_1 \\ Q_{12}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_3 & (Q_{11} - Q_{22})H_2 & (Q_{11} - Q_{22})H_1 & 0 \end{cases}$ (8)

Ⅲ.자왜 재료 내의 파동 방정식의 정식화 자왜 재료 내에서의 파동 방정식을 유도하기 위한 응력 운동 방정식은 식 (9)와 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho_m \ddot{u_i} \tag{9}$$

여기서 ρ, 은 말도, и;는 변위이다.

정자기 전하 방정식(charge equation of magnetostatic)은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0 \tag{10}$$

변형율과 변위 관계는 식 (11)과 같이된다.

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$
(11)

준 정전 전위(quasi-static potential) φ는 식 (12)로 표 현된다.

$$H_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \tag{12}$$

앞장에서 언급한 구조 관계식을 다시 한번 쓰면

$$T_{ij} = c^{H}_{ijkl}S_{kl} - e_{ijk}H_{k}$$

$$B_{i} = 2e_{ikl}S_{kl} + \mu^{S}_{ik}H_{k}$$
(13)

이며, 식 (11)과 (12)를 식 (13)에 대입하면 식 (14)와 같은 구조 관계식이 된다.

$$T_{ij} = c_{ijkl}^{H} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{k}}{\partial x_{l}} + \frac{\partial u_{l}}{\partial x_{k}} \right) + e_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_{k}}$$

$$B_{i} = 2e_{ikl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{k}}{\partial x_{l}} + \frac{\partial u_{l}}{\partial x_{k}} \right) - \mu_{ik}^{S} \frac{\partial \phi}{\partial x_{k}}$$
(14)

식 (14)를 식 (9)와 (10)에 대입하면 식 (15)가 된다. $c_{ijkl}^{H} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2} u_{k}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} + \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{j}} \right) + e_{ijk} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{j}} = \rho_{m} \ddot{u_{i}}$ (15) $2e_{ikl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2} u_{k}}{\partial x_{i} \partial x_{i}} + \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{i}} \right) - \mu_{ik}^{S} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{i}} = 0$ k와 l은 서로 교환될 수 있고 *C^Hlie*, 대칭이기 때문에 식 (15)는 식 (16)과 같이 표현된다.

$$c_{ijkl}^{H} \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{j}} + e_{ijk} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{j}} = \rho_{m} \ddot{u}_{i}$$

$$2e_{ikl} \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{i}} - \mu_{ik}^{S} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{i}} = 0$$
(16)

i = 1, 2, 3을 대입하면 식 (16)은 식 (17)과 같아 변위 *u*₁, *u*₂, *u*₃와 준 정전 전위 ¢에 대한 식으로 표현된 다.

$$c_{1jkl}^{H} \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{j}} + e_{1jk} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{j}} = \rho_{m} \ddot{u}_{1}$$

$$c_{2jkl}^{H} \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{j}} + e_{2jk} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{j}} = \rho_{m} \ddot{u}_{2} \qquad (17)$$

$$c_{3jkl}^{H} \frac{\partial^{2} u_{l}}{\partial x_{k} \partial x_{i}} + e_{3jk} \frac{\partial^{2} \phi}{\partial x_{k} \partial x_{i}} = \rho_{m} \ddot{u}_{3}$$

$$2e_{iki}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_i} - \mu_{ik}^{\rm S}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

IV. 평면파(plane wave)가 자계 방향으로 전파될 때 파 속도 계산

x₁,x₂,x₃ 가 각각 x, y, z 방향을 나타내고 평면파 가 z 축을 따라 전과 될 때 자왜 재료의 중파와 힁파 속도는 다음의 전개과정에 의해 구할 수 있다.

x₁ =x, x₂=y 방향을 나타내고 z 축을 따라 평면파 가 전파되기 때문에 경계조건은 ∂/∂x₁ = 0, ∂/∂x₂ = 0 이다. 따라서 식 (17)에 경계조건을 적용하게 되면 식 (18), (19), (20), (21)과 같이된다.

$$c_{55}^{H} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{35} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$
(18)

$$c_{44}^{H} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + e_{34} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$
(19)

$$c_{33}^{H} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho_{m} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$
(20)

$$2e_{35}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + 2e_{34}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + 2e_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \mu_{33}^S\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{2}{\mu_{33}^S} \left\{ e_{35} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{34} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} \quad (21)$$

평면파 해를 (22)와 같이 가정하고,

$$u_{j} = U_{j} e^{[i(\omega t - kz)]} ; j = x, y, z$$

$$\phi = \Phi e^{[i(\omega t - kz)]}$$
(22)

여기서, U_j 와 Ø 는 상수, k는 파수, ω는 각주파수 이다.

식 (21)과 (22)를 식 (18), (19), (20)에 대입하여 matrix 형태로 나타내면 (23)



또는 (24)와 같이된다.

k²[Г][U] = ρ_m ω²[U] ; [Γ] = stiffen ed Christoffel matrix 식 (24)가 해喜 갖기 위한 조건은 det | k²[Γ]-ρ_m ω²[I] | = 0

. 이고 식 (25)로 표현된다.



주어진 주파수에 대해서 식 (25)를 만족시키는 파수 k를 구하게 되면, 결국 이 값은 그 자왜 재료 내를 전 파하는 탄성파의 속도를 가져온다. 그러나 식 (25)는 재 료의 이방성에 따른 여러 개의 재료상수를 포함하고 있 고, 따라서 이 식을 만족시키는 파수 k의 closed form 온 상당히 복잡한 형태를 가진다. 식 (25)에 외한 속도 값 도출의 간단한 예로서, 이방성 자왜 재료를 등방성 재료로 가정하면 자계 방향이 3방향을 나타내므로 $H_1 = H_2 = 0$ 이고 자왜 상수 matrix는 식 (26)과 같 이 된다.

$$\begin{bmatrix} e_{122} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})H_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q_{11} - Q_{12})H_3 & 0 & 0 \\ Q_{12}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(26)

식 (26)을 (25)에 대입하여 정리하면
$$\left\{ \left(c_{33}^{H} + \frac{2e_{33}^{2}}{\mu_{33}^{S}} \right) k^{2} - \rho_{m} \omega^{2} \right\} \times \left(c_{44}^{H} k^{2} - \rho_{m} \omega^{2} \right)^{2} = 0$$
(27)

따라서 자왜 재료의 종파 속도(v) 및 횡파 속도(vs)는 식 (28), (29)와 같이 구하여진다.

$$v_{l} = -\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{33}^{H} + \frac{2e_{33}^{2}}{\mu_{33}^{2}}}{\rho_{m}}}; \notin \mathbb{H} \Leftrightarrow \mathbb{E}$$
 (28)

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{44}^H}{\rho_m}}$$
; 횡과속도 (29)

V. Terfenol-D 탄성파 속도

본 연구에서는 앞서 유도한 자왜 재료의 비선형 구 조 방정식의 타당성을 검증하기 위하여 자왜 재료 중에 서 가장 대표적인 Terfenol-D의 탄성과 속도를 측정하 였다. 본 연구에서는 길이 50 mm, 직경 10mm인 원통 형 Terfenol-D 시편을 사용하였고, 5 MHz 초음파 프 루브를 이용하여 Transmitter-Receiver법에 의하여 속 도를 측정하였다.

먼저 자장이 가해지지 않은 상태에서 중파와 횡파 속도를 측정하였는데, 중파속도는 3,552 m/s, 횡파속도 는 1,635 m/s이었다.

다음으로 Terfenol-D 시편에 코일을 감고 전류를 흘 려주어 자장이 형성되게 한 다음 종파속도를 측정하여 표 1에 나타내었다. 표 1에 나타난 결과를 보면 자장값 이 증가함에 따라 Terfenol-D의 종파속도도 증가하였 는데 증가분이 비선형적임으로 볼 때 Terfenol-D는 자 장에 따른 비선형 구조 방정식에 지배를 받는다고 말할 수 있다.

마지막으로 Terfenol-D 시면에 자장을 가하면 열이 많이 발생하는데 열에 의한 종파 속도 변화를 측정하여 표 2에 나타내었다. 표 2의 결과를 보면 열에 의한 종 파 속도의 증가분은 거의 없는 것으로 나타났다.

VI. 결론

본 연구에서는 자기 포화에 대용하는 자계 이하에서 는 비선형 특성을 갖는다고 알려진 자왜 재료의 비선형 구조 방정식을 4차 텐서를 이용하여 유도하였다. 나아 가 유도된 구조 방정식을 이용하여 자왜 재료 내의 파 동 방정식을 정식화하였다. 비선형 구조 방정식과 과동 방정식을 이용하여 자왜 재료에서 평면파가 자계 방향 을 따라 전파될 때 종파와 횡파 속도를 구하였다. 이상 의 결과를 검증하기 위하여 대표적인 자왜 재료인 Terfenol-D의 자장값에 따른 종파 속도를 측정하여 본 연구에서 유도한 비선형 구조 방정식의 타당성을 일부 검증하였다.

향후에는 실제 자왜 재료의 정확한 특성을 측정하여 본 연구의 결과와 비교함으로써 본 연구에서 유도한 자 왜 재료의 비선형 구조 방정식의 타당성률 검증하고자 한다.

후기

본 연구는 수중음향록화센터의 지원을 받아 수행된 과제의 일부이며, 동 센터의 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- 1. 차일환, 음향공학 개론, 한신문화사, 1976.
- Oscar Bryan Wilson, Introduction to Theory and Design of Sonar Transducers, Peninsula, Los Altos, 1988.
- M. B. Moffett, A. E. Clark, M. Wun-Fogle, J. Linberg, J. P. Teter, and E. A. McLaughlin, "Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers," J. Acoust. Soc. Am. 89(3), 1448-1455, 1991.
- 4. M. Ali and R. Watts, "Measurement of saturation magnetostriction using novel strained substrate techniques and the control of the magnetic anisotropy," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 202, 85-94, 1999.

- 5. H. Szymczak, "From almost magnetostriction to giant magnetostrictive effects: recent results," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 200, 425-438, 1999.
- Y. Chen, J. E. Snyder, C. R. Schwichtenberg, K. W. Dennis, D. K. Falzgraf, R. W. McCallum, and D. C. Jiles, "Effect of the elastic modulus of the matrix on magnetostrictive strain in composites," Applied physics letters, vol. 74, no. 8, 1159-1161, 1999.
- L. Kvarnsjo and G. Engdahl, "Differential incremental measurements of magnetoelastic parameters of highly magnetostrictive materials," Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications, Naples, Italy, 24-26 May, 1993.
- F. Claeyssen, N. Lhermet, and G. Grosso, "Giant magnetostrictive alloy actuators," Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications, Naples, Italy, 24-26 May, 1993.
- "IEEE standard on magnetostrictive materials: piezomagnetic nomenclature," IEEE Standard 319, 1971.
- C. L. Hom, S. M. Pilgrim, N. Shankar, K. Bridger, M. Massuda, and S. R. Winzer, "Calculation of quasi-static electromechanical coupling coefficients for electrostrictive ceramic materials," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 41, no. 4, 542-550, 1994.
- 11. J. F. Nye and F. R. S., *Physical properties of crystals*, Clarendon Press · Oxford, 1985.

전류 I (A)	자장 H (kA/m)	중파속도 (m/s)
0	0	3,552
1	2.5	3,556
2	5	3,574
3	7.5	3,596
4	10	3,627
5	12.5	3,692

표 1. 자장에 따른 Terfenol-D의 종파 속도.

표 2, 온도에 따른 Terfenol-D의 종파 속도.

(℃) 코옹	- 중파속도 (m/s)
20	3,552
30	3,554
40	3,555
50	3,556