

## 대역 제한 신호의 손실정보 복원

서창원\*, 안도랑, 이동욱  
동국대학교 전기공학과

### Recovery of Missing Samples for Bandlimited Signals

Chang-Won Seo\*, Do-Rang Ahn, Dong-Wook Lee  
Dept. of Electrical Engineering, Dongguk Univ

**Abstract** - This paper proposes an approach for recovering the original signal's spectrum from the spectra of a certain number of subsequences, obtained by downsampling the original sequence. Closed-form expressions for the missing samples in terms of the known samples are obtained by exploiting the linear dependence relationship among the spectra of downsampled subsequences.

#### 1. 서 론

손실 정보 복원은 이산 시간 신호 중 손실된 정보를 손실되지 않은 정보를 이용, 복원함을 의미한다. 예를 들면 유무선 통신에서 왜곡된 신호 복원이나 영상신호 혹은 음성 신호의 잡음을 없애는 작업등이 있다. 손실 정보 복원은 기존의 정보로부터 새로운 정보를 추론한다는 점에서 공학 분야뿐만 아니라 의학, 경제 등 여러 분야에서 관심을 두는 문제이다. 손실 정보 복원 방법은 크게 반복적인 방법과 비 반복적인 방법으로 나눌 수 있다. 반복적인 방법은 기존의 정보로부터 손실된 정보를 반복적인 계산에 의해 추론하는 방법으로 신호가 매우 불규칙적인 특성을 가질 경우 유용하다. 비 반복적인 방법은 신호가 일정한 특성을 가질 경우에 그 특성을 이용, 복원시키는 방법이다. 본 논문에서 제시하는 방법은 대역제한 연속시간 신호를 새논의 표본화이론에 따라 표본화한 이산 시간 신호에서 손실된 정보를 부 표본을 이용하여 비 반복적인 방법으로 복원시키는 방법을 제시한다. 본론에서는 정보 복원시 사용되는 부 표본에 대해 간단히 알아본 후, 손실 정보를 포함한 원 신호의 스펙트럼을 부 표본의 스펙트럼을 이용하여 표현하는 방법과 손실 정보를 손실되지 않은 정보로 복원하는 방법에 대해 설명하고, 모의 실험을 통한 제시된 방법의 특성을 살펴본다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 부 표본과 손실정보의 관계

본 절에서는 정보가 손실된 이산 시간 신호에서 취할 수 있는 부 표본을 이용, 손실정보를 복원시키는 방법에 대해 설명한다. 복원 방법은 부 표본의 스펙트럼을 이용한 방법과 손실 정보를 부 표본으로 직접 표현하는 방법 두 가지가 있다[1].

###### 2.1.1 부 표본

정보가 손실된 이산 시간 신호는 나이퀴스트 표본화 비율을 만족시키는 신호이므로 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

$$2\pi f = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N \quad (1)$$

여기서  $f$ 는 표본화 비율이며  $\Omega_N$ 은 표본화된 연속시간 신호의 최대 주파수이다. 이 이산시간 신호  $x[n]$ 에서 손실된 정보의 집합을  $L$ 이라 하고, 집합  $L$ 의 원소의 수가  $l$ 이라고 한다. 집합  $L$ 은 손실된 정보의 위치를 나타낸다. 또한 손실된 정보는 연속적으로 손실되었다고 가정한다. 즉 연속적으로  $l$  개의 표본이 손실된 정보라 가정한다. 식(1)에서 다음과 같은 조건을 만족시키는 최소한의 정수  $m$ 이 존재한다.

$$\frac{m2\pi}{(m+l)T} \geq 2\Omega_N \quad (2)$$

다음과 같이  $\omega_N = \Omega_N T$ 을 정의하면,  $\omega_N$ 과  $m$ 은 다음 식을 만족시킨다.

$$(m-1)\pi < (m+l-1)\omega_N < (m+l)\omega_N < m\pi \quad (3)$$

다음과 같은 부 표본을 정의하면,

$$x_k[n] = x[k + l + n(m+l)] \quad (4)$$

여기서  $k=0, \dots, m-1$  이므로 부 표본에는 손실된 정보가 포함되지 않는다.  $m$  개의 부 표본의 스펙트럼과 손실되지 않은 원 이산시간 신호의 스펙트럼은 다음과 같은 관계[2]가 있으므로

$$X_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{m+l} \sum_{r=0}^{m+l-1} X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)}) \quad (5)$$

식 (1), (2), (3)에서 부 표본의 스펙트럼은 원 신호의 스펙트럼이 에일리어싱 현상에 의해 생성됨을 알 수 있다.

###### 2.1.2 부 표본의 스펙트럼의 특성

식 (5)에서 나타낸 부 표본의 스펙트럼을 이루고 있는  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 은 다음과 같은 특징을 가지고 있으므로

$$X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)}) = X(e^{j(\omega-2\pi(r-m-l)/(m+l))}) \quad (6)$$

식 (5)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{m+l} \sum_{r=-\lfloor(m+l-1)/2\rfloor}^{\lfloor(m+l-1)/2\rfloor} X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)}) \quad (7)$$

또한, 부 표본 스펙트럼을 이루는  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$  각각의 대역폭을  $\omega_r$ 이라 하면  $\omega_r = (m+l)\omega_N$  이므로 식 (3)에 의하여 다음과 같은 관계를 알 수 있다.

$$(m-1)\pi < \omega, < m\pi \quad (8)$$

식 (7)과 (8)에서 다음과 같은 사실을 유추할 수 있다. 예일리어싱이 생긴 부표본의 스펙트럼을 이루는  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 요소 중  $[-\pi, \pi]$  구간에 영향을 주는 스펙트럼의 수는  $m$ 개다. 만일  $m$ 이 기수이면  $m$ 을 다음과 같이  $2p+1$ 로 표현이 가능하다.  $\omega$ , 이 식 (8)과 같은 대역폭을 가지므로  $(m+1)\pi$  밖에 존재하는 예일리어싱 요소  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 는  $[-\pi, \pi]$  구간에 영향을 주지 못한다. 마찬가지로 우수일 경우도 동일하다. 그러므로 식 (7)에서 주파수 영역에서 오른쪽에 위치한 예일리어싱 요소 중  $[-\pi, \pi]$ 에 영향을 주는 요소는  $r=0, 1, \dots, p$ 인 인자를 가지는 요소이며 부주파수 영역도 같은 수의 인자만 영향을 준다. 그러므로  $[-\pi, \pi]$ 에 영향을 주는 요소의 수는  $m$ 이 된다. 그러므로 부표본의 스펙트럼은  $m$ 개의 예일리어싱된  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 스펙트럼으로부터 복원이 가능하다는 점이다. 그러므로  $m$ 개의 부 표본의 스펙트럼은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_k(e^{jw}) = \frac{1}{m+l} \sum_{r=(m-1)/2}^{(m-1)/2} X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)}) \quad (9)$$

식 (9)에서  $m$ 개의 부 표본의 스펙트럼은  $m$ 개의 예일리어싱 요소  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 로 표현이 가능하다.  $m$ 개의 부 표본의 스펙트럼은 알 수 있는 정보이므로 손실된 정보를 포함한  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 스펙트럼은  $m$ 개의 부 표본의 스펙트럼의 선형 방정식의 해를 구함으로 알 수 있다.  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 스펙트럼이 복원되면 손실된 정보는 스펙트럼 특성을 고려, 역변환을 취한 후, 복원시킬 수 있다.

## 2.2 부 표본을 이용한 손실 정보 복원

2.1에서 알 수 있듯이 손실 정보는 부 표본의 스펙트럼을 이용하여 복원이 가능하지만, 2.2에서는 스펙트럼을 복원 후, 역변환을 취하는 방법을 사용하지 않고, 직접 부 표본 스펙트럼과  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 선형 종속 관계를 이용, 복원시키는 방법에 대해 설명하고,  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 을 역변환을 이용, 복원하는 방법과 비교해 본다.

### 2.2.1 선형 종속 관계를 이용한 손실 정보 복원

$m=2p+1$ 이라 가정하고 다음과 같은 변수를 정의하면,

$$z_k = e^{-j2\pi(k+l)/(m+l)}, \quad t_k = e^{j\omega(k+l)/(m+l)}$$

$$X_{-p,p} = [X(e^{j(\omega+2\pi p)/(m+l)}), \dots, X(e^{j(\omega-2\pi p)/(m+l)})]$$

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{2p} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_0^{-p} & \dots & z_0^{-1} & 1 & z_0 & \dots & z_0^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{2p}^{-p} & \dots & z_{2p}^{-1} & \dots & z_{2p} & \dots & z_{2p}^p \end{bmatrix}$$

$$X = [X_0(\exp(jw)), \dots, X_{2p}(\exp(jw))]'$$

식 (9)는 다음과 같은 행렬식으로 표현이 가능하다.

$$X = \frac{1}{2p+l+1} TZX_{-p,p} \quad (10)$$

복원시키고자 하는 표본을  $x$ 라 하면  $x=x_i[0]$  ( $0 \leq i \leq l-1$ )을 만족하는 새로운 부 표본을 고려한다. 그러므로 복원시키고자 하는 정보는  $x_i[0]$ 이 된다. 이부 표본의 스펙트럼을 포함하는 새로운 행렬을 다음과 같이 정의하면,

$$X_n = [X_i(e^{jw}), X_0(e^{jw}), \dots, X_{2p-1}(e^{jw})]$$

이에 따른  $T$ 와  $Z$ 의 변화된 행렬을  $T_n, Z_n$ 이라 하면,  $X_n$ 은 다음과 같이 나타내진다.

$$X_n = \frac{1}{2p+l+1} T_n Z_n X_{-p,p} \quad (11)$$

부 표본을 이루는 요소인  $X_{-p,p}$ 는 다음과 같으므로,

$$X_{-p,p} = (2p+l+1) Z^{-1} T^{-1} X \quad (12)$$

그러므로 식 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$X_n = T_n Z_n Z^{-1} T^{-1} X \quad (13)$$

또한  $Z$ 와  $Z_n$ 은 Vandermonde 구조의 행렬이므로 다음과 같은 Vandermonde 방정식을 만족시키는 행렬  $S$ 가 존재한다.

$$Z_n = SZ \quad (14)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{2p} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 식 (13)은 다음과 같이 표현되어진다.

$$X_n = T_n S T^{-1} X \quad (15)$$

그러므로 손실정보를 가진 스펙트럼  $X_i$ 은 다음과 같이 표현되며,

$$X_i = t_i[s_0 t_0^{-1} X_0(\exp(jw)) + \dots + s_{2p} t_{2p}^{-1} X_{2p}(\exp(jw))]$$

이 식을 적분하면 다음 결론을 얻을 수 있다.

$$x_i[0] = \sum_{k=0}^{m-1} (s_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k+l+n(m+l)] \sin c(a_k - n)) \quad (16)$$

즉, 손실 정보는 손실되지 않은 부 표본들 정보로 완벽히 표현이 되었다. 식 (16)에서 알 수 있듯이 손실정보는 부 표본들과 sinc 함수. Vandermonde System 방정식을 만족시키는 계수로 복원이 가능하다.

### 2.2.1 역 변환을 이용한 손실 정보 복원

식 (12)에서 알 수 있듯이  $X(e^{j(\omega-2\pi r)/(m+l)})$ 의 스펙트

럼은 Z행렬의 역 행렬을 이용하면 얻을 수 있다. 그러나, Z행렬의 구조가 Vandermonde 구조인[3] 관계로 역 행렬을 구하는 것은 쉽지 않다. 역 행렬을 구하는 알고리즘은 Traub 알고리즘등[4] 여러 가지가 있으나, 일반적인 형태로는 표현이 매우 어렵다. 그러나, Z의 역 행렬 중  $r=0$  부분만 필요하므로 알고리즘을 이용,  $r=0$ 인 행의 정보를 얻으므로  $X(e^{j\omega(m+1)})$ 의 정보를 부 표본 스펙트럼으로 표현 할 수 있다. 역 변환을 이용한 방법은 필요한 부 표본의 수가 적을수록 용이하다.

### 2.3 모의 실험

다음은 식 (16)을 모의 실험한 결과로 대역제한 신호를 표본화한 이산 시간 신호의 표본 중 20개를 손실된 정보로 가정 후 복원시키었다. 모의 실험에서는 이상적인 sinc 함수를 이용한 결과와 가장 많이 쓰이는 보간 함수인 영차 지속 함수를 이용한 결과를 비교하였다. 다음 그림 1은 손실되지 않은 원 신호를 나타낸다.

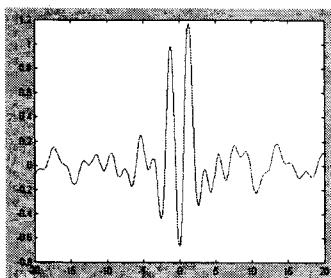


그림 1. 원 신호.

그림 2는 원 신호에서 20개 표본들이 손실된 신호이다.

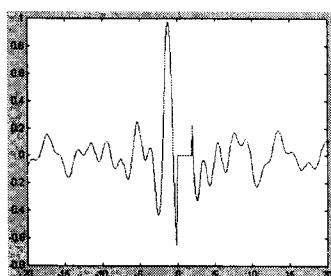


그림 2. 손실된 신호.

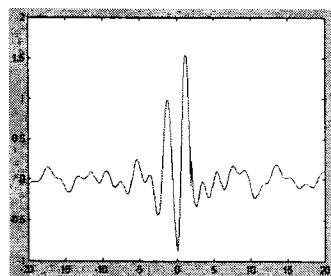


그림 3. sinc 함수 보간을 이용 복원된 신호.

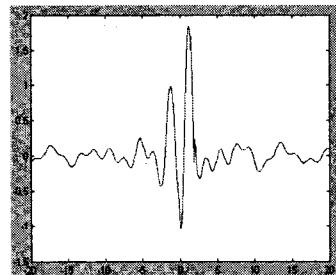


그림 4. 영차 보간 함수를 이용 복원된 신호.

그림 3과 4는 각각 sinc 함수와 영차 지속 함수를 이용하여 손실된 정보를 복원한 그림은 나타낸다. 모의 실험 결과가 나타내듯이 sinc 함수를 이용한 복원이 더 정확하지만 차이가 크지 않을 수 있다. 그러나, 식 (16)에서 나타나듯이 복원시 무한대의 부 표본이 필요한 반면 모의 실험은 매우 적은 수의 부 표본으로 복원 결과가 매우 불안정하였다. 이는 보간 함수가 매우 짧은 지속 시간을 지니므로 부 표본들을 이용한 보간의 효과를 나타내지 못하므로 나타나는 현상이다. 이런 점에서 보간 함수의 단순화는 연산량 감소로 연결되어지므로 식(16)의 구현 시 매우 중요한 사항이다. 그러나 논문에서 사용한 복원 방법에 의한 복원은 신호의 형태를 알아볼 정도로 신호를 복원하나, 오차가 매우 크며 불안정하므로 신호 특성상 역 행렬을 구할 수 있는 경우에는 역 행렬을 구하는 알고리즘을 이용하여 직접 스펙트럼을 복원시키는 방법이 더욱 뛰어난 방법이 될 것이다.

### 3. 결 론

본 논문에서는 정보의 손실이 있는 대역 제한 신호를 부 표본 스펙트럼을 이용하여 복원하는 방법에 대하여 설명하였고, 이상적인 sinc 함수에 의한 복원과 가장 많이 쓰이는 영차 지속 함수에 의한 복원을 실험하였다. 실험 결과 sinc 함수에 의한 복원과 가장 단순한 형태의 보간 함수인 영차 지속함수에 의한 복원이 큰 차이가 나지 않았다. 이것은 손실된 정보가 부 표본에서 추출되는 것인지 보간 함수에 있지 않기 때문이다. 그러므로 정보 추출 시 단순한 보간 함수를 이용하여도 큰 차이가 나지 않는다. 보간 함수의 단순화는 연산량 감소로 연결되어지므로 식(16)의 구현 시 매우 중요한 사항이다. 그러나 논문에서 사용한 복원 방법에 의한 복원은 신호의 형태를 알아볼 정도로 신호를 복원하나, 오차가 매우 크며 불안정하므로 신호 특성상 역 행렬을 구할 수 있는 경우에는 역 행렬을 구하는 알고리즘을 이용하여 직접 스펙트럼을 복원시키는 방법이 더욱 뛰어난 방법이 될 것이다.

### (참 고 문 헌)

- [1] Erchin Serpedin, "Subsequence based recovery of missing samples in oversampled bandlimited signals," IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 48, pp. 580-583, Feb. 2000.
- [2] A. Oppenheim and R. Schafer, Discrete-Time Singnal Processing, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989,pp. 102-103.
- [3] Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1988, pp. 97-98.
- [4] J. Traub, "Associated polynomials and uniform method for solution of linear problems," SIAM Review, Vol. 8 , NO. 3, pp. 277-301, 1966.