FEM을 이용한 3-D 비선형 정자계 모델의 해석

강병길*, 류재섭, 고창섭
충북대학교 공과 대학 전기공학과

3-D Nonlinear Magnetostatic Analysis by using FEM

Byung kill kang*, Jae seop Ryu, Chang seop Koh
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National University

Abstract -A 3D magnetostatic field is analyzed considering the non-linear characteristics of the material using finite element method. In the finite element formulation, the edge element is adopted since it reduces the required computer memory and the computing time. The modified Newton-Raphson method is also used for non-linear analysis. A numerical example with the TEAM workshop problem 13 is analyzed, and the results are proved to concide well with measured ones.

1. 서 론

최근에 전자기기들의 고 정밀화, 고 효율화 되어가면서 기기들의 해석 및 설계시에 보다 정확한 전자기장의 분포 계산이 필요하게 되었지만, 아직까지는 국내의 많은 연구가 2차원에 국한되어져있으며, 2차원 모델을 해석할 경우 3차원 모델을 2차원으로 근사화하여 해석하면 많은 수치적 오차가 존재하고, 해석 모델의 형상도 2차원으로 해석할 수 없는 경우가 많기 때문에 3차원 해석이 요구되고 있다. 3차원으로 해석하는 방법에는 절점요소를 이용한 해석법과 변 요소를 이용한 해석법이 있으며, 절점요소를 이용한 해석법에서는 각 절점에서의 자기 벡터 포텐셜의 x, y 및 z방향 성분을 미지수로 하여 계산을 하게되므로 많은 미지수가 존재하게 되지만, 변 요소를 이용한 해석법에서는 변상의 자기 벡터 포텐셜을 미지수로 하여 해석을 하게 된다. 또한 요소의 경계면상에서는 절점요소법에 의해서는 자기 벡터 포텐셜의 x, y, z방향 성분이 연속으로 되고, 변 요소법에 의해서는 면의 접선방향성분만 연속으로 되어, 사면체 변 요소를 이용한 경우에는 미지수의 개수가 감소하게 된다. 따라서 변요소를 이용할 경우 컴퓨터의 저장용량 감소 및 계산 시간의 향상등의 장점이 있으므로, 본 논문에서는 사면체 변 요소를 이용한 3차원 비선형 정자계 문제의 해석을 행하였다. 또한 비선형의 해석에는 비교적 수렴시간이 빠른 뉴톤-랩슨법을 이용한 해석을 행하였다.

개발된 알고리즘을 3차원 비선형 정자장 문제(TEAM workshop problem13)에 적용, 해석하여 계산치와 측정치를 비교, 검토해본 결과 본 논문의 타당성이 입증되어졌다.

2. 본 론

2.1 지배방정식 유도

정자계 문제의 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터 벡터 포텐셜를 $\vec{A}$를 사용하여 다음과 같이 표현되어진다.

$$\nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}=\vec{J}+\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B_r} \tag{1}$$

μ는 투자율이며, $\vec{B}_r$[T]는 영구자석내에서의 잔류자속밀도이고 다음과 같이 표현되어진다.

$$\vec{B}_r=\mu_o\vec{M}_o \tag{2}$$

2.2 변 요소를 이용한 정식화

3차원 변 요소를 이용하는 경우 요소 (e)내의 임의의 점에서의 자기 벡터 포텐셜 $A^{(e)}$는 벡터 보간 함수 $\vec{N}_i$를 이용하면 다음 식으로 표현되어진다.

$$\vec{A}^{(e)}=\sum_{i=1}^{6}\vec{N}_iA_i \tag{3}$$

여기서, A_i는 요소 (e)내의 상대 변 번호 i에 대한 미지 변수이다. 또한 $\vec{N}_i$는 벡터 보간 함수로써 다음 식으로 표현되어진다.

$$\vec{N}_i=\lambda_{me}\nabla\lambda_{ne}-\lambda_{ne}\nabla\lambda_{me} \tag{4}$$

여기서, me과 ne은 각각 i번째 변을 구성하는 두 개의 절점이고, $\lambda_{me},\lambda_{ne}$는 각각 i번째 변을 구성하는 두 절 점에서의 선형 보간 함수이다.

식(1)에 갤럭킨법을 적용하면, 다음과 같은 식이 구해진다.

$$G_i=\int\vec{N}_i\cdot\nabla\times(\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}-\frac{1}{\mu_o}\vec{B}_r)dv-\int\vec{N}_i\cdot\vec{J}dv \tag{5}$$

여기서, $\vec{A}$에 식(3) 및 식(4)를 대입하여 풀면 다음과 같은 공식이 유도된다.

$$G_i=\sum_e G_i^{(e)}=\sum_e\left\{\sum_{l=1}^{6}\nu^{(e)}\cdot K_{il}^{(e)}\cdot A_l^{(e)}-F_{ji}^{(e)}-F_{mi}^{(e)}\right\} \tag{6}$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$K_{il}^{(e)}=\int(\nabla\times\vec{N}_i)\cdot(\nabla\times\vec{N}_l)dv \tag{7}$$

$$F_{ji}^{(e)}=\int\vec{N}_i\cdot\vec{J}dv \tag{8}$$

$$F_{mi}^{(e)}=\frac{1}{\mu_o}\int(\nabla\times\vec{N}_i)\cdot\vec{B}_rdv \tag{9}$$

여기서 $\nu^{(e)}$는 각 요소에서의 자기저항률이다.

또한 매질의 비선형성을 고려하기 위하여 뉴톤-랩슨법을 식 (6)를 적용하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial A_l}\right][\delta A_l]=-[G_i] \tag{10}$$

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial A_l}\right]=\sum_e \frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial A_l} \tag{11}$$

식(11)에서 우변의 식은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial A_l}=\nu^{(e)}K_{ii}^{(e)}\delta_i^{(e)}\delta_l^{(e)}+\frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial A_l}\sum_{l=1}^{6}K_{ii}^{(e)}\cdot A_l^{(e)}\delta_i^{(e)}\delta_l^{(e)} \tag{12}$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같다.

$$K_{ii}^{(e)}=\int(\nabla\times\vec{N_i})\cdot(\nabla\times\vec{N_l})dv \tag{13}$$

$$\frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial A_l}=\frac{\partial \nu^{(e)}}{\partial \vec{B}^2}\cdot\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial A_l} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial A_l}=2\cdot\sum_{k=1}^{6}K_{lk}\cdot A_k \tag{15}$$

여기에서, $\nu^{(e)}$는 자속밀도에 대한 함수로 $\nu^{(e)}=f(B^2)$로 표현이 되어지며, B는 각 요소 (e)에서의 자속밀도이며, $\delta_i^{(e)}$, $\delta_l^{(e)}$는 각각 그 요소 (e)에 i번 변, l번 변이 포함되어져 있는 경우만 1이고 그 외의 경우는 0이다.

전체적인 해석 알고리즘은 Fig. 1과 같고, 이때 비선형 해석의 수렴 판별 기준은 다음과 같다.

$$\underset{1\le i\le M}{Max}\left(\frac{|\vec{B}^{old}-\vec{B}^{new}|}{|\vec{B}^{old}|}\right)<3\% \tag{16}$$

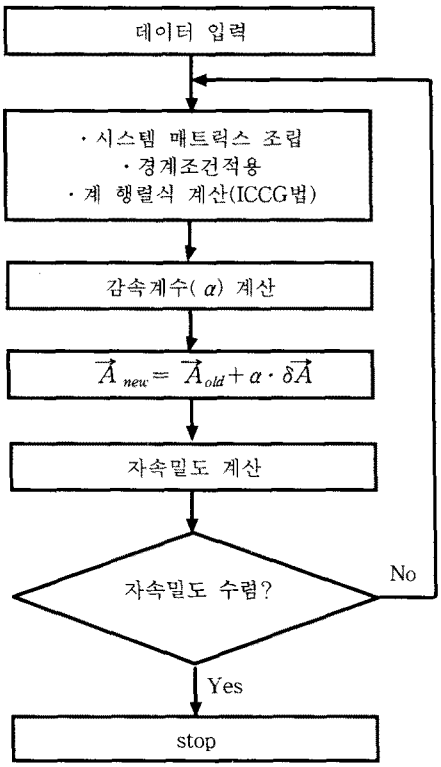

Fig. 1 FEM analysis algorithm

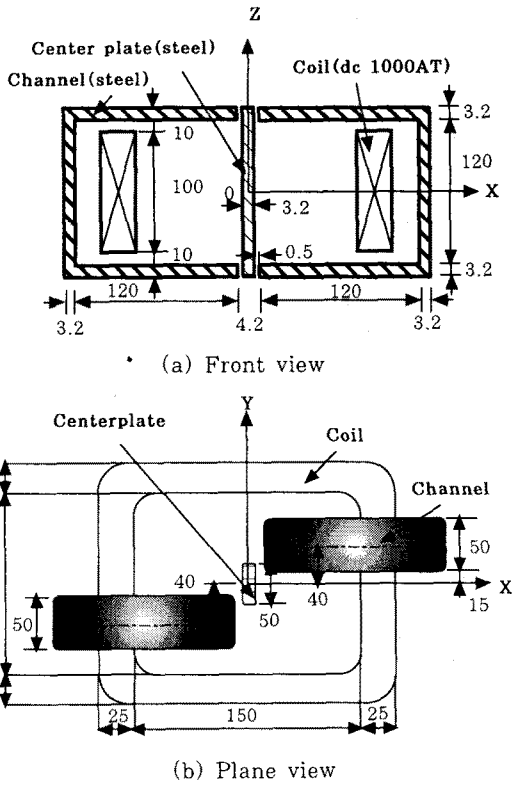

Fig. 2 Model for 3D non-linear problem
(TEAM Workshop Problem 13)

2.3 해석모델

본 논문에 제안된 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 Fig.2와 같은 3차원 비선형 정자장 모델(IEEE TEAM Workshop Problem13)을 해석하여 계산값과 측정치를 비교하였다[1].

Fig. 2에서 보듯이 해석 모델이 대칭이므로 전체 영역의 1/2만을 해석하였다. 또한 전류가 인가되는 부분의 전류의 연속조건을 만족하도록 모델링하였다[2][3].

요소 분할은 Fig. 3과 같이 자성체부분이 상당히 얇은 판으로 되어있기 때문에 정확한 비선형 해석을 위해 상당히 세밀하게 요소분할을 하였고, 공기부분과 코일부분은 비선형 해석이 이루어지지 않는 부분이므로 성기게 요소분할 하였다. 이때 모델에 대한 요소와 절점의 개수는 각각 57424, 10126개이며, 변의 개수는 68150개이다.

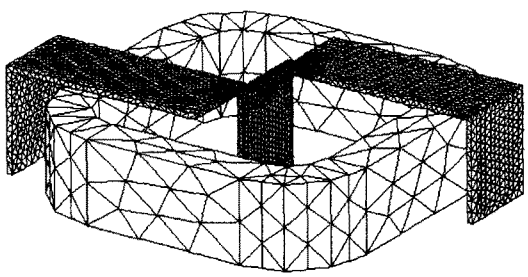

Fig. 3 Mesh division form

비선형 해석에 사용되어진 B-H 곡선은 Fig. 4와 같고, $\frac{\partial \nu}{\partial B^2}$는 주어진 데이터를 Bezier Spline하여 사용하였다. 또한 비선형 해석의 방법으로 사용되어진 뉴톤-랩슨법에서는 수렴 속도를 향상시키고자 감속계수 (α)를 겔럭킨법의 잔차를 최소로 하는 값으로 하였다[4].

2.4 해석결과

뉴톤-랩슨법에 의한 비선형 해석은 12회의 반복계산 후에 수렴되어졌다. 해석 모델의 자속 분포도는 Fig. 5와 같으며, 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 코일에 인가된 전류가 1000AT일 경우 중앙부분의 자성체와 윗 부분의 자성체가 만나는 양 끝 모서리에서 자속밀도가 가장 큰 값인 1.57[T]가 계산되어졌는데, 이것은 Fig. 5와 Fig. 6에서 보여주듯이 실험에 의한 측정치와 잘 일치함을 보이고 있다[5].

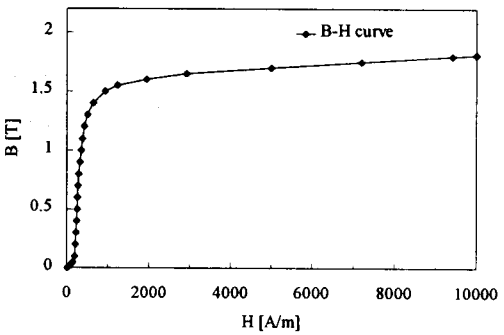

Fig. 4 B-H curve

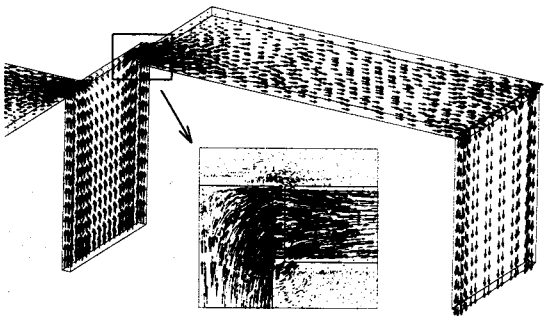

Fig. 5 flux distribution in steel

Fig. 6은 자성체의 바로 아래 부분에서의 x축의 변화에 따른 자속밀도의 분포를 나타낸 것이다. 이로부터 Fig. 5의 자속분포의 그림에서도 알 수 있듯이 20mm부분에서 크고 110mm부분에서 자속밀도가 작게 나타나는 것은 중앙부분에서의 자성체부분과 윗 부분의 자성체 부분이 만나는 모서리 부분에서 자기포화가 일어나 20mm부근에서 공기 중으로 누설되는 자속이 110mm부분에서보다 상당히 많다는 것을 보여주는 것이다.

Fig. 7의 결과 값의 x축 A~B는 중앙부분의 자성체의 단면에서의 평균 자속밀도 값이고, C~D는 윗 부분의 자성체의 단면에서의 평균 자속밀도값이며, E~F는 오른쪽 자성체부분에서의 단면의 평균 자속밀도값이다. Fig. 7의 데이터에서도 알 수 있듯이 B에서 C로 가면서 급격히 자속밀도가 감소하는데, Fig. 5의 자속 분포도를 보게 되면 B부분에서의 쇄교된 자속 전부가 C부분을 거쳐 쇄교되지 않고 공기 중으로 누설되는 자속이 많다는 것을 알 수 있다.

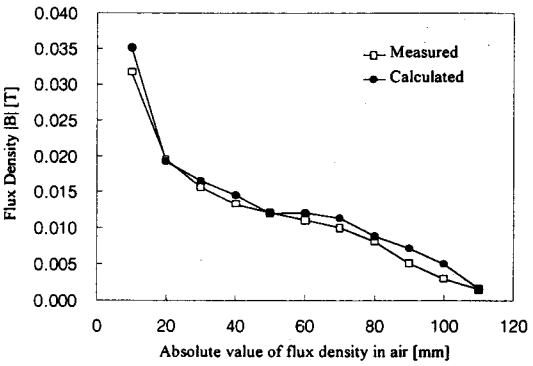

Fig. 6 Absolute value of flux density in air(1000AT)

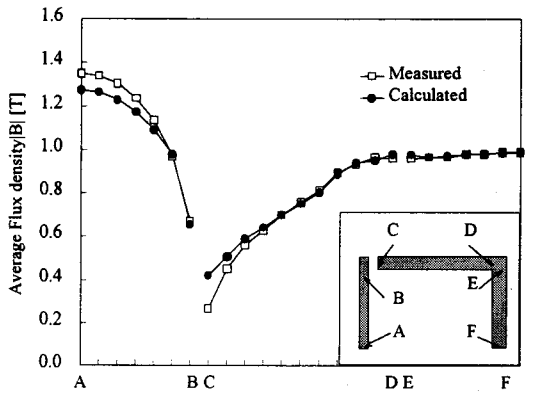

Fig. 7 Average Magnetic Flux Distribution along Plates(1000AT)

3. 결 론

본 논문에서는 3차원 유한요소법을 이용한 비선형 정자장 문제를 해석하였다. 그리고 본 논문에서 계산한 결과 값의 정확성 여부를 판별하기 위하여 실험 값이 주어진 TEAM workshop Problem13 of the IEEE을 선택하여 해석하였다. 위의 결과 값에서도 알 수 있듯이 본 논문의 변 요소를 이용한 유한요소법의 해석의 타당성이 입증되어졌다. 그러나 본 논문의 해석 모델의 경우 대칭인 경우 1/2의 해석이 가능하며, 주기경계조건이 첨가될 경우 전체 모델영역의 1/4의 해석이 가능하지만 이번 논문에서는 1/2만의 해석이 이루어졌다. 따라서, 다음의 논문에서 주기경계조건을 대입한 후 그 타당성을 검증하여 실제 기기의 해석에도 적용할 수 있을 것으로 사료된다.

[참 고 문 헌]

[1]TEAM Workshop: test problem(1~14),(1986-1991)

[2]K.Fujiwara,"On the Continuity of the Magnetizing Current Density in 3-D Magnetic Field Analysis with Edge Element", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.31, May 1995

[3]Y.Kawase, "最新 三次元有限要素法による電氣・電子機器の實用解析", 森北出版株式會社

[4]K.Fujiwara, "Method for Determining Relaxation Factor for Modified Newton-Raphson Method", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.29, March 1993

[5]Makoto Koizumi, "A New Element Vector in the Volume Integral Equation Method for Nonlinear Magnetostatics", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.31, No.3, May 1995