

## 접근 탄도 미사일 추적 시스템에 사용하는 확장강인칼만필터 설계

신종구\*, 이현석\*, 진승희\*, 윤태성\*\*, 박진배\*

\* 연세대학교 전기 및 전자공학과 (Tel : 82-2-361-2773; Fax : 82-2-362-4539)

\*\* 창원대학교 전기공학과 (Tel : 82-55-279-7513; Fax : 82-55-263-9956)

## Design of Incoming Ballistic Missile Tracking Systems Using Extended Robust Kalman Filter

Shin, Jong Gu\*, Lee Hyun Seok\*, Jin seung Hee\*, Yoon Tae Sung\*\*, Park Jin Bae\*

\*Dept. of Electrical & Electronic Engineering, Yonsei Univ.

\*\*Dept. of Electrical Engineering, Changwon National Univ.

**Abstract** - The most important problem in target tracking can be said to be modeling the tracking system correctly. Although the simple linear dynamic equation for this model has used until now, the satisfactory performance could not be obtained owing to uncertainties of the real systems in the case of designing the filters based on the dynamic equations. In this paper, we propose the extended robust Kalman filter(ERKF) which can be applied to the real target tracking system with the parameter uncertainties. To solve the robust nonlinear filtering problem, we derive the extended robust Kalman filter equation using the Krein space approach and sum quadratic constraint. We show the proposed filter has better performance than the existing extended Kalman filter(EKF) via 3-dimensional target example.

### 1. 서 론

표적 추적 문제에 있어 가장 중요한 문제 중 하나는 대상 시스템에 대한 정확한 모델링이다. 기존에는 간단한 선형 운동방정식으로 대상 시스템을 모델링하고 필터를 설계해 왔으나 실제 시스템에 포함된 여러 가지 불확실성들로 인하여 만족할 만한 성능을 얻을 수 없었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 이러한 파라미터 불확실성이 존재하는 실제 시스템에 적용할 수 있는 확장 강인 칼만 필터(ERKF)를 제안한다. 불확실성을 포함하는 비선형 시스템 모델의 수학적 표현을 위해 최근에 많이 사용되는 SQC를 사용하였다.

불확실 선형시스템에 대해서는 비교적 만족할 만한 성능을 가지는 강인 필터링 문제가 연구되고 있다. 이들 중 확장 강인 칼만 필터의 설계 및 그 성능에 대한 일부 결과들이 이미 입증된 바 있다 [1]-[2]. 하지만, 기존의 결과들은 실제 표적 시스템은 레이더 중심의 극 좌표계로부터 측정치들을 얻게 되므로 이를 표적 운동의 표현이 용이한 직각 좌표계로 표현하면 표적 추적 시스템은 비선형 방정식으로 표현될 수밖에 없다. 게다가 이산 시간에서 구해진 모델링 오차와 측정 잡음이 존재하는 경우에 필터 성능은 선택되어진 표적 모델 파라미터의 불확실성에 크게 의존한다고 알려져 있다 [3]. 따라서 실제 표적 추적 시스템의 특성을 보다 정확하게 반영하기 위해서는 비선형 강인 필터링 기법에 대한 연구가 필수적이다. 본 논문에서는 불확실한 파라미터를 포함한 비선형 시스템에 대한 표적 추적 시스템 구현을 위해 확장 강인 칼만 필터(ERKF)를 이용한 표적 추적 시스템을 제안한다. 확장 강인 칼만 필터를 설계하기 위해 주어진 비선형 시스템을 SQC로 표현하고, SQC로부터

Krein 공간 확장 칼만 필터(EKF)와의 대응관계를 이용하여 EKF와 유사한 구조를 갖는 확장 강인 칼만 필터식을 유도할 수 있다 [4].

동속운동을 하는 3차원 모델에 대한 확장 칼만 필터와 확장 강인 필터를 적용하고, 그 결과 비교를 통해 제안된 확장 강인 필터가 실제 시스템에서 기존 확장 칼만 필터보다 더욱 안정적이고 강인한 성능을 가진다는 것을 입증한다.

### 2. 본 론

#### 2.1 접근 탄도 미사일 시스템

##### 2.2.1 좌표계[5]

그림 1은 지구 중심 축  $X_t$ ,  $Y_t$  및  $Z_t$ 로 표현되는 지구 중심 좌표계를 나타낸다. 그림 2는 두 개의 레이더 중심 좌표계를 나타낸다. 이 좌표계에서  $z$ 는 레이더 위치에서 지구 평면에 대해 수직이고  $x$ ,  $y$ 는 그 위치에서 각각 동쪽과 북쪽을 가리키는 수평축이다. 그림 2의 두 번째 좌표계는  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ 를 축으로 한다. 이 좌표계는  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  좌표계를 고각  $\epsilon$ , 방위  $\lambda$ 만큼 회전시킴으로써 구해진다. 이 좌표계에서  $Z'$ 는 레이더 면에 대해 수직이고,  $Y'$ 는 레이더의 표면상에 놓이며  $X'$ 는 레이더 표면과  $X$ 와  $Y$ 가 이루는 평면과의 교차선 위에 놓여진다.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  좌표계를  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  좌표계로 좌표변환 할 수 있다. 본 논문에서의 모델은 좌표 변환된 각 데이터를 가지고 추정치를 계산하는 것이다.

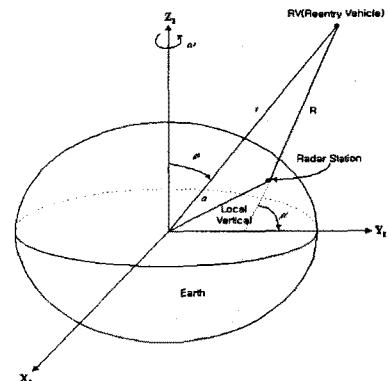


그림 1. 레이더-RV 기하학적 개요

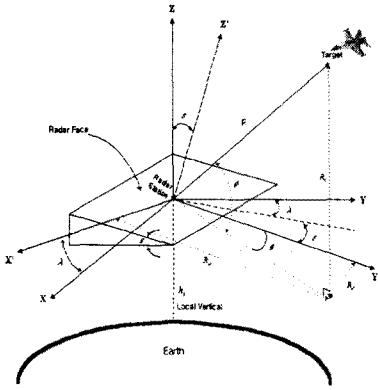


그림 2 레이더 중심 좌표계

### 2.2.2 접근 탄도 미사일 추적 시스템 방정식

본 논문에서 설계한 모델의 상태변수에는 직각 좌표계의 각 축에 대한 위치 및 속도뿐만 아니라 파라미터 불확실성도 포함된다. 이때 파라미터 불확실성은 다음과 같이 표현된다[3].

$$\frac{d}{dt}(\rho / \beta) = -K(\rho / \beta)z$$

위의 식에서  $\rho$ 는 대기밀도에 의한 고도 변화율이고  $\beta$ 는 음속 단위의 불확실한 고도에 관한 함수이다. 파라미터  $K$ 는 임의의 고도 범위에서 분류된 상수이고  $z$ 는  $z$ 축 방향의 위치 변화율이다. 위의 식으로 표현되는 파라미터를 위치 및 속도와 더불어 시스템 상태변수에 포함시키면 아래와 같은 표적 운동 방정식을 얻는다[3].

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + E\Delta k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_1 x_6 x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - position \\ y - position \\ z - position \\ x - velocity \\ y - velocity \\ z - velocity \\ \frac{\rho}{\beta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$|A| \leq 1$

식 (1)을 아래와 같이 이산화하고 테일러 시리즈에 의해 선형화하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= (I + \Delta F_i^*) \mathbf{x}_i + E_i \Delta_i \Delta_i K_i^* \mathbf{x}_i + G_i \mathbf{u}_i \\ &= F_i \mathbf{x}_i + E_i \Delta_i K_i \mathbf{x}_i + G_i \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

$$F_i^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{76} & A_{77} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_i}$$

여기서

$$A_{44} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_4^2}{X}, \quad A_{45} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_4 x_5}{X}, \quad A_{46} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_4 x_6}{X}$$

$$A_{47} = -\frac{1}{2} g x_4 X, \quad A_{54} = A_{45}, \quad A_{55} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_5^2}{X}$$

$$A_{56} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_5 x_6}{X}, \quad A_{57} = -\frac{1}{2} g x_5 X, \quad A_{64} = A_{46}, \quad A_{65} = A_{56}$$

$$A_{66} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_6^2}{X}, \quad A_{67} = -\frac{1}{2} g x_6 X, \quad A_{76} = -K x_7, \quad A_{77} = -K x_6$$

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k, \quad K'_i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K_1 x_6 \ K_1 x_7]_{x=\hat{x}}$$

$$X = \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}, \quad E_{1i} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^*$$

그리고  $|\Delta_i| \leq 1$  이다.

또한 레이더의 측정치는 표적의 거리, 방위 및 고각이므로 측정 방정식은 다음 비선형 방정식으로 표현된다 [6].

$$y_i = h(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i = \begin{bmatrix} R \\ u \\ v \end{bmatrix} + \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_u \\ \varepsilon_v \end{bmatrix}$$

위의 비선형 측정 방정식에서  $h_i(\mathbf{x}_i)$ 를  $H_i \mathbf{x}_i$ 로 선형화 할 수 있으면 여기서  $H_i$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{x}{R} & \frac{y}{R} & \frac{z}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} & -\frac{xy}{R^3} & -\frac{xz}{R^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{xy}{R^3} & \frac{1}{R} - \frac{y^2}{R^3} & -\frac{yz}{R^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Krein 공간 확장 강인 칼만 필터

다음과 같은 Krein 공간에서의 이산 시간 비선형 시스템 방정식이 주어져 있다고 하자.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = f_i(\mathbf{x}_i) + \tilde{g}_i(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{y}_i = h_i(\mathbf{x}_i) + \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \mathbf{s}_i = k_i(\mathbf{x}_i) \end{cases} \quad (1)$$

비선형 함수  $f_i(x_i), g_i(x_i), h_i(x_i)$  및  $k_i(x_i)$ 는 미분 가능하고 불확실한 입력  $\tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i$ 는 영평균 가우시안 잡음이다. 또한 불확실성을 포함하는 비선형 시스템 (1)은 아래의 SQC(Sum Quadratic Constraints)를 만족한다고 가정하자[7].

$$(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^* \Pi_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) + \sum_{j=0}^i \tilde{\mathbf{u}}_j^* \tilde{Q}_j^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_j + \sum_{j=0}^i \tilde{\mathbf{v}}_j^* \tilde{R}_j^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_j \leq \varepsilon + \sum_{j=0}^i \|\mathbf{s}_j\|^2 \quad (2)$$

식 (2)의 에너지 형태의 제한 조건은 다음과 같은 파라미터 불확실성을 포함하는 비선형 시스템에도 적용될 수 있다[4].

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = f_j(\mathbf{x}_i) + E_i \Delta_i k_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i = h_i(\mathbf{x}_i) + E_i \Delta_i k_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i \end{cases}$$

여기서,  $\xi_i = \Delta_i k_i(\mathbf{x}_i)$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_i = [\mathbf{u}_i \ \xi_i]^*$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + E_{2i} \zeta_i$ .

$\tilde{g}_i(\mathbf{x}_i) = [g_i^*(\mathbf{x}_i) \ E_i]$ 이고  $\sum_{j=0}^i \|\xi_j\|^2 \leq \sum_{j=0}^i \|s_j\|^2$ 라고 하면 식 (2)를 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^* \Pi_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) + \sum_{j=0}^i \tilde{\mathbf{u}}_j^* \tilde{Q}_j^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_j$$

$$+ \sum_{j=0}^i \left( \begin{bmatrix} y_j - \mathbf{q}_j \\ 0 - \mathbf{r}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \end{bmatrix} \mathbf{x}_j \right)^* \begin{bmatrix} \tilde{R}_j & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} y_j - \mathbf{q}_j \\ 0 - \mathbf{r}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \end{bmatrix} \mathbf{x}_j \right) \leq \varepsilon \quad (3)$$

그러므로 확장 강인 칼만 필터 문제는 (4)와 같은 식을

$$\min_y J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}, y) \leq \varepsilon \quad (4)$$

만족하는 해를 찾는 문제라고 할 수 있다[4].

지금까지 구한 식을 정리하여 다음과 같은 선형방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{j+1} = F_j \mathbf{x}_j + \tilde{G}_j \tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{p}_j \\ \mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \end{bmatrix} \mathbf{x}_j + \tilde{\mathbf{v}}_j + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{r}_j \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_j = K_j \mathbf{x}_j + \mathbf{r}_j \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i \delta_{\mathbf{u}_i} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \delta_{\mathbf{v}_i} \end{bmatrix}$$

기존의 확장 칼만 필터 식과 확장 장인 필터 식의 대응 관계로부터 아래와 같은 결과를 유도할 수 있다.

$$Q_i = \tilde{Q}_i, R_i = \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix}$$

이를 이용해 확장 장인 필터 식을 유도할 수 있다[4].

$$\hat{x}_{ij} = \hat{x}_{ij-1} + P_{ij} K_i^* k_i (\hat{x}_{ij-1}) + P_{ij} H_i^* \tilde{R}_i^{-1} (y_j - h_i(\hat{x}_{ij-1}))$$

$$P_{i+1|i+1}^{-1} = P_{i|i}^{-1} + H_{i+1}^* \tilde{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} - K_{i+1}^* K_{i+1}$$

$$P_{i+1|i} = F_i P_{i|i} F_i^* + \tilde{G}_i \tilde{Q}_i \tilde{G}_i^*$$

또한  $P_0 > 0, \tilde{Q} > 0$ 이고  $R$ 의 역행렬이 존재하며  $[F, \tilde{G}]$ 가 모든  $i$ 에 대해 풀 랭크일 때 아래 부등식이 만족된다면 Krein 공간에서 유도한 확장 장인 칼만 필터식 (4)를 만족한다[7].

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij-1}^{-1} + H_i^* \tilde{R}_i^{-1} H_i - K_i^* K_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

### 2.3 모의 실험 결과

모의 실험을 위한 초기치는 다음과 같다.

$$x_0 = [4.6 \times 10^5 \quad 4.2 \times 10^5 \quad 3.1 \times 10^5 \quad -1.7 \times 10^4 \quad -1.6 \times 10^4 \quad -8.7 \times 10^3 \quad 5 \times 10^{-10}]^T$$

$$P_0 = 5 \times \text{diag}\{P_0^{11}, P_0^{22}, P_0^{33}, P_0^{44}, P_0^{55}, P_0^{66}, P_0^{77}\}$$

이때  $E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T] = [P_0]_{ij}, i, j = 1, \dots, 7$

$$Q_i = \frac{1}{i+1} \text{diag}\{0, 0, 0, 100, 100, 100, 2 \times 10^{-18}\}$$

$$R_i = \text{diag}\{4.572^2, 0.05 \times (\pi/180)^2, r, 0.05 \times (\pi/180)^2\}$$

이때  $r$ 은  $0 < r < 1$ 인 랜덤 변수

$$K = 2.9 \times 10^{-5}, K_\Delta = 6 \times 10^{-6}, \Delta t = 0.5$$

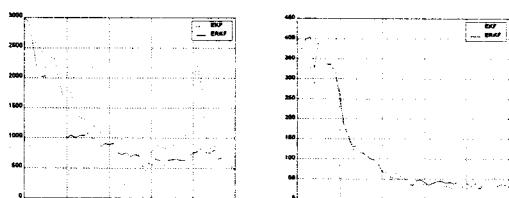


그림 1. y축 평균 오차

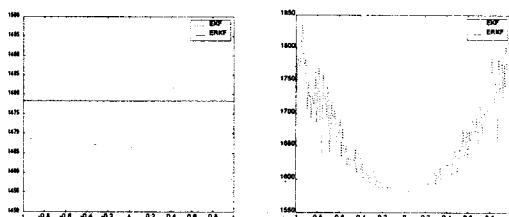


그림 2. x축 위치 오차

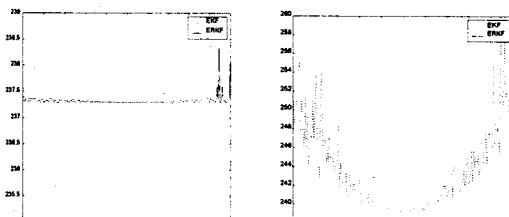


그림 3. x축 속력 오차

그림 1은 접근 탄도 미사일을 추적하면서 시스템의 평균 오차가 시간에 지남에 따라 줄어드는 것을 볼 수 있

을 것이다. 논문에서 제시한 확장 장인 칼만 필터가 기존의 EKF보다 보다 안정적으로 추적을 하고 있고 오차 또한 시간이 지남에 따라 0에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그리고 그림 2는  $\Delta t$ 가 -1에서 1까지 변화할 때 확장 장인 칼만 필터와 장인 확장 필터의 x축의 위치 및 속도를 계산하여 각각의 평균 자승 제곱근(RMS) 오차에 대한 몬테카를로 모의 실험을 100번 수행한 수치 결과이다. 이 결과에서 확장 칼만 필터의 오차는 불확실성이 존재함에 따라 심하게 진동하여 포물선의 형태가 되는 반면 논문에서 제시한 확장 장인 칼만 필터는 불확실성의 변화에 대해 거의 일정한 값을 갖는다는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과는 주어진 시스템의 특성에 따라 그 정도가 달라질 수 있으나 그와 더불어 기존의 확장 장인 칼만 필터가 비선형 방정식의 선형화 과정에서 필연적으로 발생하는 선형화 오차에 민감한 반면 제안된 확장 장인 칼만 필터에서는 선형화 오차가 일종의 불확실성으로 간주되기 때문인 것으로 추측할 수 있고 시스템에 영향을 미칠 수 있는 여러 상황에서도 장인한 성능을 보장할 수 있을 것으로 예상된다.

### 3. 결 론

본 논문에서는 불확실성이 존재하는 실제 시스템에 대해 지금까지의 간단한 선형 표적 추적 시스템과는 달리 실제 시스템에 존재하는 불확실성을 고려한 표적 추적 시스템을 설계하였다. 측정 방정식도 실제 레이더가 제공하는 위치, 방위, 고각을 각각 좌표계로 변환하는 비선형 방정식을 사용함으로써 실제 상황에 보다 근접한 모델을 제시하였다. 또한 기존의 확장 칼만 필터의 알고리즘과 동일한 구조를 가지면서 계산량을 크게 줄인 장인 확장 칼만 필터를 Krein 공간에서 유도하였다. 모의 실험 결과 장인 칼만 필터를 이용한 표적 추적 시스템이 불확실성이 존재하는 경우 일반 확장 칼만 필터를 기반으로 하는 표적 추적 시스템보다 추적 성능이 뛰어나며 불확실성에 대해 강하다는 것을 입증하였다. 이는 제안된 표적 추적 시스템이 비선형 방정식의 선형화 오차에 민감하지 않기 때문인 것으로 생각된다. 그러므로 확장 장인 칼만 필터를 이용한 표적 추적 시스템은 대기 밀도와 같은 불확실한 환경에 영향을 많이 받는 실제 상황하에서 매우 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

### (참 고 문 헌)

- (1) M. Fu, C. E. and Z. Q. Lou, "Finite Horizon Robust Filter Design", To appear in IEEE Trans. Signal Processing
- (2) J. C. Geromel, "Optimal Linear Filtering under Parameter uncertainty", IEEE Trans. signal Processing, Vol. 47, No. 1, 1999
- (3) G. M. Siouris, G. Chen and J. Whang, "Tracking and Incoming Ballistic Missile using an Extended Interval Kalman Filter", IEEE Trans. Aero. Electro. Sys., Vol. 33, No. 1, pp. 232-239, 1997
- (4) 나원상, "A Unified Approach to Robust Filtering using the Krein Space Estimation Theory", 연세대 대학원 전기 및 컴퓨터공학과 석사학위 논문, 2000
- (5) R. K. Mehra, "A Comparison of several Nonlinear Filter for Reentry Vehicle Tracking", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, No. 4, pp. 307-319, 1971
- (6) 박성택, "Nonlinear Filtering Techniques for Radar Tracking", 서울대 대학원 전기공학부 박사학위 논문, 1998
- (7) D. P. Bertsekas and I. B. Rhodes, "Recursive State Estimation for a set-Membership Description of Uncertainty", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 16, No. 2, pp. 117-128, 1971