

## 페루프 응답에 의한 공정의 수학적 모델링

최정내, 류영국, 조준호, 황형수  
원광대학교 제어계측과

### System modeling from close-loop response

Jeoung-Nae Choi, Young-Guk Ryu, Joon-Ho Cho, Hyung-Soo Hwang  
wonkwang univ. Engineering of control & instrumentalon

**Abstract** - In this paper, a new method for system identification is proposed. Unknown dynamic system is identified to the second order transfer function, which can be applied to PID controller design. First, overshoot( $\sigma_s$ ), settling time( $t_s$ ), and steady state value( $y_{ss}$ ) are obtained from the step response of unknown dynamic system. And then, we can get the second order transfer function using equations which are extracted from those three parameters( $\sigma_s, t_s, y_{ss}$ ) through mathematical analysis. In addition, simulation is carried out to show excellent performance of proposed identification method compare with other.

#### 1. 서론

미지의 공정을 제어하기 위한 연구들이 많이 진행되고 있다. 우선 공정을 제어하기 위해서는 공정 동특성을 알아야 한다. 공정 출력 데이터로부터 공정을 모델링하는 방법으로 퍼지, 뉴로-퍼지, 뉴럴네트워크 같은 비선형 이론들이 많이 제시되었지만, 이런 방법은 비선형 모델을 구축하게 되고, 현재 가장 많이 사용되고 있는 PID 제어기를 사용할 수 없다. 전달함수를 구하지 않고 PID 제어기를 설계하는 방법으로는 릴레이 동조 실험이 가장 많이 사용된다. 릴레이 동조 실험을 통하여 임계이득과 임계주기를 구하고, 이 두 개의 값으로부터 PID 제어기의 파라메터를 구하는 방법으로는 Ziegler-Nichols 방법이 가장 많이 사용된다. 그렇지 만 이 방법은 시지연을 가지거나 비선형성이 큰 경우에는 좋은 성능을 얻을 수 없다. 다른 방법으로는 Cohen-coon, ITAE, IMC등의 방법들이 있지만 이러한 방법은 공정의 정확한 전달함수를 알아야 하고, 특정 공정에 대하여서 적용 가능하다. 이러한 방법들을 적용하기 위해서는 공정의 정확한 전달함수를 모델링 할 필요성이 있다.

Wang은 릴레이 동조 실험으로부터 공정의 주파수 응답을 구하고, Nyquist 응답으로부터 시지연을 가지는 2차 공정 형태의 전달함수를 구하는 방법이 제시되었으나, 이 방법은 위상이  $-\pi, -\pi/2$  지점을 통과하는 경우에만 적용 가능하다는 문제점이 있고, 이를 개선하기 위한 방법이 연구되고 있다[3]. 또한 시간영역에서는 스텝응답으로부터 제동비와 오버슈트를 이용하여 공정 전달함수를 구하는 방법이 제시되었지만, 많은 오차를 가지고 있다.

본 논문에서는 미지의 공정에 대한 페루프 스텝 응답으로부터 오버슈트, 정정시간, 정상상태오차를 구하고, 이 세 개의 값으로부터 2차 공정의 전달함수를 수학적으로 얻는 방법을 제시하고, 우수한 응답특성을 가짐을 시뮬레이션을 통하여 보였다.

#### 2. 주파수 응답으로부터 모델링

미지의 공정에 대한 주파수 응답  $G(j\omega)$ 로부터 식 (1)

과 같은 2차 시연모델로 모델링 할 수 있다. 이 방법은 고차계 시스템을 2차 저연모델로의 축소과정에 사용되는 방법이다.

$$G(s) = \frac{e^{-sL}}{as^2 + bs + c} \quad (1)$$

여기서  $a, b, c, L$ 은 결정해야 할 미지수이며  $a, b, c, L$ 의 값에 따라 식 (1)의 모델은 실근 또는 허근을 가지므로 진동하는 공정의 동특성을 표현할 수 있다.

4개의 미지수를 결정하기 위해서는 4개의 식이 필요하다.  $\angle G(j\omega_c) = -\pi, \angle G(j\omega_b) = -\frac{\pi}{2}$ 인 주파수  $\omega_c$  와  $\omega_b$ 에서 원래 공정과 동조 모델의 주파수 응답이 일치하도록 함으로써 미지수를 결정할 수 있다. 즉,

$G(j\omega_c) = \hat{G}(j\omega_c), G(j\omega_b) = \hat{G}(j\omega_b)$ 인 조건으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$c - a\omega_c^2 + jb\omega_c = \frac{\cos(\omega_c L) - j\sin(\omega_c L)}{-|G(j\omega_c)|} \quad (2)$$

$$c - a\omega_b^2 + jb\omega_b = \frac{\cos(\omega_b L) - j\sin(\omega_b L)}{-j|G(j\omega_b)|} \quad (3)$$

위 식들을 풀면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_c L)} = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} : \theta \quad (4)$$

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (5)$$

$$b = \frac{\sin(\omega_c L)}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \quad (6)$$

$$c = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\omega_c^2 \sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\omega_b^2 \cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (7)$$

식(4)는 비선형 방정식으로 직접적으로 해를 얻기 어렵다. 그렇지만 초기치를 잘 설정하면 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 해를 구할 수 있다. 초기치를 설정하기 위해 사인함수와 코사인 함수를 아래와 같이 근사화 한다.

$$\sin(x) = px^2 + qx, \quad \cos(x) = px^2 + rx + 1$$

여기서,  $p = (8/\pi^2)(1-\sqrt{2}), q = (2/\pi)(2\sqrt{2}-1), r = (2/\pi)(2\sqrt{2}-3)$ 이다.

식(5)에 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$p(\omega_c^2 - \theta\omega_b^2)L^2 + (q\omega_c - \theta r\omega_b)L - \theta = 0 \quad (8)$$

여기서  $\theta = (\omega_b |G(j\omega_b)| / \omega_c |G(j\omega_c)|)$ 이다.

식(9)의 근 중에서 절대값이 작은 근을 초기치로 설정하고 Newton-Raphson 방법을 적용한다.

$$L_2 = L_1 - \frac{f(L_1)}{f'(L_1)} \quad (9)$$

$$\text{여기서, } f(L) = \frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} - \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$$

$$f'(L) = \frac{\omega_b \sin(\omega_b L) \sin(\omega_c L) + \omega_c \cos(\omega_b L) \cos(\omega_c L)}{\cos^2(\omega_b L)}$$

그렇지만, Wang 이 제시한 주파수 응답으로부터의 공정 전달함수를 구하는 방법은, 공정 모델에 영점이 존재할 경우와 Nyquist 선도가  $-\pi/2$ 와  $-\pi$ 를 지나지 않는 경우는 적용할 수 없다는 문제점을 가지고 있다. 본 논문은 이러한 경우에도 적용할 수 있는 방법을 제안한다.

### 3. 시간응답으로부터 모델링

본 논문에서는 미지의 공정을 식 (10)과 같은 형태의 2차 모델이라 가정하고 폐루프 응답으로부터 전달함수의 공정파라미터를 구하는 방법을 제시하였다.

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} \quad (10)$$

식 (10)의 단위 스텝입력에 대한 폐루프응답은

$$Y(s) = \frac{c}{s(s^2 + as + b + c)} \quad (11)$$

정상 상태값은 식 (12)와 같다.

$$y(\infty) = y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{c}{b+c} \quad (12)$$

식 (11)의 역라플라스 변환을 하여 시간응답을 구하면

$$y(t) = \frac{c}{b+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + 4b - 4c}} \left| e^{-\frac{1}{2}at + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b - 4c}t} - e^{-\frac{1}{2}at - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b - 4c}t} \right|$$

여기서,  $a^2 < 4b + 4c$ 인 경우에는 대하여

$$y(t) = \frac{c}{b+c} - \frac{2e^{-\frac{1}{2}at}}{\sqrt{(4b+4c-a^2)(b+c)}} \cos\left(\frac{\sqrt{4b+4c-a^2}}{2}t - \theta\right)$$

$$\text{여기서, } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{4b+4c-a^2}}\right) \text{ or } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{4b+4c-a^2}}{\sqrt{4b+4c}}\right)$$

수식을 간단하게 하기 위해

$$\alpha = \frac{\sqrt{4b+4c-a^2}}{2}, \quad \beta = \sqrt{b+c} \text{라 하면}$$

$$y(t) = c\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}at}}{\alpha\beta} \cos(\alpha t - \theta)\right)$$

최대 오버슈트를 구하기 위해 미분을 하면

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\frac{a^2}{4} + a^2}{\alpha\beta} e^{-\frac{1}{2}at} \cos\left(\alpha t - \frac{\pi}{2}\right)$$

즉,  $t = \frac{\pi}{\alpha}$ 에서 최대오버슈트를 가진다.

최대오버슈트  $o_s$ 는

$$o_s = c\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{e^{-\frac{a\pi}{2\alpha}}}{\alpha\beta} \cos(\pi - \theta)\right) \\ = \frac{c}{\beta^2}\left(1 + \frac{e^{-\frac{a\pi}{2\alpha}}}{2\alpha}\right)$$

$\alpha$ 에 대하여 다시 표현하면

$$\frac{o_s}{y_{ss}} - 1 = e^{-\sqrt{4b+4c-a^2}t_s}$$

$$a = \frac{\sqrt{(4b+4c)\left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}}{\sqrt{\pi^2 + \left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}}, \quad a \geq 0 \quad (13)$$

정정시간을 구하기 위해 포락선을 구하면 식(14)가 된다.

$$y_e(t) = \frac{c}{b+c} + \frac{2c}{\sqrt{(b+c)(4b+4c-a^2)}} e^{-\frac{1}{2}at} \quad (14)$$

응답이 정상상태응답의 5% 이내로 들어가는 시간을 정정시간  $t_s$ 라 하면 식(12), 식(14)로부터 식(15)를 얻는다.

$$1.05y_{ss} = y_{ss} + \frac{2c}{\sqrt{(b+c)(4b+4c-a^2)}} e^{-\frac{1}{2}at_s} \quad (15)$$

식(13), (15)으로부터 다시 정리하면

$$e^{-at_s} = 0.0025 - \frac{0.0025y_{ss}}{4c} a^2 \\ - \frac{\sqrt{(4b+4c)(\ln(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1))^2}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1))^2}} t_s \\ = 0.0025 - 0.0025 \frac{\left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}{\pi^2 + \left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}$$

$$x_{temp} = \ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right) \text{로 치환하면,}$$

$$e^{-\frac{\sqrt{(4b+4c)x_{temp}^2}}{\sqrt{\pi^2 + x_{temp}^2}} t_s} = 0.0025 \left(1 - \frac{x_{temp}^2}{\pi^2 + x_{temp}^2}\right) \\ - \frac{\sqrt{(4b+4c)x_{temp}^2}}{\sqrt{\pi^2 + x_{temp}^2}} t_s = \ln\left(0.0025 - 0.0025 \frac{x_{temp}}{\pi^2 + x_{temp}}\right)$$

양변을 제곱하면 식16)을 얻을 수 있다.

$$\frac{(4b+4c)x_{temp}^2}{\pi^2 + x_{temp}^2} t_s^2 = \left\{\ln\left(0.0025 - 0.0025 \frac{x_{temp}}{\pi^2 + x_{temp}}\right)\right\}^2$$

$$b+c = \frac{\pi^2 + x_{temp}^2}{4x_{temp}^2 t_s^2} \left\{\ln\left(0.0025 - 0.0025 \frac{x_{temp}}{\pi^2 + x_{temp}}\right)\right\}^2 \quad (16)$$

식 (12),(13),(16) 으로부터 공정파라미터  $a, b, c$ 를 구할 수 있다.

$$c = y_{ss} \frac{\pi^2 + x_{temp}^2}{4x_{temp}^2 t_s^2} \left\{\ln\left(0.0025 - 0.0025 \frac{x_{temp}}{\pi^2 + x_{temp}}\right)\right\}^2 \quad (17)$$

$$b = \frac{1 - y_{ss}}{y_{ss}} c \quad (18)$$

$$a = \frac{\sqrt{(4b+4c)\left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}}{\sqrt{\pi^2 + \left\{\ln\left(\frac{o_s}{y_{ss}} - 1\right)\right\}^2}}, \quad a \geq 0 \quad (19)$$

공정의 폐루프 응답으로부터 정상상태값  $y_{ss}$  정정시간  $t_s$  최대오버슈트  $o_s$ 를 구하고, 식 (17), (18), (19)를 이용하여 2차 시스템으로 모델링 할 수 있다.

### 4. 시뮬레이션

본 논문에서 제안한 방법을 검토하기 위하여 3가지의 공정에 대하여 주파수 응답으로부터 2차시지연모델을 구하는 Wang's 방법, 본 논문에서 제안한 방법과 실제 공정의 응답을 시뮬레이션을 통하여 비교를 하였다.

$$\text{공정 1. } \frac{e^{-0.5s}}{s+1}$$

시지연을 가지는 1차 공정 1에 대한 주파수 응답과 폐루프응답을 그림1 (a), (b)에 각각 보인다. 그림1 (a)에서,  $w_b = 1.3068$   $w_c=3.6733$  와, (b)에서  $o_s = 0.5455$   $y_{ss} = 0.5$   $t_s=2.2$ 를 얻는다. 이 값들로부터 wang's 방법을 사용하여 2차 시지연 모델 식 (20)을 얻는고, 본 논문에서 제시한 방법으로 2차 공정모델 식 (21)을 얻는다. 각각의 모델과 실제 공정의 폐루프응답을 그림 1. (c)에 보인다.

$$2차 시지연 모델 : \frac{e^{-0.495s}}{0.005s^2 + 1.005s + 1.000} \quad (20)$$

$$2차 모델 : \frac{2.9193}{s^2 + 2.932s + 2.9193} \quad (21)$$

그림 1. (c)에서 보면, 제안한 방법은 실제 공정에 대해 지연시간은 약간의 오차를 가지고 있지만, 오버슈트 및 상승시간은 정확히 일치함을 알 수 있다.

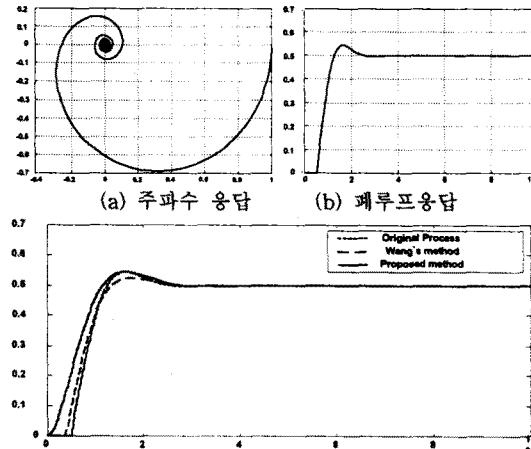


그림 1. 공정 1

$$\text{공정 2. } \frac{0.9}{0.00105s^3 + 0.2104s^2 + 0.8913s}$$

공정 2에 대한 주파수 응답과 폐루프응답을 각각 그림 2 (a), (b)에 보인다. 그림 2 (a)에서 위상이  $-\pi$ 인 지점을 통과하지 않기 때문에 Wang's 방법을 적용할 수 없다. 그림 2. (b)로부터  $\omega_s=1.001$ ,  $y_s=1$ ,  $t_s=2.38$ 을 얻고 제시한 방법을 사용하여 식(22)의 2차 모델을 얻는다.

$$2차 모델 : \frac{3.2035}{s^2 + 3.2585s + 6.4493 \times 10^{-7}} \quad (22)$$

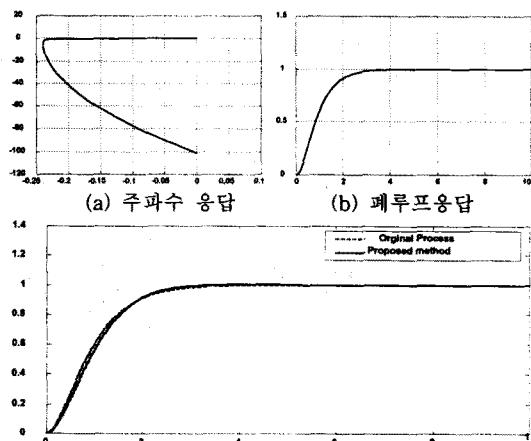


그림 2. 공정 2

그림 2. (c)에 실제 공정과, 동조된 모델의 폐루프응답을 보였다.

$$\text{공정 3. } \frac{4}{s^2 + 4s + 4}$$

실제 공정이 2차 일 경우에 주파수 응답과, 폐루프응답

을 그림 3. (a), (b)에 각각 보인다. 그림 3. (a)을 보면, 위상이  $-\pi$ 인 지점을 통과하지 않기 때문에 wang's의 방법은 적용할 수 없다. 그림 3. (b)로부터  $\omega_s=5.216$ ,  $y_s=0.5$ ,  $t_s=1.67$ 을 얻고, 결과적으로 식 (23)의 2차 모델을 얻을 수 있다.

$$2차 모델 : \frac{4.0055}{s^2 + 4.0028s + 4.0055} \quad (23)$$

식 (23)과 실제공정을 비교하면 공정파라메터가 거의 일치함을 알 수 있고, 그림 3. (b)에 실제공정과 동조모델에 대한 폐루프 응답을 보였다.

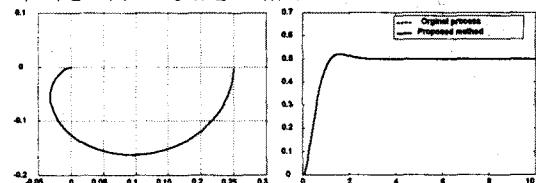


그림 3. 공정 3.

## 5. 결론

본 논문에는 미지의 공정에 대한 동특성을 폐루프응답으로부터 2차 공정으로 모델링 하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 주파수 영역에서 모델링 하는 Wang's의 방법은 위상이  $-\pi$ ,  $-\pi/2$ 인 지점을 지나야만 적용 가능하나는 제약을 보안했고, 또한 모든 공정응답으로부터 2차 공정으로 모델링 하기 때문에, 고차계 시스템의 모델축소 과정에도 적용할 수 있다. 2차 공정에 대하여는 정확한 공정파라메터를 찾을 수 있지만, 이 공정이 고차계 이거나, 시지연을 가지는 경우에는 약간의 오차가 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Qing-Guo Wang, Chang-Chiang Hwang and Qiang Bi, "A Technique for Frequency Response Identification from Relay Feedback", IEEE Trans. on control systems, vol. 7, NO.1, pp 122-128, 1999
- (2) Anthony S. McCormack and Keith R. Godfrey, "Rule-Based Autotuning Based on Frequency Domain Identification", IEEE Trans. on control systems, vol 6, No.1, pp 43-54, 1998
- (3) Qing-Guo, Tong-Heng Lee, Ho-Wang Fung, Qiang Bi, Yu Zhang, "PID Tuning for Improved Performance", IEEE Trans. on control, vol.7, NO.4, 1999.
- (4) Benjamin C. Kuo, "자동제어", 청문각, 1995
- (5) Akaike,H., "A new look at the statistical model identification", IEEE Trans. Auto. Control, AC-19 pp716-723, 1974
- (6) Ljung, L., "System Identification -Theory for the User", Prentice Hall, englewood cliffs, NJ, 1987
- (7) Sjoberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., and Juditsky, A., "Nonlinear black-box modeling in system identification" A unified overview", Automatica, 31, 1995
- (8) Solbrand, G., Ahlen, A., and Ljung, L., "Recursive methods for off-line identification", Int. J. control, 41(1), 177-191, 1985