

비선형 시스템을 위한 퍼지모델 기반 일반예측제어

이철희, 서선학<sup>o</sup>  
강원대학교 전기공학과

Fuzzy Model Based Generalized Predictive Control for Nonlinear System

Lee Chul-Heui, Seo Seon-Hak<sup>o</sup>  
Dept. of Electrical Engineering Kangwon National University

**Abstract** - In this paper, an extension of model predictive controller for nonlinear process using Takagi-Sugeno(TS) fuzzy model is proposed. Since the consequent parts of TS fuzzy model comprise linear equations of input and output variables, it is locally linear, and the Generalized Predictive Control(GPC) technique which has been developed to control Linear Time Invariant(LTI) plants, can be extended as a parallel distributed controller. Also fuzzy soft constraints are introduced to handle both equality and inequality constraints in a unified form. So, the traditional constrained GPC can be transferred to a standard fuzzy optimization problem. The proposed method conciliates the advantages of the fuzzy modeling with the advantages of the constrained predictive control, and the degree of freedom is increased in specifying the desired process behavior.

1. 서 론

모델예측제어(Model Predictive Control: MPC)는 [1] 플랜트 모델을 이용하여 출력을 예측하기 때문에 사용되는 플랜트의 모델과 비용합수에 따라 다양한 방식들이 제안되었고, 산업공정을 비롯한 여러 분야에서 성공적으로 적용되었다 [2]. Clarke 등에 의해 제안된 일반예측제어(Generalized Prediction Control: GPC) 기법 [3]은 가장 대표적인 모델예측제어 기법이라 할 수 있는데 비최소위상 시스템, 시간지연이나 플랜트의 차수를 정확하게 알지 못하는 시스템, 불안정한 시스템에 대해 적용 가능하다는 장점을 가지고 있다. 이들은 모두 추정된 공정모델을 이용한 출력예측(output prediction)과 이동구간원리(receding horizon principle)에 기초를 둔다.

출력예측에서는 일정한 예측구간내의 미래공정모델 출력을 구하며 모델예측제어는 예측된 N개의 공정모델 출력과 원하는 공정출력의 차인 예측오차가 최소가 되도록 P개의 미래 제어출력을 결정한다. 이동구간원리는 결정된 P개의 미래 제어출력 중 현시점의 제어출력 u(k)만 공정에 인가하고 다음 샘플링 시점에 앞의 과정을 다시 행한다.

그러나 기존의 연구결과들은 선형모델에 기초한 것으로 비선형 공정에의 적용은 한계가 있다. 그런데 종래의 제어기법과는 달리 모델 예측제어는 비선형 공정에 대한 적절한 비선형 모델이 존재한다면 비선형 모델예측제어로 쉽게 확장할 수 있으며, 퍼지모델은 수치적 또는 언어적으로 표현된 정보를 모두 취급할 수 있는 비선형 사상이라는 점에서 퍼지 모델은 모델예측제어의 비선형 모델의 좋은 대안이 될 수 있다.

최근에 퍼지모델을 이용한 모델예측제어가 일부 연구되었으나 식별된 퍼지모델에서 퍼지 임펄스 응답 모델을 구하는 모델변환과정을 시행함으로써 실시간 적용이 불가능하고 모델의 파라미터 수가 많아지거나 식별된 모델의 규칙수가 월등히 많고 성능이 나쁜 단점을 보인다.

본 논문에서는 Takagi-Sugeno(TS) 퍼지모델 [4]을 이용하여 GPC의 형태로 모델 예측제어를 구현하였다. TS 퍼지모델은 IF-THEN 형태의 퍼지규칙의 전진부에서 퍼지집합을 이용하여 데이터의 정보를 처리함으로써 시스템이 갖는 불확실성을 수용할 수 있고 후진부는 입력 출력 데이터의 선형식 형태로 표현되므로 GPC와 같은 선형적인 모델 예측 제어기법을 결합시키기에 매우 용이하다. 또한 TS 퍼지모델은 상이한 N개의 퍼지 규칙을 가지고 퍼지추론 과정을 거치므로 전체적으로는 비선형적인 제어 특성을 구현 할 수 있게 된다.

본 논문에서는 또한 GPC의 성능을 요구 사양에 맞도록 개선하기 위한 제약 조건들을 정보의 부족, 시스템의 비선형성 등에 의한 불확실성을 반영할 수 있도록 퍼지 제약 조건으로 완화하였다. 그럼으로써 등식제약 조건과 부등식제약 조건을 단일한 형태로 표현할 수 있을 뿐 아니라 일반적인 제약조건부 예측 제어를 표준적인 퍼지 최적화 문제로 변환하여 취급하게 된다.

2. 퍼지 모델

비선형 플랜트를 위한 모델로서 TS 퍼지모델을 채택할 경우, 퍼지 규칙의 전진부에 사용된 변수들을 후진부의 선형식에 그대로 사용하여 1 스텝 예측기 형태로 퍼지 규칙을 구성하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 R_i: & \text{IF } y(t) \text{ is } A_{1,i}, y(t-1) \text{ is } A_{2,i}, \dots, y(t-n_a+1) \text{ is } A_{n_a,i} \\
 & u(t) \text{ is } B_{1,i}, u(t-1) \text{ is } B_{2,i}, \dots, u(t-n_b+1) \text{ is } B_{n_b,i} \\
 \text{THEN } & y_i(t+1) = \theta_i^T X
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

여기서, i: i번째 퍼지 규칙 (i=1, ..., N)

n<sub>a</sub>: 출력의 차수

n<sub>b</sub>: 제어 입력의 차수

A<sub>k,i</sub>, B<sub>k,i</sub>: 변수의 퍼지 집합

$$X^T = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_a+1), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_b+1), 1]$$

$$\theta_i^T = [a_{1,i} \ a_{2,i} \ \dots \ a_{n_a,i} \ b_{1,i} \ b_{2,i} \ \dots \ b_{n_b,i} \ c_i]$$

식(1)로 표현되는 N개의 규칙들을 이용하여 퍼지 추론을 거쳐 얻어지는 TS 퍼지 모델의 출력  $\hat{y}(t+1)$ 는 다음과 같다.

$$y(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i(t) y_i(t+1)}{\sum_{i=1}^N w_i(t)} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) y_i(t+1)
 \tag{2}$$

여기서, w<sub>i</sub>(t)는 시간 t일 때 규칙 R<sub>i</sub>의 적합도이다.

식(2)는 다음과 같은 입·출력 표현식으로 다시 나타낼

수 있다.

$$y(t+1) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i(t)y(t-l+1) + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i(t)y(t-l+1) + \bar{c}(t) \quad (3)$$

여기서,

$$\bar{a}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) a_{1,i} \quad (4)$$

$$\bar{b}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) b_{1,i} \quad (5)$$

$$\bar{c}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) c_i \quad (6)$$

식(3)에서 볼 수 있는 것처럼 출력 예측기의 구조는 선형이지만 파라미터들이 시변이므로 비선형 시스템에 사용될 수 있다.

식(3)을 다항식 형태로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(q^{-1})y(t+1) = B(q^{-1})u(t) + C, \quad (7)$$

여기서,

$$A(q^{-1}) = 1 + \bar{a}_1(t)q^{-1} + \bar{a}_2(t)q^{-2} + \dots + \bar{a}_n(t)q^{-n} \quad (8)$$

$$B(q^{-1}) = 1 + \bar{b}_1(t)q^{-1} + \bar{b}_2(t)q^{-2} + \dots + \bar{b}_n(t)q^{-n} \quad (9)$$

$$C(q^{-1}) = \bar{c}(t) \quad (10)$$

식(3)은 비선형 ARX 모델(NARX)이지만 파라미터 행렬  $\theta_i$ 가 시변이므로 선형 시변 모델로 간주할 수 있다. 식(1)의 TS 퍼지모델은 결국 입력 공간을 퍼지 부분공간으로 분할하여 각 부분 공간의 입출력 관계를 선형식으로 나타내고 가중치를 고려한 이들의 합에 의해 비선형 시스템의 입출력 관계를 나타낸 것이므로 모델링을 위해서는 입력공간 분할(전건부 구조 식별), 소속함수 결정(전건부 파라미터 식별), 출력 구성 변수 선택(후건부 구조 식별), 출력 선형식 파라미터 결정(후건부 파라미터 식별)이 필요하다.

입력공간분할을 위해서는 template 기반 기법, 퍼지 clustering 기법 등을 적용할 수 있으며, 본 논문에서는 Yager의 Mountain Clustering 기법(5)을 적용하였다. 그리고 소속함수의 결정을 위해서는 신경망을 이용한 학습 방법이나 complex등과 같은 비선형 최적화 프로그래밍 기법을 사용한다. 출력 선형식 파라미터 결정은 다음 절에서 설명하겠지만 최소자승법을 사용할 수 있다.

TS 퍼지모델의 목적이 비선형 시스템의 정확한 모델링이라면 입력공간분할을 세분화해서 규칙의 수를 많이 해야 하지만, 모델 예측제어에 적용할 경우 비교적 적은 수의 규칙을 사용해도 충분하다. 또한 출력 선형식을 구성하는 변수의 수도 많지 않아도 된다.

### 3. 출력 예측

모델예측제어를 위해서는 일정한 예측구간 내의 모든 스텝에 대한 출력예측이 필요하다. 그러나 식(1)의 TS 퍼지모델은 1스텝 예측 표현식일 뿐만 아니라 식(8)(9)에서 보는 것처럼 다항식  $A_t$ ,  $B_t$ 의 시변특성으로 인해 고정된 구간에서 예측을 위해 사용할 수 없다. 이러한 문제의 해결에는 다음의 두가지 방법이 가능하다.

i) k 스텝에서 얻어진 모델은 N 다음단계에서 타당하다고 간주된다. 기본 가정은 수행도의 변화율이 고려된 구간상에서 무시될 수 있다는 것이다. 예측제어가 이동구간전략이라는 것을 명심하고, 첫 번째 제어입력만이 스텝 k+1에 효과적으로 적용되며, k+2, ..., k+N 단계에서의 행동자의 정확한 예측은 그다지 엄격하지 않다.

ii) 또 다른 접근법은 퍼지 모델링 부분을 변화시킴으로써 각 부모모델은 출력의 미래 예측집합을 나타내게 된다. 결과적으로 수행도는 N스텝 이전의 예측에 대해 상수값

이 된다.

식(1)의 TS 퍼지모델에서 각각 독립적인 부모 모델(sub-model)을 표현하고 있는 N개의 퍼지 규칙을 분리해서 살펴보자. i번째 퍼지 규칙의 후건부 선형식에 적분동작  $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ 을 도입하면 다음과 같이 된다.

$$y(t+1) = (1 - A^i(q^{-1}))\Delta y(t+1) + B^i(q^{-1})\Delta u(t) \quad (11)$$

이때  $c_i$ 항은 적분동작에 의해 제거된다. 그러면 일반적인 GPC 문제와 동일한 방법으로 j스텝 예측기가 다음과 같이 행렬식으로 주어진다. [6]

$$\hat{Y}_j = G_j \hat{u} + F_j = Y_{j, \text{forced}} + Y_{j, \text{free}} \quad (12)$$

여기서  $\hat{Y}_j$ 는 예측출력 벡터,  $\hat{u}$ 는 미래 제어입력 증분 벡터,  $F_j$ 는 모든 미래제어입력 증분이 0일 때 얻어지는 자유응답 벡터이고,  $G_j$ 는 행렬의 요소가 플랜트 모델  $B_i/A_i\Delta$ 의 임펄스 응답 계수에 상응하는 행렬이다.

식(7)의 선형시변 모델에서, 고정 예측구간 동안의  $\lambda_i(t)$ 의 변화를 무시하면 전체적인 TS 퍼지모델은 LTI 모델이 된다. 최적화된 예측기는 하나의 부모모델의 경우와 마찬가지로 다음과 같이 된다.

$$\hat{Y} = G\hat{U} + F = Y_{\text{forced}} + Y_{\text{free}} \quad (13)$$

그러나 이 경우 GPC에서처럼 Diophantine 항등식을 풀어야 하는 단점이 있다. 따라서 다음과 같이 다중 스텝 TS 퍼지모델을 고려할 수 있다.

$$R_j: \text{IF } y(t) \text{ is } A_{1,i}, y(t-1) \text{ is } A_{2,i}, \dots, y(t-n_a+1) \text{ is } A_{n_a,i} \\ u(t) \text{ is } B_{1,i}, u(t-1) \text{ is } B_{2,i}, \dots, u(t-n_b+1) \text{ is } B_{n_b,i}$$

$$\text{THEN } \hat{y}(t+j+1) = \sum_{i=1}^{N_y} \hat{a}_{i,j}(t) y(t-l+1) \\ + \sum_{i=1}^{N_y} \hat{b}_{i,j}(t) u(t-l+1) \\ + \sum_{i=1}^{N_y} \hat{g}_{i,j}(t) u(t+d) \quad (14)$$

여기서  $j=1, 2, \dots, N_y$ ,  $i=1, 2, \dots, N_c$  이다.

식(14)의 TS 퍼지모델은 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\hat{y}(t+j+1) = \sum_{i=1}^{N_y} \bar{a}(t) y(t-l+1) \\ + \sum_{i=1}^{N_y} \bar{b}(t) u(t-l+1) + \sum_{i=1}^{N_y} \bar{g}(t) u(t+d) \quad (15)$$

여기서  $j=1, 2, \dots, N_y$

$$\bar{a}(t) = \sum_{i=1}^{N_y} \lambda_i(t) \hat{a}_{i,j} \quad (16)$$

$$\bar{b}(t) = \sum_{i=1}^{N_y} \lambda_i(t) \hat{b}_{i,j} \quad (17)$$

$$\bar{g}(t) = \sum_{i=1}^{N_y} \lambda_i(t) \hat{g}_{i,j} \quad (18)$$

식(14)의 퍼지모델은 Diophantine 항등식을 풀지 않고 최소 자승법을 이용하여 전 예측구간의 출력을 직접적으로 예측할 수 있다.

### 4. 예측제어 알고리즘

GPC에서 제어 입력은 유한한 이동 구간에 대한 성능 지수를 최소화하도록 구해진다. 이때 비용함수는 일반적으로 다음과 같이 예측 구간내의 예측오차와 제어구간의 제어입력 증분에 대한 2차식을 사용한다.

$$J = \sum_{j=1}^N (\hat{y}(t+j+1) - r(t+j+1))^2 + \alpha \sum_{j=1}^N \Delta u^2(t+j) \quad (19)$$

식(19)에서  $\alpha$ 는 성능과 제어비용 사이의 trade-off를 달성하도록 선정한다.

식(13)으로부터 식(19)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = (G\bar{U} + F - R)^T (G\bar{U} + F - R) \alpha \bar{U}^T \bar{U} \quad (20)$$

그러면 제어법칙은  $\partial J / \partial \bar{U} = 0$ 으로 됨으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\bar{U} = (G^T G + \alpha I)^{-1} G^T (R - F) \quad (21)$$

TS 퍼지모델 (1) 또는 (14)를 이용한 모델 예측제어는 다음과 같이 2가지 방식으로 구성할 수 있다.

첫째, 퍼지 병렬분산 GPC 제어기는 먼저  $N_c$  LTI 부모 모델(12) 각각에 대한 선형 GPC 문제를 풀고 다음으로 퍼지 추론을 사용한 하나의 단일값을  $N_c$  제어기 출력에 합성하는 것이다. 둘째, 식(13)이나 다중 스템 퍼지 예측모델(15)의 결과로 얻어지는 전체 퍼지 예측모델에 근거한 성능지수를 직접적으로 최적화하는 방법이다.

### 5. 예측제어의 제약조건 완화

예측제어에서는 제어 성능을 개선하거나 실제 동작 환경에서의 제한을 고려하기 위하여 식(19)의 비용함수에 대한 최적해를 찾을 때 제약 조건을 부가하는 경우가 많다. 제약조건은 출력과 제어입력에 대해 주어지며 다음과 같이 등식 제약조건과 부등식 제약조건 형태로 주어진다.

i) 등식 제약조건

$$\hat{y}(t + N_y + j) = r(t + N_y) \quad j = 1, \dots, m \quad (22)$$

ii) 부등식 제약조건

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+j) \leq \Delta u_{\max} \quad \text{for } j = 1, \dots, N_u \quad (23)$$

$$u_{\min} \leq u(t+j) \leq u_{\max} \quad \text{for } j = 1, \dots, N_u \quad (24)$$

$$y_{\min} \leq \hat{y}(t+j+1) \leq y_{\max} \quad \text{for } j = N_1, \dots, N_y \quad (25)$$

그런데 비선형 플랜트의 경우에는 정보의 부족이나 불확실성으로 인해 이러한 제약조건을 정확히 적용할 수 없게 된다. 따라서 이러한 제약조건을 보다 완화시킬 필요가 있는데 퍼지 기법을 활용하여 그림 1과 같이 완화할 수 있다.

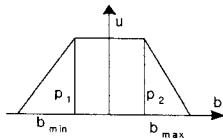


그림 1. 퍼지 제약 조건

$$u(b) = \begin{cases} 0, & b < b_{\min} - p_1 \\ 1 - b_{\min} - \frac{b}{p_1}, & b_{\min} - p_1 \leq b < b_{\min} \\ 1, & b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \\ 0, & b_{\max} + p_2 < b \end{cases} \quad (26)$$

$p_1, p_2$ 는 안정하게 받아 들일 수 있는 정도를 표시하는 퍼지 tolerance이고  $b_{\min}, b_{\max}$ 는 예상되는 경계를 나타낸다.  $p_1, p_2 = 0$ 는 엄격한 제약인 경우로써 등식 제약조건을 완화한 것으로 간주할 수 있다. 식(26)의 퍼지 제약조건을 사용할 경우 파라미터의 설정에 따라 등식, 부등식 제약조건을 동일한 구조에서 표현할 수 있는 장점이 있다. 퍼지 제약조건을 사용할 경우 일반적인 제약조건부 GPC 문제는 퍼지 최적화 문제로 변환되며 퍼지

최적화는 아래와 같은 두 가지 방법으로 구성 될 수 있다.

Type 1: 최소 만족 정도를 최대화한다.  
(1개 제약의 경우)

$$\begin{cases} \max \alpha \\ \text{s.t. } \mu_i(x) \geq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

Type 2: 가중되는 만족도의 합을 최대화한다.  
(다중 제약의 경우)

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^m \beta_i \mu_i(x) \\ \text{s.t. } \mu_i(x) \geq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \beta_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

위의 퍼지 최적화는 Wang(7) 등이 제안한 유전자 알고리즘을 이용한 부정확한 접근법을 이용하여 해를 구할 수 있다.

### 6. 결론

본 논문에서는 TS 퍼지모델을 비선형 시스템의 모델로 사용하고 GPC 형태로 모델 예측제어를 구현하는 방법을 제안하였다. 그리고, TS 퍼지모델을 몇가지 다른 형태로 표현하고 이에 따른 식별과정을 제시했다.

또한, GPC의 성능을 요구 사양에 맞도록 개선하기 위한 제약 조건들을 퍼지 제약 조건으로 완화함으로써 일반적인 제약조건부 예측 제어를 표준적인 퍼지 최적화 문제로 변환하여 취급하였다.

### (참고 문헌)

- [1] Richalet, J., A. Rault, J. L. Testud and J. Papon, "Model predictive heuristic control: applications to industrial processes", Automatica, 14, 413-428, 1978
- [2] Richalet, J., "Industrial application of Model-based predictive control", Automatica, 29(10):1251-1274, 1993
- [3] Clarke, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P.S., "Generalized Predictive Control", Automatica, Vol. 23, (3) parts 1 & 2, 137-160, 1987
- [4] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. Sys, Man and Cyber., 15 (1):116-132, 1985
- [5] Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev, "Generation of Fuzzy Rules by Mountain Clustering", Machine Intelligence Institute Iona College, Tech. Report #MII-1318
- [6] J.J. Espinosa, M.L. Hadjili, V. Wertz, and J. Vandewalle., "Predictive control using fuzzy models-comarative study", In European Control Conf. ECC '99, Karlsruhe, Germany., Sep. 1999
- [7] D. Wang, "An Inexact Approach for Linear Programming Problems with Fuzzy Objective and Resources.", Fuzzy sets and systems, 89:61-68, 1997