

변요소법을 이용한 3차원 와전류 문제의 유한요소 해석

홍승표*, 류재섭, 고창섭
충북대학교 전기공학과

3D Finite Element Analysis of Eddy Current Using Edge Elements

S.P Hong*, J.S Ryu, C.S Koh
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National Univ.

Abstract -A numerical method for the analysis of 3D eddy current in conductors due to applied time varying field is suggested using the finite element method. In the approximation of the field quantities, the edge element is used, because it reduce the required computer memory and the computing time compared with the nodal elements. With edge elements, furthermore, the field governing equations become simple because the electric scalar potential ϕ can be set to zero. The modified magnetic vector potential(A*) is used as a state variable. The analysed results are compared with the experimentally measured ones for the TEAM workshop problem3.

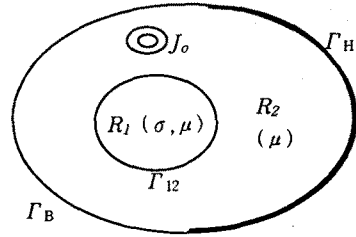


그림 1. 영역과 경계

1. 서론

종래의 전기,전자 소자의 해석은 2차원적으로 이루어져왔다. 그러나 이는 어느 한 방향으로의 변화를 무시할 수 있는 모델에만 적용이 되는 것으로 각종 소자의 경박 단소화가 이루어지고 있는 지금의 실정에서는 3차원적인 효과를 고려한 해석이 필요하다.

유한요소의 해석에는 절점요소법과 변요소법이 있다. 이 중 변요소법을 이용한 해석에는 자기벡터 포텐셜을 변을 따라 적분한 값이 미지변수로 정의되며 자기벡터 포텐셜의 연속조건 역시 변의 숫자만큼만 만족되면 되므로 절점요소법을 이용하는 경우에 비해 요소수나 요소분할의 방법에 상관없이 안정된 결과를 얻을 수 있는 장점이 있다[1].

3차원 와전류 문제의 해석에는 주로 A-φ법, A*법, T법, T-Ω법 등이 주로 사용되나, 매질의 비선형성을 고려한 해석에는 A-φ법이 널리 이용되어 왔다. 특히, 변요소법을 사용함으로써 전기 스칼라 포텐셜(∇φ)를 영으로 할 수 있어 효율적이다[1][2].

본 논문에서는 A*법을 이용하여 3차원 와전류문제의 전자계 분포를 해석하였다. 해석영역을 분할하는 요소로 사면체 요소를 이용하였다.

2. 본론

2.1 지배방정식의 유도

해석영역이 투자율(μ)과 도전율(σ)이 있는 도체영역 R1과 그 외부에 도전율이 없는 영역 R2로 되어있고, R2의 경계는 H1이 영이 되는 ΓH와 Bn이 영이 되는 ΓB로 구성되어 있는 경우, 지배방정식은 변위 전류를 무시하면 다음의 Maxwell의 방정식으로부터 유도된다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4)$$

여기서, \vec{B} 는 자속밀도, \vec{E} 는 전기장의 세기, \vec{H} 는 자계의 세기, \vec{J} 는 전류밀도, \vec{D} 는 전속밀도, ρ 는 전하밀도이다. 또한 보조방정식은 다음과 같다.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7)$$

자기 벡터 포텐셜(\vec{A})은 식(3)으로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (8)$$

위의 식들로부터 시변계에 대한 지배방정식은 다음과 같이 유도되고,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_o + \vec{J}_e \quad (9)$$

$$\vec{J}_e = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (10)$$

여기에서 \vec{J}_o 는 강제 전류밀도, \vec{J}_e 는 와전류밀도, ϕ 는 전기 스칼라 포텐셜이다.

수정된 자기벡터포텐셜(Modified magnetic vector potential) A*는 다음과 같이 정의된다[2].

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \int \nabla \phi dt \quad (11)$$

따라서, 지배방정식은 식(9)와 식(10)으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_1^*(\vec{r}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}_1^*(\vec{r})}{\partial t}, \quad \vec{r} \in R_1 \quad (12)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_2^*(\vec{r}) = \vec{J}_o(\vec{r}), \quad \vec{r} \in R_2 \quad (13)$$

2.2 변요소법을 이용한 정식화

영역 R_1 에서 정의된 식(12)에 Galerkin법을 적용하면,

$$\int_v \frac{1}{\mu} \vec{N} \cdot [\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}_1^*)] dv - \int_v \vec{N} \cdot [-\sigma \frac{\partial \vec{A}_1^*}{\partial t}] dv = 0 \quad (14)$$

이식을 벡터공식에 적용하여 다시 정리하면,

$$\int_v \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}_1^*) \cdot (\nabla \times \vec{N}) dv - \int_v \vec{N} \cdot [-\sigma \frac{\partial \vec{A}_1^*}{\partial t}] dv - \oint_{\Gamma_{12}} \frac{1}{\mu} [\vec{N} \times (\nabla \times \vec{A}_1^* \cdot \vec{n})] ds = 0 \quad (15)$$

이다. 영역 R_2 에서도 동일한 과정에 의해서 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \int_v \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}_2^*) \cdot (\nabla \times \vec{N}) dv - \int_v \vec{N} \cdot \vec{J}_o dv \\ & - \oint_{\Gamma_{12}} \frac{1}{\mu} [\vec{N} \times (\nabla \times \vec{A}_2^* \cdot \vec{n})] ds - \oint_{\Gamma_{23}} \frac{1}{\mu} [\vec{N} \times (\nabla \times \vec{A}_2^* \cdot \vec{n})] ds \\ & - \oint_{\Gamma_{12}} \frac{1}{\mu} [\vec{N} \cdot (\nabla \times \vec{A}_2^* \cdot \vec{n})] ds = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

영역 R_2 의 경계 Γ_H , Γ_B 에서의 적분은 그림1에 나타낸바와 같이 Γ_H 인 경계에서는 H_i 이 영이 되고, B_n 이 영이 되는 경계조건에 의해 영이 된다[3].

한편 Γ_{12} 사이에서의 경계적분은 매질의 경계에서 자속 밀도의 연속조건으로부터 다음식이 얻어지고,

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} &= (\nabla \times \vec{A}_1^*) \cdot \vec{n} = [\nabla \times (\vec{A}_1^* - \int \nabla \phi dt)] \cdot \vec{n} \\ &= (\nabla \times \vec{A}_1^*) \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} = (\nabla \times \vec{A}_2^*) \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (17)$$

경계 Γ_{12} 에서 $\vec{A}_1^* = \vec{A}_2^*$ 라는 조건을 줌으로써 경계적분은 소거된다. 따라서, 와전류가 포함하는 영역에서는 다음 식이 성립한다[2].

$$\int_v \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}^*) \cdot (\nabla \times \vec{N}) dv - \int_v \vec{N} \cdot \vec{J}_o dv - \int_v \vec{N} \cdot [-\sigma \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t}] dv = 0 \quad (18)$$

해석영역의 분할에 변요소를 이용하는 경우에는 요소(e)내의 임의의 점에서의 자기벡터 포텐셜 $\vec{A}^{(e)}$ 는 벡터 보간 함수 \vec{N}_{le} 를 이용하여 다음 식으로 표현되어진다.

$$\vec{A}^{(e)} = \sum_{le=1}^n \vec{N}_{le} A_{le} \quad (19)$$

여기에서, A_{le} 는 요소(e)의 상대 변 번호 le 에 대한

미지 변수이다. 벡터 보간 함수 \vec{N}_{le} 는 요소내의 절점에 의한 체적좌표와의 관계에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{N}_{le} = \lambda_{me} \nabla \lambda_{ne} - \lambda_{ne} \nabla \lambda_{me} \quad (20)$$

여기서, λ_{me} 와 λ_{ne} 는 각각 변 le 를 구성하는 상대 절점번호 me 와 ne 에 대응하는 체적좌표이다. 체적좌표 λ_{me} 는 요소내의 임의의 점이 있다고 가정할 때 임의의 점에서 절점 me 에 대응하는 체적과 요소(e)의 체적 비로써 정의된다[1].

식(18)에 식(19)를 대입한 후 시간 미분항을 후퇴 차분법으로 근사화하면 다음과 같이 표현된다.

$$G_i = \sum G_{ji}^{(e)} - \sum G_{ji}^{(e)} - \sum G_{ji}^{(e)} = 0 \quad (21)$$

$$G_{ji}^{(e)} = \sum_{le=1}^n \int_v \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{N}_{le} A^{*t+\Delta t}) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j) dv \quad (22)$$

$$G_{ji}^{(e)} = \int_v \vec{N}_j \cdot \vec{J}_o^{t+\Delta t} dv \quad (23)$$

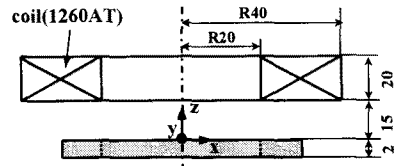
$$G_{ji}^{(e)} = \sum_{le=1}^n \int_v \vec{N}_j \cdot [-\sigma \frac{\vec{N}_{le} (A^{*t+\Delta t} - A^{*t})}{\Delta t}] dv \quad (24)$$

여기에서, A^{*t} 는 이전에 구한 값이고 $A^{*t+\Delta t}$ 는 현재 구해야할 미지수이다.

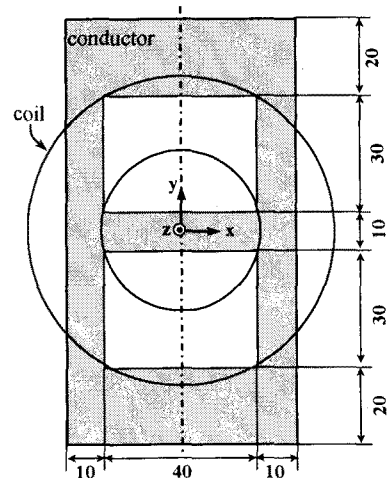
요소(e)내에서의 와전류밀도 $\vec{J}_o^{(e)}$ 는 식(10),(11) 및 (19)로부터 다음 식으로 표현된다.

$$\vec{J}_o^{(e)} = - \sum_{le=1}^n \frac{\sigma^{(e)}}{36 V_e^2} \frac{1}{\Delta t} [\vec{N}_i \cdot \vec{N}_{le}] \times (A_{le}^{*t+\Delta t} - A_{le}^{*t}) \quad (25)$$

여기서, V_e 는 요소(e)의 체적이다.



(a) 정면도



(B) 평면도

그림 2. 해석모델의 형상

2.3 해석결과

본 논문에서 제시한 해석방법을 와전류가 흐르는 시변 자장 모델(TEAM workshop problem3 of IEEE)에 적용하였다. 해석모델의 형상은 그림2에 나타낸바와 같이 코일이 도체판의 중심부에 위치하며, 코일에 흐르는 전류는 1260(AT), 도체판의 도전율은 0.3278×10^8 [σ/m]이고, 외부인가전류의 주파수가 각각 50Hz와 200Hz일 때 해석하였다. 원형의 코일에 주어지는 입력 전류는 전류의 연속조건을 만족하여야 하며, 시간에 따른 입력전류는 다음과 같이 인가되었다.

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft) \quad (26)$$

여기서, 시간 t 는 식(24)에서의 Δt 를 주파수 50Hz에서 8.333×10^{-4} [s], 200Hz에서 2.0833×10^{-4} [s]로 할 때를 한 Step으로 하여 전체 96 Step을 해석하였다.

요소의 분할은 그림3에 나타낸 것처럼 사면체 요소로 분할하였으며, 요소수 11666, 절점수 2294, 변수 14556으로 하여 전체 영역의 1/4을 해석하였다.

그림4는 전류가 0인 시점($f=1$)에서의 도체판 상단의 와전류 분포를 나타낸 것으로 와전류는 전류방향의 반대 방향으로 발생된 것이며, 표1은 도체 판에서의 와전류의 크기를 나타내었다.

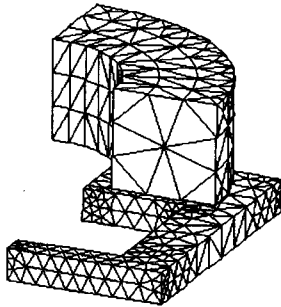


그림 3. 모델의 3차원 요소분할도

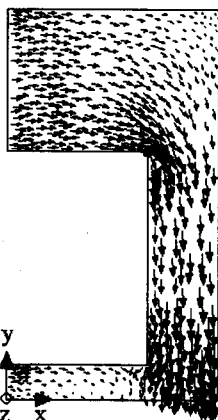


그림 4. 와전류 분포도($z=0$ mm)

표 1. 도체판에 흐르는 와전류값 비교

Frequency	Total eddy current[A]	
	Calculated	Measured
50Hz	66.24	68.05
200Hz	149.58	153.89

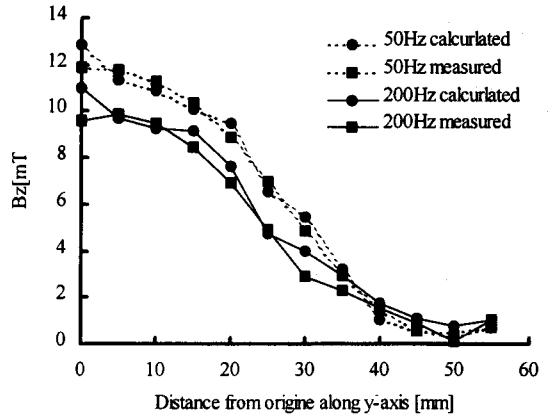


그림 5. y축에서의 거리에 따른 Flux분포 ($x=0.0$ mm, $z=0.5$ mm)

그림5는 주파수 50Hz, 200Hz에 대하여 $X=0$ mm, $Z=0.5$ mm일 때 y축을 따라 0mm에서부터 55mm까지 자속밀도의 z방향 성분의 최대값(B_{zmax})을 계산하여 실험치와 비교한 결과이다. 해석에 의한 결과값과 비교한 실험치는 Ref.[4]의 측정값을 적용하였다. 위의 결과로부터 알 수 있듯이 계산에 의한 결과값이 측정된 실험값과 일치함을 볼 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 3차원 와전류의 해석을 위해 수정된 자기 벡터 포텐셜 A^* 를 이용하여 지배방정식을 유도하였고, Galerkin법을 이용하여 정식화하였다. 시변 자계 내에서 도체에 발생하는 와전류를 해석하여 실험값과 비교·검토한 결과 비교적 일치함을 알 수 있었다. 이것으로써 본 논문에서 제시한 이론의 타당성을 입증하였다. 와전류를 포함하는 해석영역을 3차원으로 해석함으로써 전기 기기 및 소자의 보다 정확한 해석 및 설계가 가능할 것으로 생각된다.

(참 고 문 헌)

- [1] 河瀬順洋, "最新 三次元有限要素法による 電気・電子器機 の 實用解析", 森北出版株式会社, pp.1-15, 1997.
- [2] A.kameari, "Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge-Elements", IEEE Trans. on Magnetics, Vol.26, No.2, pp.466, 1990.
- [3] Oszkar Biro and Kurt Preis "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Current", IEEE Trans. Magnetics, Vol.25, pp.3145-3159, 1989.
- [4] A.Kameari, "Results for Problem 1A, 1B, 3, 4, and 6 by EDDYCUFF", The International Workshop for Eddy Current Code Comparison, Regional Workshop In Japan, pp.75-113, 1986.