韓國海岸·海洋工學論文集(2000)
第11卷, pp. 161-165

# 선형파 이론에 의한 분산계수 유도
# Derivation of the Dispersion Coefficient based on the Linear Wave Theory

조홍연[1]· 정신택[2]
Hong Yeon Cho[1], Shin Taek Jeong[2]

## 1. 연구의 목적 및 필요성

연안해역으로 유입되는 물질의 이동 및 확산에 관한 예측연구는 수치모형개발과 확산(또는 분산)계수 관측에 중점을 두고 수행되어 왔다. 수치모형의 보정 및 검증을 위한 (오염)물질의 유입량 및 농도관측과 더불어 각종 부표(drogue), 형광물질 등을 이용한 분산계수 측정연구가 다방면으로 수행되어 왔다.

그러나, 대부분의 연구는 해역의 (공간평균) 분산계수, 또는 조류(tidal current)가 우세한 해역에서의 (시간평균) 분산계수의 현장관측 및 이론적인 연구에 집중되어 있다(Lewis, 1997; Bowden, 1965). 즉, 조류의 시간규모(time scale)보다 작은 파랑에 의한 영향이 배제되고, 국지적인 계수의 변화가 고려되지 않고 있다. 또한, 파랑이 우세한 해역에서의 물질확산 및 쇄파가 확산에 미치는 영향에 관한 연구(Pearson, et al., 1997) 등이 추진되고 있는 현 실정에서 파랑에 대한 분산계수의 이론적인 연구는 매우 중요한 과제로 사료된다.

본 연구에서는 선형파이론에 근거한 파랑조건에서의 이론적으로 분산계수를 유도· 분석하였다. 유도된 분산계수는 주기평균된 값으로 연직확산계수와 파랑 매개변수(파수, 파장, 파고, 수심)의 함수로 표현할 수 있으며, 연직확산계수가 일정한 경우, 심해조건에서의 확산계수가 천해조건에서의 확산계수보다 크게 나타나고 있다.

## 2. 지배방정식 및 경계조건

분산계수를 이론적으로 유도하기 위해서는 연직방향의 농도편차의 분포를 먼저 유도하여야 한다. 따라서, Fischer et al.(1979)이 농도편차분포에 대하여 제안한 식을 지배방정식(Eq. 1)으로 사용하였으며, 지배방정식의 풀이결과와 분산계수의 관계식을 이용하여 분산계수를 구하게 된다. 유속편차의 연직분포는 선형파이론에 의하여 제시된 값을 사용하였으며, 연직방향유속은 무시하였다.

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + U' \frac{\partial Co}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \tag{1}$$

여기서, C'(x,z,t)=농도의 연직방향(z) 편차, Co(x)=연직방향 평균농도, D=연직방향 확산계수, U'(x,z,t)=흐름방향(x)의 연직속도분포의 편차이다. 연직방향의 유속, 평균유속을 각각 U(x,z,t), Uo(x,t)라 하면, U'=U-Uo이며, 선형파 이론에 의하면 식 (2)로 표현할 수 있다.

[1] 한국해양연구소 연안항만공학연구본부 (Dept. of Coastal & Harbor Engineering, Korea Ocean Research & Development Institute, Ansan PO Box 29, Seoul 425-600, Korea)
[2] 원광대학교 토목환경공학과 (Dept. of Civil & Environmental Engineering, Wonkwang Univ., Iksan, Chonbuk 570-749, Korea)

$$U=\frac{gka}{\sigma}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\sigma t)$$
$$Uo=\frac{gka}{\sigma kh}\frac{\sinh kh}{\cosh kh}\cos(kx-\sigma t) \tag{2}$$
$$U'=\frac{gka}{\sigma}\left\{\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}-\frac{1}{kh}\frac{\sinh kh}{\cosh kh}\right\}\cos(kx-\sigma t)$$

여기서, g=중력가속도, k=파수(wave number), a=파의 진폭(wave amplitude), σ =각진동수(angular frequency)이다.

지배방정식 (1)은 Carslaw & Jaeger(1959)가 제시한 방법(시간함수로 주어진 외력조건을 시간과 무관한 외력조건으로 변환하여 미분방정식의 해를 구하는 방법)으로 변형하면, 해를 구할 수 있다. 변형된 방정식과 경계조건, 초기조건은 식 (3)에 제시되었으며, 변형된 방정식에서 얻어진 해를 적분(Eq. 4)하면 변형전의 방정식에 해당하는 해를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial C^*}{\partial t}-D\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2}=-U'\mid_{t=to}\frac{\partial Co}{\partial x}$$
$$C^*(z,0)=0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial C^*}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial C^*}{\partial z}\Big|_{z=-h}=0$$
$$C'=\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}C^*(z,t-to;to)dto \tag{4}$$

## 3. 해석해의 유도과정

식 (3)에서 C*(z,t) = v(z)+w(z,t)로 표현하고, 변수분리법을 적용하여 w(z,t)에 대한 일반해를 구하고, 경계조건 및 초기조건을 적용하여 계수를 결정하면 C*를 구할 수 있으며, 식 (4)에 제시된 적분식을 이용하여 C'(z,t)를 유도할 수 있으며, 결과식는 다음과 같다(Eq. 5).

$$C'=-\sum_{n=1}^{\infty}E(n)\left(1+\frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\frac{p^2}{\sigma}\cdot\cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\sin(kx-\sigma t+\theta') \tag{5}$$

여기서, E(n), p, θ '는 각각 식 (6), (7), (8)과 같다.

$$E(n)=\frac{2}{h}\frac{gka}{\sigma D}\cos(kx-\sigma to)\frac{\partial Co}{\partial x}\cdot SCC\cdot\frac{\tanh kh}{k^3}$$
$$SCC=\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2\left[\left(1+\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2\right)^{-1}+2\cdot(-1)^n-1\right] \tag{6}$$

$$p^2=D\frac{(n\pi)^2}{h^2} \tag{7}$$

$$\cos\theta'=-\left(1+\frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2},$$
$$\sin\theta'=\frac{p^2}{\sigma}\left(1+\frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \tag{8}$$

식 (5)에 제시된 농도분포의 연직방향편차와 분산계수(C~K)와의 관계식을 이용하여 순간적인 분산계수(instaneous dispersion coefficient)를 구한 후, 파랑 주기에 대하여 시간적분하면 주기평균된 분산계수 KD를 유도할 수 있다(Eq. 9).

$$K_D=\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}U'C'dz\cdot\frac{\partial Co}{\partial x}\right)dt$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{gka}{\sigma}\right)^2\frac{1}{2D}\frac{p^4}{\sigma^2}\frac{(thkh)^2}{k^2(kh)^2}\cdot SCC\cdot\frac{\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1} \tag{9}$$

이론적으로 유도된 분산계수는 식이 급수형태이고, 매우 복잡한 형태를 보이고 있으나, 파랑매개변수 (kh), p2(연직방향 혼합시간, Eq. (7) 참조) 등의 함수로 표현되고 있음을 알 수 있다.

## 4. 분산계수 추정식에 사용된 가정

Fischer et al.(1979)이 제시한 분산계수 추정과정(연직방향 농도편차에 대한 지배방정식 및 농도편차와 분산계수의 관계식) 및 본 연구에서 분산계수를 유도하는 과정에 포함된 기본 가정은 다음과 같다.

(1) 물질의 용출, 소멸, 반응과정은 생략하였다.
(2) 연직방향의 평균과정에서 발생하는 분산계

수이다. 즉, 평면방향의 분산계수이다.

(3) 연직방향의 이송항 및 유속을 무시하였다

(4) 흐름방향의 확산보다 연직방향의 농도변화가 우세하다고 가정하였다.

(5) 시간에 대한 수심평균 농도의 변화를 무시하였으며, 흐름방향의 농도변화는 분산계수 추정 영역에서 일정하다고 가정하였다.

(6) 해역에서의 파랑(파고)변화를 무시하였다.

(7) 계산영역에서 연직방향 확산계수를 일정하다고 가정하였다.

## 5. 파랑조건에 의한 분산계수의 변화

유도된 분산계수는 일반적으로 사용되는 파랑조건 매개변수(kh 값), 즉 천해조건 및 심해조건 중간천이조건에 대하여 값의 변화를 분석하였다. 분산계수를 산정하기 위해서는 연직확산계수(D), 파랑조건, 수심 등의 입력자료가 필요하며, 파랑의 분산관계식(dispersion relation)을 이용하여 파장(파수)을 계산하고, 계산된 값을 식 (8)에 대입하면 된다.

그러나, 본 연구에서는 파랑 매개변수에 대한 분산계수의 전반적인 변화 양상을 파악하기 위하여 우선 혼합시간 매개변수(p2/σ ), (kh) 변화에 따른 무차원 분산계수를 산정하였다. 혼합시간 매개변수는 식 (10)으로 표현할 수 있다.

$$\frac{p^2}{\sigma} = \frac{D\frac{(n\pi)^2}{h^2}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{n^2\pi^2}{2\pi}\cdot\frac{T}{Tc} \qquad (10)$$

$$Tc = \frac{h^2}{D}$$

여기서, Tc= 혼합시간이다.

식 (10)에 제시된 변수를 제외하고 나머지 계수를 고정하면 Fischer et al.(1979)가 선형속도분포에서 제시한 경우와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 즉, Tc>>T인 경우에는 분산계수가 0이되고, T>>Tc인 경우에는 분산계수가 특정한 값으로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

또한, 파랑 매개변수인 (kh)를 변화시켜 가며 분산계수의 변화를 분석한 결과, 심해조건(kh>π )에서의 분산계수에 비하여 천해조건(kh<1/4)으로 이동할수록 분산계수값이 현저하게 작아지는 것으로 파악되었다. 이는, 천해조건으로 이동할수록, 연직방향의 속도편차가 현저하게 작아지는 경향 때문인 것으로 파악되었다.

그러나, 일반적으로 천해역으로 이동할수록 파랑의 비선형성, 저층의 영향, 쇄파 등의 영향으로 분산계수가 증가할 것으로 예상되는 것과는 반대경향을 보이고 있다. 따라서, 이에 대한 적절한 평가를 수행하기 위하여는 보다 합리적인 값을 사용하여 분산계수를 추정할 필요가 있으며, 선형파 이론에 의하여 추정된 분산계수의 보완(예, Stokes Drift 영향을 이론적으로 포함) 및 수정도 필요할 것으로 사료된다.

## 6. 향후 연구방향

이론적인 유도를 위하여 많은 가정이 포함되어 있기 때문에 결과가 비현실적인 경향을 보일 수도 있을 것으로 사료된다. 따라서, 적절한 수치기법을 도입하여 분산계수를 산정할 수 있는 수치모형을 수립하고, 유도된 해석해와의 비교를 통하여 모형을 검증하고, 연안해역에서의 파랑변형모형 및 관측성과에서 제시되는 연직방향 분산계수의 분포, 파고분포 등 파랑조건의 변화를 고려하여 보다 현실적인 경향을 보이고, 정확한 확산계수를 추정하는 방법에 대한 연구가 추진되어야 한다.

## 사사

본 연구성과는 Post-Doc. 연수과정에서 수행된 결과의 일부이며, 재정적인 지원을 해준 과학재단에 사의를 표합니다.

## 참고문헌

Bowden, K.F., 1965. Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.21, pp.83-95.

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959. Conduction of Heat in Solids, Oxford Press

Fischer H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J. and Brooks, N.H., 1979. Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press

Lewis, R., 1997. Dispersion in Estuaries and Coastal Waters, John Wiley & Sons

Pearson, J.M., Guymer, I., Coates, L.E. and West, J.R., 1997. Mixing Processes due to Breaking Wave Activity in the Coastal

Zone, *Coastal Dynamics* '97, pp.197-206.

## 부록 - 분산계수 유도과정

지배방정식 및 관계식

$$\frac{\partial C'}{\partial t}+U'\frac{\partial Cm}{\partial x}=D\frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (A1)$$

$$hK\frac{\partial Cm}{\partial x}=\int_{-h}^{0}U'C'dz \quad (A2)$$

여기서, C'(z,t)=C-Cm(농도편차), U'(z,t)=U-Um (유속편차), C=농도, Cm=평균농도, U=유속, Um=평균유속, h=수심, K=분산계수이다.

식 (A1)을 식 (A3)의 형태로 변형한다.

$$\frac{\partial C'}{\partial t}-D\frac{\partial^2 C'}{\partial z^2}=-U'(z,t)\frac{\partial Cm}{\partial x} \quad (A3)$$

식 (A3)는 식 (A4) 형태의 시간불변방정식과 식 (A5)의 관계식으로 표현할 수 있다(Carslaw & Jaeger, 1959).

$$\frac{\partial C^*}{\partial t}-D\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2}=-U'(z,t_0)\frac{\partial Cm}{\partial x} \quad (A4)$$

$$C'=\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}C^*(z,t-to;to)dto \quad (A5)$$

식 (A4) 방정식의 초기조건, 경계조건은 식 (A6)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &C^*(z,0)=0 \quad : IC \\ &\left.\frac{\partial C^*}{\partial z}\right|_{z=0,-h}=0 : BC \end{aligned} \quad (A6)$$

식 (A5)의 해를 식 (A7) 형태로 가정하면, 식 (A4), (A6)는 식 (A8), (A9) 형태로 변형할 수 있다(Carslaw & Jaeger, 1959).

$$C^*(z,t)=v(z)+w(z,t) \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} &D\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}=U'(z,t_0)\frac{\partial Cm}{\partial x} \\ &\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}-D\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}=0 \end{aligned} \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} &v(z)=-w(z,0) \quad : IC \\ &\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0,-h}=0 \quad : BC \\ &\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0,-h}=0 \quad : BC \end{aligned} \quad (A9)$$

선형파 이론에 의하면 연직방향 유속분포 U(z,t), Um은 식 (A10)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} U&=\frac{gka}{\sigma}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\sigma t) \\ Um&=\frac{gka}{\sigma kh}\frac{\sinh kh}{\cosh kh}\cos(kx-\sigma t) \\ U'&=\frac{gka}{\sigma}\left\{\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\right. \\ &\quad\left.-\frac{1}{kh}\frac{\sinh kh}{\cosh kh}\right\}\cos(kx-\sigma t) \end{aligned} \quad (A10)$$

여기서, g=중력가속도, k=파수(wave number), σ =각진동수(angular frequency), a=진폭(=H/2; H=파고)이다.

식 (A10)을 식 (A8)의 첫째 식에 대입· 적분하고, 식 (A9)의 경계조건을 적용하면 식 (A11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{gka}{\sigma D}\cdot CC\cdot\left\{\frac{1}{k}\frac{shkh'}{chkh}\right. \\ &\quad\left.-\frac{thkh}{kh}\cdot z-\frac{thkh}{k}\right\} \\ CC&=\frac{\partial Cm}{\partial x}\cos(kx-\sigma t_0) \end{aligned} \quad (A11)$$

여기서, h'=h+z, sh=sinh, ch=cosh, th=tanh이다.

식 (A11)을 적분하면 v(z)에 대한 식 (A12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} v(z)&=\frac{gka}{\sigma D}\cdot CC\cdot\left\{\frac{1}{k^2}\frac{chkh'}{chkh}\right. \\ &\quad\left.-\frac{thkh}{kh}\frac{z^2}{2}-\frac{thkh}{k}\cdot z+K_1\right\} \end{aligned} \quad (A12)$$

여기서, K1=상수이다.

식 (A8)의 w(z,t) 방정식은 변수분리법에 의하여 일반해를 구하고, 식 (A9)의 경계조건을 적용하여 무의미한 해를 배제하면 식 (A13) 형태의 해를 얻을 수 있다.

$$w(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-p^2 t) \cdot A(n) \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \quad \text{(A13)}$$

$$p^2 = D\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$$

식 (A9)의 초기조건을 식 (A12), (A13)을 이용하여 적용하고, Fourier 적분전개식(구간 : -h~0)을 이용하면 식 (A14), (A15)에 제시된 급수 A(n)을 얻을 수 있다.

$$A(0) = -\frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot thkh \cdot \left(\frac{1}{hk^3} - \frac{h}{3k} + K_1\right) \quad \text{(A14)}$$

$$A(n) = -\frac{2}{h}\frac{gka}{\sigma D} \cdot CC \cdot SCC \cdot \frac{thkh}{k^3}$$

$$SCC = \left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{1+\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2} + 2(-1)^n - 1\right]$$

(A15)

또한, 식 (A12), (A13)을 (A7)에 대입· 정리하면, 식 (A4)의 해[식 (A16)]를 얻을 수 있다.

$$C^*(z,t) = v(z) + A(0) \cdot \exp(-p^2 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-p^2 t) \cdot A(n) \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right)$$

(A16)

식 (A16)을 식 (A5)에 대입하여 적분을 수행하면 식 (A17)에 제시된 형태의 C'(z,t)를 얻을 수 있다.

$$C'(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A'(n) \cdot \frac{p^2}{\sigma} \cdot \frac{\partial Cm}{\partial x} \cdot \sin(kx - \sigma t + \theta') \cdot \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2}$$

(A17)

$$A(n) \cdot = A'(n) \cdot \cos(kx - \sigma t_0)$$

$$\cos\theta' = -\left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2}, \quad \text{(A18)}$$

$$\sin\theta' = \frac{p^2}{\sigma}\left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1/2}$$

최종적으로 식 (A17)의 결과와 식 (A2)의 관계식을 이용하면 분산계수를 구할 수 있다.

$$K = -\left(\frac{gka}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2D} \frac{p^4}{\sigma^2} \frac{(thkh)^2}{k^2(kh)^2} \cdot SCC \cdot \frac{\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2}{1+\left(\frac{kh}{n\pi}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{p^4}{\sigma^2}\right)^{-1} \quad \text{(A19)}$$