

Shack-Hartmann 센서의 파면 재구성 알고리즘

Algorithms for wavefront reconstruction of Shack-Hartmann wavefront sensor

서영석, 백성훈*, 박승규*, 김철중*
충남대학교 물리학과, *한국원자력연구소 양자광학기술개발팀
ex-sys@kaeri.re.kr

Shack-Hartmann 센서로부터 얻어진 기울기 정보로부터 파면을 재구성하고 분석하기 위해서는 각각의 점 영상에 대한 위상 구배로부터 파면의 위상을 재구성할 수 있는 수리적인 알고리즘이 필요하다. 파면의 위상을 재구성하기 위한 알고리즘은 Hudgin, Fried, Southwell이 제시한 세 가지 방법에 대한 연구결과가 가장 많이 알려져 있다. 본 연구에서는 CCD 카메라로부터 전송된 디지털 영상에서 각각의 점 영상의 중심점을 추출하여 점 영상의 이동정보로부터 수평과 수직방향의 기울기를 계산하고, 이를 바탕으로 최소제곱법(least-square fitting)을 사용하여 위상을 재구성하였다. 파면의 기울기 정보로부터 파면을 재구성하기 위해 기존의 이론을 바탕으로 행렬계산법을 사용하여 각각의 경우를 일반화하였고, 위상의 복구와 파면의 보정에 따른 해석적인 오차의 관계를 논의하였다.

일반적으로 능동광학계에서는 기준파면이 존재하지 않기 때문에 위상을 재구성하기 위해서는 재구성에 따른 오차를 최소화 할 수 있는 알고리즘이 필요하다. 즉, Shack-Hartmann 센서로부터 측정되어지는 파면의 기울기 정보로부터 재구성되는 위상 점의 위치를 일치시키는 방법과 측정하는 파면의 특성에 따라 적절한 알고리즘을 사용할 필요가 있다. 위에서 언급한 세 가지 모델을 살펴보면, Hudgin⁽¹⁾은 이웃하는 위상 점 사이에 x-축과 y-축에 대한 기울기 정보가 있는 것으로 가정하였고, Fried⁽²⁾는 이웃하는 4개의 위상 점 중앙에 기울기 정보가 위치해 있다고 하였으며, Southwell⁽³⁾은 위상 점과 같은 위치에 기울기 정보가 위치해 있는 것으로 가정하였다.

측정된 기울기 값으로부터 위상을 계산하기 위하여 선형 위상 모델을 사용하면 다음 식과 같다.

$$\phi = \phi_i + S_i^x x \quad (1)$$

이 식으로부터 기울기는 다음과 같이 인접한 위상의 차가 됨을 알 수 있다.

$$S_i^x = (\phi_{i+1} - \phi_i) / x \quad i = 1, N-1 \quad (2)$$

여기에서, N 은 x-축 방향의 위상 점의 수이다. 같은 방법으로 y-축에서도 정의할 수 있다.

파면측정 장치로부터 측정된 기울기 S^x 와 S^y 로부터, 이들의 선형적인 배열을 통해 최소제곱법에 의한 행렬의 계산을 하기 위해 행렬 방정식을 다음과 같이 정의하였다.

$$A\phi = S \quad (3)$$

여기에서, ϕ 는 계산해야 하는 알 수 없는 위상의 값이고, S 는 측정된 기울기의 정보이다. 그리고 A 는 x-축과 y-축 방향에 대한 기울기의 모든 정보와 연결되는 벡터이다. 식(3)을 행렬 관계로 구성하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A(M \times K) \cdot \phi(K \times 1) = S(M \times 1) \quad (4)$$

여기에서, $K=N \times N$ 는 위상 점의 수이고, M 은 x-축과 y-축 방향의 기울기의 수이다. 측정된 기울기의 정보는 상당히 드문드문 떨어져 있는 상태로 측정이 되므로 이들 값이 완전한 행렬의 모양을 가지지 않게 된다. 각각의 방법에 대해서 기울기의 정보와 연결되는 벡터 A 를 수치계산용 소프트웨어인 Mathematica를 사용하여 구성하였다. 식(4)로부터 위상을 결정하기 위해서는 연결 벡터 A 의 역 행렬을 구해야 하는데, 일반적인 경우에는 $\det(A^* A) = 0$ 으로 특이(singular)이기 때문에 해를 구할 수 없게 된다. 이 과정에서 non-singularity를 갖는 역 행렬은 zero mean 조건을 사용한 최소노름(norm)을 갖는 행렬로부터 구할 수가 있고, singular value decomposition (SVD)과 의사역행렬(pseudo inverse matrix) 방법을 사용하여 구할 수 있다. 본 연구에서는 정방행렬이 아닌 경우에도 정확하게 계산이 가능한 SVD 방법으로 역 행렬을 구하여, 실험결과로부터 얻은 기울기 정보로부터 다음의 행렬 방정식으로 위상을 계산할 수 있었다.

$$A^{-1}(K \times M) \cdot S(M \times 1) = \phi(K \times 1) \tag{5}$$

파면의 재구성 실험을 수행하기 위해서 x-축 방향의 위상 점의 개수 N 을 8개로 하여 임의의 기울기를 정의한 뒤 각각의 방법으로부터 위상을 재구성하였다. 기울기 정보로부터 각 알고리즘의 위상 재구성 프로그램을 실행하여 파면의 위상을 재구성할 수 있었다. p-v치(peak to valley value)와 rms(root mean square)는 예상했던 것과 일치하게 Southwell의 방법이 가장 작은 값을 나타내었다. 세 가지 위상 재구성 실험 및 계산 결과를 표 1에 정리하였다.

표 1. 파면 재구성에 대한 각 알고리즘의 p-v치와 rms (N=8)

알고리즘	p-v치(wave)	rms(wave)
Hudgin	3.123655124	0.513458998
Fried	4.224737477	0.591889445
Southwell	2.025964711	0.436991652

후 기

본 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었음.

참고문헌

1. Richard H. Hudgin, "Wave-front reconstruction for compensated imaging," J. Opt. Soc. Am., 67(3), 375(1977).
2. David L. Fried, "Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements," J. Opt. Soc. Am., 67(3), 370(1977).
3. W. H. Southwell, "Wave-front estimation from wave-front measurements," J. Opt. Soc. Am., 70(8), 998(1980).