

이산형 상태공간 모델에서의 무진동 최소최대 필터

New Deadbeat Minimax Filters for Discrete State Models without A Priori Initial State Information

한수희, 권옥현

서울대학교 전기공학부(Tel : 82-2-880-7314; Fax : 82-2-871-7010; E-mail : hsh@cisl.snu.ac.kr)

Abstract: 이 논문에서는 이산형 상태공간 모델에서의 새로운 FIR 필터를 제안한다. 선형성, 무진동성, FIR 구조, 초기 조건과의 무관성 등을 디자인 과정에서 고려해서 성능 지표를 최소화 하는 필터를 구한다. 성능지표로는 구간에서 외란 에너지와 현재 추정 오차의 최대 이득으로 생각하며, 이 지표는 일반적인 성능지표와는 다르다. 제안된 필터는 배치 형태로 먼저 구하고, 점화식 형태로 바꿀 수 있음을 보인다. 제안한 필터는 확률론적 시스템의 이동 구간 무편향 FIR 필터(RHUFF)와 유사함을 보인다.

Key Words: 무진동성; 결정론적 시스템; 최소최대 필터

1 서론

최악의 경우를 고려해서 설계된 필터는 여러 가지 제한 조건을 갖게 되는 실제 시스템에서 좋은 성능을 갖는다. 최악의 경우를 고려한 필터는 크게 두 종류로 나뉘어지는데 확률론적 시스템에서는 최소최대 필터, 결정론적 시스템에서는 H_∞ 필터가 있다. 이 논문에서는 무진동성을 갖는 새로운 최대최소 필터를 결정론적 시스템에 대해서 제안한다.

최소최대필터는 계임법칙에 대한 개념을 사용한다. 확률론적 시스템에 대해서 최소최대 필터는 불분명한 잡음 통계에 대한 선형시스템을 중심으로 연구가 진행되어 왔다[1][2][3][4]. 칼만 필터에 대한 정성적인 접근 방식으로 최소최대 필터가 연구되기도 했다[5].

결정론적 시스템에서는 최악의 경우를 고려한 필터에 대해서 광범위하게 연구되고 있다. 이 경우의 필터는 잡음과 추정 오차의 이득을 보장하도록 설계된다. 필터는 양자화 오차, 시간 지연, 모델링 오차 등과 같은 불확실성에 대해서 견실하다. 그러나 이런 종류의 필터는 최적의 해를 찾기가 어렵고, 오차의 상한을 찾는 체계적인 방법이 알려져 있지 않다. 반면에 이 논문에서 제안된 필터는 최적의 해를 구할 수 있으며, 추가적으로 내재된 무진동성을 갖는다.

필터는 무한 임펄스 응답 형태(IIR) 와 유한 임펄스 응답(FIR) 형태로 나뉜다. 이 논문에서는 FIR 필터에 초점을 맞출 것이다. IIR 필터는 각 섹션의 끝에 언급 할 것이다. 따라서 FIR 형태에 따른 표기를 따를 것이다. 초기 조건에 상관없는 선형 FIR 필터는 아래와 같이 표시될 수 있다.

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=0}^{N-1} H_i y_{kN+i} + \sum_{i=0}^{N-1} L_i u_{kN+i} \quad (1)$$

위와 같은 구조의 필터는 상태와 관련된 항을 가지지 않고 필터 이득은 초기 상태와 무관하다. 보통의 칼만 필터는 초기 상태에 의존하게 된다.

FIR 필터는 가장 최근의 출력과 제어 입력을 사용하며, 일시적인 모델링 오차와 수치 해석적인 오차에 대해서 견실하게 작동한다는 것이 알려져 있다. 무진동성은 좋은 성질이므로 이 논문에서 제안한 필터는 초기 상태에 상관없이 이 성질을 갖도록 설계한다. FIR 형태에 따른 강한 무진동 성질은 다음과 같다.

$$\hat{x}_{k|k} = x_k \quad \text{for any } x_{k-N}.$$

선형 무진동 FIR필터 중에서 아래와 같은 비용함수를 최적화 시키는 새로운 최소최대 필터를 설계할 것이다.

$$\min_{H, L, w_i \neq 0} \frac{\{x_k - \hat{x}_{k|k}\}^T \{x_k - \hat{x}_{k|k}\}}{\sum_{i=1}^N w_{k-i}^T w_{k-i}}. \quad (2)$$

이 필터를 무진동 최소최대 필터(DMF)라고 부를 것이다. 위에서 제시한 비용함수는 아래와 같은 H_∞ 문제의 것과 다르다.

$$\inf_{H, L, w_i \neq 0} \sup \frac{\sum_{i=k_0}^k \{x_i - \hat{x}_i\}^T \{x_i - \hat{x}_i\}}{\sum_{i=k_0}^k w_i^T w_i}. \quad (3)$$

(2)에서는 과거의 추정오차를 고려하던 것과는 달리 현재의 추정오차만을 고려한다. 현재의 추정오차만을 고려하므로 비용함수가 더 현실적일 것이다.

H_∞ 문제는 해석적으로 풀기가 어려우므로 상한에 대한 계임이론적인 해를 구한다. 그러나 제안한 DMF는 무진동성을 갖음에도 불구하고 최적의 해를 해석적으로 구할 수 있다. 이 방법은 IIR 경우에 확장될 수 있다.

이 논문의 접근 방식은 기존의 것과는 틀리다. 초기 상태에 상관없는 무진동 조건을 제약조건으로 설계된다. DMF는 최악의 경우에 대한 잡음과 현재의 추정 오차에 대한 이득을 최소화시키도록 설계된다. 따라서 DMF는 무진동 성질을 가지며, 주어진 비용함수에 대해서 최적화 될 수 있다. 제안한 DMF는 먼저 배치 형태로 나타낼 것이며, 점화식 방식으로도 나타낼 것이다. 결정론적 시스템의 DMF는 기존의 RHUFF와 형체가 비슷하다. RHUFF는 확률론적 관점에서 설계되었다. IIR 형태의 DMF는 각각 섹션의 끝 부분에서 정리될 것이다.

이 논문은 다음과 구성되어 있다. 섹션 2에는 DMF를 이산 상태 공간에서 배치 형태로 나타냈으며, 섹션 3에는 점화식 형태로 표현하고, 기존의 RHUFF와 칼만 필터에 대해서 비교를 한다. 마지막으로 결론을 맺는다.

2 무진동 최소최대 필터

아래와 같은 선형 이산 상태공간의 모델을 가정하자.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, \quad (4)$$

$$y_k = Cx_k + Dw_k. \quad (5)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ 는 상태를 나타내며, $u_k \in \mathbb{R}^l$ 와 $y_k \in \mathbb{R}^q$ 는 제어 입력과 출력을 각각 나타낸다. $DG^T = 0$ 와 $DD^T = I$ 는 시스템 잡음과 출력단 잡음을 서로 디커플링 하기 위해서 설정된다.

시스템 (4) 과 (5)는 구간이라고 불리어지는 최근의 시간 $[k-N, k]$ 에 대해 간단한 배치 형태로 나타낼 것이다. 구간 초기 시간 $k-N$ 은 간단히 k_N 이라고 나타낼 것이다. 구간 $[k_N, k]$ 에서 유한 개의 출력은 현재의 상태에 대한 항으로 나타내어진다.

$$Y_{k-1} = \bar{C}_N x_k + \bar{B}_N U_{k-1} + \bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1}, \quad (6)$$

$$Y_{k-1} \triangleq [y_{k_N}^T \ y_{k_N+1}^T \ \cdots \ y_{k-1}^T]^T, \quad (7)$$

$$U_{k-1} \triangleq [u_{k_N}^T \ u_{k_N+1}^T \ \cdots \ u_{k-1}^T]^T, \quad (8)$$

$$W_{k-1} \triangleq [w_{k_N}^T \ w_{k_N+1}^T \ \cdots \ w_{k-1}^T]^T.$$

그리고 $\bar{C}_N, \bar{B}_N, \bar{G}_N$ 은 아래로부터 얻어진다.

$$\bar{C}_i \triangleq \begin{bmatrix} CA^{-i} \\ CA^{-i+1} \\ CA^{-i+2} \\ \vdots \\ CA^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{i-1} \\ C \end{bmatrix} A^{-1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_i &\triangleq -\begin{bmatrix} CA^{-1}B & CA^{-2}B & \cdots & CA^{-i}B \\ 0 & CA^{-1}B & \cdots & CA^{-i+1}B \\ 0 & 0 & \cdots & CA^{-i+2}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CA^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{i-1} & -\bar{C}_{i-1}A^{-1}B \\ 0 & -CA^{-1}B \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_i &\triangleq -\begin{bmatrix} CA^{-1}G & CA^{-2}G & \cdots & CA^{-i}G \\ 0 & CA^{-1}G & \cdots & CA^{-i+1}G \\ 0 & 0 & \cdots & CA^{-i+2}G \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & CA^{-1}G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{i-1} & -\bar{C}_{i-1}A^{-1}G \\ 0 & -CA^{-1}G \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{D}_i \triangleq [\overbrace{D \ D \ \cdots \ D}^i] = [\text{diag}(\bar{D}_{i-1}, D)] \quad (12)$$

$1 \leq i \leq N.$

$\{\bar{G}_i + \bar{D}_i\}^T \{\bar{G}_i + \bar{D}_i\}$ 은 아래와 같이 점화식 형태로 나타내어질 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned} \Xi_i &\triangleq \bar{G}_i \bar{G}_i^T + \bar{D}_i^T \bar{D}_i \\ &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{i-1} \bar{G}_{i-1}^T + \bar{D}_{i-1}^T \bar{D}_{i-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{C}_{i-1} \\ C \end{bmatrix} A^{-1} GG^T A^{-T} \begin{bmatrix} \bar{C}_{i-1} \\ C \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Xi_{i-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{i-1} \\ C \end{bmatrix} A^{-1} GG^T A^{-T} \begin{bmatrix} \bar{C}_{i-1} \\ C \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

(9)-(13)의 오른쪽 항은 다음 섹션에서 사용되어질 것이다. 현재 상태에 대한 배치 형태로의 FIR 필터는 유한 개의 출력 Y_{k-1} (28)과 제어 입력 U_{k-1} (29)의 선형 함수로 구간 $[k_N, k]$ 에서 표현될 것이다.

$$\hat{x}_{k|k} \triangleq H(Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}). \quad (13)$$

H 는 선형 필터의 이득 행렬이다. (13)으로 정의 되는 필터는 구간 초기 시간의 x_{k_N} 경우의 통계적인 정보를 사용하지 않는 FIR 구조이다. 이득 행렬 H 는 잡음이 없을 경우 $\hat{x}_{k|k}$ 이 현재 상태에 대한 무진동 성질을 갖도록 설계될 것이다.

$$\hat{x}_{k|k} = H(Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}) = H\bar{C}_N x_k = x_k.$$

따라서 다음과 같은 H 에 대한 제약 조건이 필요하다.

$$H\bar{C}_N = I, \quad (14)$$

위와 같은 조건을 무진동성 조건이라고 하자.

필터는 (14)와 같은 제약 조건을 만족하고, 잡음과 $\hat{x}_{k|k}$ 의 추정 오차에 대한 최대 이득을 최소화 시키도록 설계될 것이다.

$$H_B = \min_{H_i} \max_{w_i} \frac{[x_k - \hat{x}_{k|k}]^T [x_k - \hat{x}_{k|k}]}{\sum_{i=1}^N w_{k-i}^T w_{k-i}}. \quad (15)$$

편의를 위해서, (13)의 행렬 H 를 다음과 같이 분리한다.

$$H^T = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n]. \quad (16)$$

무진동 제약 조건이 $H\bar{C}_N = \bar{C}_N^T H^T = I$ 을 만족하므로 s 번째 무진동 제약 조건은 다음과 같다.

$$\bar{C}_N^T h_s = e_s, \quad 1 \leq s \leq n \quad (17)$$

e_s 는 s 번째에만 1이 있고 나머지에는 0이 있는 $e_s = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ 형태의 행렬이다. 이 표기를 이용하면 필터 $\hat{x}_{k|k}$ 의 s 번째 원소 $\hat{x}_{k|k}^s$ 는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{k|k}^s = h_s^T (Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}) \quad (18)$$

그리고 상태 x_k 의 s 번째 원소 x_k^s 에 대한 추정오차는 아

래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & [x_k^s - \hat{x}_{k|k}^s]^2 \\
 &= [x_k^s - h_s^T(Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1})]^2 \\
 &= [(x_k^s)^2 - 2x_k^s(\bar{C}_N x_k + \bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1})^T h_s] \\
 &+ \{(\bar{C}_N x_k + \bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1})^T h_s\}^2 \\
 &= [(x_k^s)^2 - 2x_k^s x_k^T e_s - 2x_k^s(\bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1})^T h_s] \\
 &+ \{x_k^T e_s + (\bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1})^T h_s\}^2 \\
 &= [h_s^T(\bar{G}_N W_{k-1} + \bar{D}_N W_{k-1})(\bar{G}_N W_{k-1} \\
 &+ \bar{D}_N W_{k-1})^T h_s] \\
 &\leq [h_s^T(\bar{G}_N + \bar{D}_N)(\bar{G}_N + \bar{D}_N)^T h_s] W_{k-1}^T W_{k-1} \\
 &= h_s^T \Xi_N h_s \sum_{i=1}^N w_{k-i}^T w_{k-i}
 \end{aligned}$$

위의 부등식을 사용하면 비용함수의 상한을 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{[x_k - \hat{x}_{k|k}]^T [x_k - \hat{x}_{k|k}]}{\sum_{i=1}^N w_{k-i}^T w_{k-i}} \leq h_s^T \Xi_N h_s. \quad (19)$$

부등식의 등호를 성립하게 하는 w 는 항상 존재하므로 원래의 최소최대 필터는 아래와 같은 최소화 문제로 바뀌어 진다.

$$\min_{h_s} h_s^T \Xi_N h_s. \quad (20)$$

이득 행렬 H 의 s 번째 행 h_s 와 무진동 성질을 사용해서 아래와 같은 비용함수를 세울 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_s(h_s, \lambda_s) &= E[x_k^s - \hat{x}_{k|k}^s]^2 + \lambda_s^T (\bar{C}_N^T h_s - e_s) \\
 &= h_s^T \Xi_N h_s + \lambda_s^T (\bar{C}_N^T h_s - e_s) \quad (21)
 \end{aligned}$$

λ_s 는 라고랑쥐 승수의 s 번째 벡터를 나타내며, 이 것은 s 번째 무진동 성질 (17)과 관계되어 있다. 따라서 최종적으로 J_s (21)를 h_s 와 λ_s 에 대해서 최소화하면 된다. $J_s(h_s, \lambda_s)$ 를 최소화하기 위해서 두 가지 조건 $\partial J_s(h_s, \lambda_s)/\partial h_s = 0$ 와 $\partial J_s(h_s, \lambda_s)/\partial \lambda_s = 0$ 이 $2h_s = -\Xi_N^{-1} \bar{C}_N \lambda_s$, $\bar{C}_N^T h_s = e_s$ 과 같은 식이 되고, 따라서 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$h_s = \Xi_N^{-1} \bar{C}_N (\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N)^{-1} e_s. \quad (22)$$

행렬 Ξ_N 이 양한정이므로 \bar{C}_N 이 풀 랭크를 가지기만 하면 행렬 $\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N$ 이 역행렬을 가질 수 있다.

이득 행렬 H 는 h_s (22)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H^T &= [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \\
 &= \Xi_N^{-1} \bar{C}_N (\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N)^{-1} [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \\
 &= \Xi_N^{-1} \bar{C}_N (\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N)^{-1} \quad (23)
 \end{aligned}$$

최종적으로 (15)의 H_B 를 구할 수 있다. 따라서 추정자는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\hat{x}_{k|k} = (\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N)^{-1} \bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} (Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}). \quad (24)$$

(15)의 최적 이득 행렬 H_B 는 구간 $[0, N]$ 에서 한 번의 계산을 요구하며 구간에서 시불변이다. FIR 구조 때문에 제안한 필터는 일시적인 모델링 오차와 수치해석적인 오차에 대해서 견실할 것이다.

설계 과정에서 무진동 성질이 고려되었더라도 아래와 같이 잡음이 없는 시스템에서의 무진동 성질을 검토해 볼 수 있다.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (25)$$

$$y_k = Cx_k. \quad (26)$$

DMF는 시스템 (25)와 (26)이 시스템 잡음 w_k (4)와 출력 잡음 v_k (26)을 가진다는 가정하에서 유도되었다. 제안한 필터의 무진동 성질은 아래의 정리에 의해서 보일 수 있다.

Theorem 1. $\{A, C\}$ 가 가관측성이고 $N \geq n$ 을 가정하자. 제안한 DMF로 주어지는 $\hat{x}_{k|k}$ 는 잡음이 없을 경우 오차없이 구간 $[k_N, k]$ 에서 상태를 추정한다.

Proof: 구간 $[k_N, k]$ 에서 잡음이 없을 경우 $Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}$ 은 현재 상태에 의해서 $Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1} = \bar{C}_N x_k$ 와 같이 결정된다. 따라서 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k|k} &= H_B (Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}) \\
 &= (\bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N)^{-1} \bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} \bar{C}_N x_k \\
 &= x_k.
 \end{aligned}$$

위의 무진동성은 유한 시간과 제안한 필터의 빠른 추종 능력을 의미한다. 또한 제안한 필터는 고장진단이나, 위치 추적과 같은 곳에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

k_N 이 k_0 로 바뀌면 제안한 필터는 IIF 형태로 사용될 수 있다.

$$\hat{x}_k = (\bar{C}_{k-k_0}^T \Xi_{k-k_0}^{-1} \bar{C}_{k-k_0})^{-1} \bar{C}_{k-k_0}^T \Xi_{k-k_0}^{-1} (Y_{k-1} - \bar{B}_{k-k_0} U_{k-1}). \quad (27)$$

위식의 Y_{k-1} 과 U_{k-1} 는 아래와 같다.

$$Y_{k-1} \triangleq [y_{k_0}^T \ y_{k_0+1}^T \ \dots \ y_{k-1}^T]^T, \quad (28)$$

$$U_{k-1} \triangleq [u_{k_0}^T \ u_{k_0+1}^T \ \dots \ u_{k-1}^T]^T, \quad (29)$$

그러나 이 경우 시간이 흐를수록 계산 시간이 증가하게 된다. 다음 섹션에서 (27)의 점화식 형태를 소개 할 것이다.

3 점화식 표현과 이동 구간 무편향 FIR 필터와의 유사성

이 섹션에서는 제안한 배치 형태의 DMF를 계산상의 편리를 위해서 점화식 형태로 표현하고, 기존의 이

동구간 무편향 FIR 필터 형태(RHUFF)[6] 와 유사함을 보일 것이다. 첫째로 확률론적 시스템 DMF $\hat{x}_{k|k}$ 를 점화식 형태로 표현할 것이다.

$$\Omega_{i+1} \triangleq \bar{C}_{i+1}^T \Xi_{i+1}^{-1} \bar{C}_{i+1}, \quad (30)$$

위와 같이 정의하면 이산형 리카티 방정식을 아래와 같이 얻을 수 있다[7].

$$\begin{aligned} \Omega_{i+1} &= [I + A^{-T}(\Omega_i + C^T C)A^{-1}GG^T]^{-1} \\ &\quad A^{-T}(\Omega_i + C^T C)A^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

위식에서 $\Omega_0 = 0$ 을 만족한다. (30)를 사용해서, DMF $\hat{x}_{k|k}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega_N \hat{x}_{k|k} = \bar{C}_N^T \Xi_N^{-1} (Y_{k-1} - \bar{B}_N U_{k-1}), \quad (32)$$

위식에서는 보조 변수로 시간 $k_N + i$ 에서의 추정자 $\hat{\eta}_{k_N+i|k}$ 를 사용하고 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{k_N+i|k} &\triangleq \Omega_i \hat{x}_{k_N+i|k} \triangleq \bar{C}_i^T \Xi_i^{-1} (Y_{k_N+i-1} \\ &\quad - \bar{B}_i U_{k_N+i-1}) \end{aligned} \quad (33)$$

위식에서 $\hat{\eta}_{k_N+i|k| \{i=0\}} = \Omega_0 \hat{x}_{k_N|k} = 0$ 를 만족한다.

$$Y_{k_N+i} \triangleq [y_{k_N}^T \ y_{k_N+1}^T \ \cdots \ y_{k_N+i}^T]^T,$$

$$U_{k_N+i} \triangleq [u_{k_N}^T \ u_{k_N+1}^T \ \cdots \ u_{k_N+i}^T]^T.$$

$0 \leq i \leq N-1$ 구간에서 시간 k_N+i+1 에서의 보조 변수 $\hat{\eta}_{k_N+i+1|k}$ 는 정의 (33)으로부터 아래와 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{k_N+i+1|k} &= \bar{C}_{i+1}^T \Xi_{i+1}^{-1} (Y_{k_N+i} - \bar{B}_{i+1} U_{k_N+i}) \\ &= \bar{C}_{i+1}^T \Xi_{i+1}^{-1} \left(\begin{bmatrix} Y_{k_N+i-1} - \bar{B}_i U_{k_N+i-1} \\ y_{k_N+i} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} A^{-1} B u_{k_N+i} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)에서, 행렬 $\bar{C}_{i+1}^T \Xi_{i+1}^{-1}$ 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} &\bar{C}_{i+1}^T \Xi_{i+1}^{-1} \\ &= A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \left(\Delta_i \right. \\ &\quad \left. + \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} A^{-1} G G^T A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \right]^{-1} \right. \\ &= A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \left(\Delta_i^{-1} - \Delta_i^{-1} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right] A^{-1} G \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ I + G^T A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right] A^{-1} G \right\} \right. \\ &\quad \left. G^T A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(I - A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right] A^{-1} G \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ I + G^T A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right] A^{-1} G \right\} G^T \right) \\ &\quad A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \\ &= \left(I - A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ I + G^T A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G \right\} G^T \right) \\ &\quad A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \\ &= [I + A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G G^T]^{-1} A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

Δ_i 는 아래와 같이 정의된다.

$$\Delta_i \triangleq \begin{bmatrix} \Xi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

(35)를 (34)에 대입하면 아래와 같은 식이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{k_N+i+1|k} &= [I + A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G G^T]^{-1} \\ &\quad A^{-T} \left[\begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} \right]^T \Delta_i^{-1} \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} Y_{k_N+i-1} - \bar{B}_i U_{k_N+i-1} \\ y_{k_N+i} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ C \end{bmatrix} A^{-1} B u_{k_N+i} \right) \\ &= [I + A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G G^T]^{-1} A^{-T} \\ &\quad [\bar{C}_i^T \Xi_i^{-1} (Y_{k_N+i-1} - \bar{B}_i U_{k_N+i-1}) + C^T y_{k_N+i} \\ &\quad + (\Omega_i + C^T C) A^{-1} B u_{k_N+i}] \end{aligned} \quad (36)$$

따라서 보존 변수 $\hat{\eta}_{k_N+i|k}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{k_N+i+1|k} &= [I + A^{-T} (\Omega_i + C^T C) A^{-1} G G^T]^{-1} A^{-T} \\ &\quad [\hat{\eta}_{k_N+i|k} + C^T y_{k_N+i} + (\Omega_i + C^T C) A^{-1} B u_{k_N+i}] \end{aligned} \quad (37)$$

$\hat{\eta}_{k_N|k} = \Omega_0 \hat{x}_{k_N|k} = 0$ 을 만족한다. 따라서, (33)과 (37)로부터, 점화식 형태의 DMF $\hat{x}_{k|k}$ 는 아래의 정리로 요약될 수 있다.

Theorem 2. $\{A, C\}$ 가 가관측성이고, $N \geq n$ 을 만족한다고 하면, 점화식 형태 (33), (37)의 DMF $\hat{x}_{k|k}$ 는 구간 $[k_N, k]$ 에서 아래와 같이 주어진다.

$$\hat{x}_{k|k} = \Omega_N^{-1} \hat{\eta}_{k|k} \quad (38)$$

Ω_N 와 $\hat{\eta}_{k|k}$ 는 (33) 와 (37)로 각각 얻어진다.

점화식 형태의 DMF $\hat{x}_{k|k}$ 는 초기 조건을 사용하지 않는 RHUFF [8]가 단위 잡음 공분산을 사용했을 경우와 형태가 같다. 이 것은 [6]에서 다른 방법과는 확연히 다르다. [6]에서 다른 RHUFF는 FIR 구조, 무진동성, 무편향성을 가지고 있음이 증명되었다.

IIR 경우의 제안된 DMF는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_k = \Omega_k^{-1} \hat{\eta}_k \quad (39)$$

for $k \geq n + k_0$, and also are given in the form as

$$\begin{aligned} & \hat{x}_{k+1} \\ &= A\hat{x}_k + Bu_k + A\Omega_k^{-1}C^T(I + C\Omega_k^{-1}C^T)^{-1}(y_k - C\hat{x}_k) \\ & \Omega_{k+1} \\ &= [I + A^{-T}(\Omega_k + C^TC)A^{-1}GG^T]^{-1}A^{-T} \\ & (\Omega_k + C^TC)A^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

(40)가 (39)와 같게 하기 위해서는 초기 조건에서 생기는 특이성 문제가 발생한다. 따라서 (39)는 처음에 필터를 구동 할 때 매우 유용하게 쓰여질 것이다. 결정론적 시스템의 DMF가 확률론적 시스템에서 칼만 필터와 유사하다는 것은 매우 흥미있는 일이다.

4 Conclusions

이 논문에서는 FIR 과 IIR 구조를 갖는 무진동성 최소최대 필터(DMF) 를 결정론적 이산 상태 공간 시스템에 대해서 제안했다. 제안한 필터는 선형이며, 초기 상태의 정보를 필요로 하지 않고, 무진동성과 최적화를 보장한다. 제안한 필터는 시간 불변이며, 무진동 성질을 가지면서도 해석적인 해가 존재한다. 제안한 필터는 배치 형태로 나타나며, 점화식 형태로도 나타낼 수 있다. 결정론적 시스템에서의 DMF는 기존의 확률론적 시스템에서의 RHUFF와 형태가 비슷하다. 더구나 FIR 구조 때문에 DMF는 일시적인 불확정성과 수치해석적인 오차에 견실하다. 결정론적 시스템에서의 DMF는 확률론적 시스템에서의 칼만 필터와 형태가 비슷하다. 비용함수가 H_∞ 문제와 비슷하지만 해는 같지 않다. IIF 구조의 DMF는 각각 세션마다 정리했다. 제안한 필터는 상태 공간으로 표현된 모델에서 매우 유용하게 쓰일 것이다. 또한 제어기와 같이 쓰여져 초기 상태의 정보를 얻을 수 없는 환경에서 많이 사용되어 질 것이다.

References

- [1] Sergio Verdu and H. Vincent Poor, "Minimax Linear Observers and Regulators for Stochastic Systems with Uncertain Second-Order Statistics," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 6, pp. 499–510, 1984.
- [2] Christopher J. Martin and Max Mintz, "Robust Filtering and Prediction for Linear Systems with Uncertain Dynamics: A Game-Theoretical Approach,"

IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-28, no. 9, pp. 888–895, 1983.

- [3] J. C. Darragh and D. P. Looze, "Noncausal Minimax Linear State Estimation for Systems with Uncertain Second-Order Statistics," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 6, pp. 555–557, 1984.
- [4] Vincent Poor and Douglas P. Loose, "Minimax State Estimation for Linear Stochastic Systems with Noise Uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 4, pp. 902–906, 1981.
- [5] Arthur J. Krener, "Kalman-Bucy and Minimax Filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, no. 2, pp. 291–292, 1980.
- [6] Soo Hee Han, Wook Hyun Kwon, and Pyung Soo Kim, "Receding Horizon Unbiased FIR Filters for Continuous-Time State Space Models without A Priori Initial State Information," Submitted to *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2000.
- [7] F. L. Lewis, *Optimal estimation*, John Wiley & Sons, 1986.
- [8] W. H. Kwon, P. S. Kim, and P. Park, "A receding horizon Kalman FIR filter for discrete time-invariant systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 9, pp. 1787–1791, 1999.