유리형함수의 반복연산에 대한 고찰

유승재* · 오일수**

Iteration of meromorphic function

Yoo, Seung-Jae* · Oh, Il-Soo**

요 약

본 논문은 만델브로트 집합의 쌍곡성분과 $0<\lambda<1/e$에서 초월 정함수 $E_\lambda(z)$의 Julia집합의 성질에 대한 연구이다. 만델브로트 집합의 쌍곡성분은 $P_c^n(0)$의 영점을 항상 포함하고 있고 역으로 $P_c^n(0)$의 각각의 영점은 만델브로트 집합의 한 쌍곡성분에 포함된다. 그리고 $E_\lambda(z)$의 Julia 집합이 Cantor bouquet를 포함하고 있다는 사실을 Devaney 와 Tangerman의 결과를 이용하여 설명하였다.

Key words : Mandelbrot집합, 쌍곡성분, Julia 집합, Cantor bouquet

1. 서론

매개상수 c에 의한 이차 함수족 $P_c(z)=z^2+c$의 유일한 임계점 0에 대한 함수 P_c의 반복합성에 의한 궤도가 궁극적으로 어떻게 되는가 하는 점에 대한 연구는 오랜 역사를 가지고 있다. 1910년대 G. Julia와 P. Fatou에 의한 연구로부터 근래에 이르기까지 수많은 수학자들의 연구대상이 되었었는데 1978년도 프랑스의 수학자 B. Mandelbrot는 그 궤도가 이탈하지 않는 c의 집합을 규명하였고 그 형상을 컴퓨터에 의하여 자세히 관찰할 수 있도록 하였다. 이 집합을 Mandelbrot집합이라 부르는데 이것은 이차함수들의 Julia 집합의 특성에 대한 기준을 제시하는 등 동역학계의 연구에서 매우 중요한 역할을 한다. 이와 더불어 초월함수의 궤도에 대한 연구도 근대에 활발하게 이루어지고 있는데 그 중 대표적인 것이 초월 정함수 $E_\lambda(z)=\lambda e^z$에 대한 연구이다. 따라서 여기에서는 Mandelbrot 집합의 많은 성질 중에서 쌍곡성분에 대한 특성을 설명하고자 한다. 또한 초월정함수 $E_\lambda(z)=\lambda e^z$의 Julia 집합에 대한 여러 가지 알려진 성질 중에서 그 집합이 Cantor bouquet를 포함하고 있다는 사실을 설명을 위하여 그 포함성에 대한 기준을 제시한 Devaney 와 Tangerman의 연구결과를 이용하고자 한다.

2. M-집합의 쌍곡성분

다항함수 P에 대해서 다음과 같이 유한궤도를 갖는 점들의 집합을 K_P라 하고 $K_P=\{z: P^n(z)\nrightarrow\infty\}$무한궤도를 갖는 점들의 집합을 $A_P(\infty)=K_P{}^c$라 놓자. 그러면 $A_P(\infty)$는 P에 의해 완전불변성을 갖는데 이 집합을 ∞의 흡인영역이라 한다. 또한 K_P의 경계점 집합은 P의 Julia

집합이 되고 따라서 K_P를 'filled-in Julia set'이라 부른다.

정리(P.Fatou 와 G.Julia) C_P를 다항함수 P의 모든 임계점 집합이라 하면 다음이 성립한다.

(1) $C_P \subset K_P \iff P$의 Julia 집합 $J(P)$는 연결집합이다.

(2) $C_P \cap K_P = \emptyset \Rightarrow J(P)$는 칸토르 집합이다.

위와 같은 사실로부터 $M = \{c : 0 \in K_{P_c}\}$ 라 할 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} M &= \{c : 0 \in K_{P_c}\} \\ &= \{c : P_c^n(0) \not\to \infty\} \\ &= \{c : J(P) \text{는 연결집합}\} \end{aligned}$$

모든 다항함수는 무한히 많은 순환궤도를 갖는다. 더욱이 P. Fatou에 의하면 다음 사실을 알 수 있다.

정리 유리함수의 모든 흡인 순환은 적어도 하나의 임계점을 포함한다.

위의 사실로부터 흡인순환이 존재하기 위해서는 값 c가 M에 포함되어야 한다는 것을 알 수 있다. 여기서 집합 $\Gamma(M)$을 다음과 같이 정의하자.

$\Gamma(M) = \{c : P_c \text{는 흡인순환을 갖는다}\}.$

그러면 음함수 정리(Implicit function theorem)에 의하여 $\Gamma(M)$는 열린집합이고, 이것의 연결성분을 M의 쌍곡성분이라 부른다.

보기 영역

$$\Omega_1 = \{c : |1 - \sqrt{1-4c} < 1\}$$

은 주기가 1인 쌍곡성분이고

$$\Omega_2 = \{c : 4|1+4c| < 1\}$$

은 주기가 2인 쌍곡성분이다.

정리(Douady 와 Hubbard) M의 쌍곡성분 H는 단위원 D와 등각 동치이다.

위의 정리로부터 쌍곡성분에 대한 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

정리 집합 M의 각각의 쌍곡성분은 $P_c^n(0)$의 영점을 포함한다. 역으로 각각의 영점은 항상 하나의 쌍곡성분에 포함된다.

보기 $c \fallingdotseq -0.122567117 + 0.74486177i$ 는 $P_c^3(0)$의 영점이고 따라서 주기가 3인 M의 쌍곡성분에 포함된다.

또한 $c \fallingdotseq -0.15652 + 103225i$ 는 $P_c^4(0)$의 하나의 영점이고 따라서 주기가 4인 M의 쌍곡성분에 포함된다

3. $E_\lambda(z)$ 의 Julia 집합

함수 $E(z) = e^z$ 의 Julia 집합이 복소평면 전체가 되는가하는 문제는 1926년 P. Fatou에 의해서 가설로 제기된 이래 오랜 숙제였는데 1981년 Misiurewicz가 이 가설을 증명함으로써 풀렸고 이것은 초월함수에 대한 동역학적 성질의 연구의 큰 계기가 되었다. 이후에 보다 일반화된 초월함수에 대한 연구가 이루어졌으며 특히 1994년에 R. Devaney는 $E_\lambda(z)$ 의 Julia 집합이 Cantor bouquet를 포함하고 있음을 위상동형사상을 만들어 증명하였다. 여기서는 이 사실을 Devaney 와 Tangerman의 기준에 의하여 설명한다.

정리 $E_\lambda(z)$ 의 Julia 집합 $J(E_\lambda)$는 Cantor bouquet를 포함한다.

증명 0은 E_λ의 유일한 특이값이다. D를

단위원이라 하고 그 여집합을 Γ라 하면 $0 \in D$이고 집합

$$E_\lambda^{-1}(\Gamma) = \{ z : \mathrm{Re}(z) > \ln(1/\lambda) \}$$

은 유일한 $T = E_\lambda^{-1}(\Gamma)$의 성분이 되고 또한 영역

$$S = \{ z : |\arg z| < \pi/2 \}$$

에 포함이 된다. 여기서 하나의 다음과 같이 직선을 고정하자. $\zeta(t) = te^{i\pi}$, $t \geq 1$. 그러면 이것은 S와 만나지 않고 $E_\lambda^{-1}(\zeta)$는 각각의 곡선

$$\gamma_j = \{\eta + (2j-1)\pi i : \eta \geq \ln(1/\lambda)\}$$

으로 구성된다. 명백히 각각의 곡선 γ_j는 $\theta^* = 0$에 C^1-점근적이다. 여기서 기본영역 T_j를 다음과 같이 정의하자.

$$T_j = \{ z \ : \mathrm{Re}(z) > \ln(1/\lambda), \\ (2j-1)\pi < \mathrm{Im}(z) < (2j+1)\pi \}$$

이제 T_j가 $E_\lambda^{-1}(\Gamma)$의 쌍곡성분임을 보이자. 우선 $(2N+1)\pi$보다 큰 양의 실수 R_1을 택하고 $r \geq R_1$이라 하자. 그러면 $z \in \bigcup_{-N}^{N} T_j$, $E_\lambda(z) \in \bigcup_{-N}^{N} T_j$ 이고 $|z| = r$인 z에 대해서

$$|E_\lambda(z)| > \lambda e^{\sqrt{r^2-(2N+1)^2\pi^2}}$$

이다. 또한 $\mathrm{Re}E_\lambda(z) > 2\mathrm{Re}(z)$ 이므로 다음을 얻는다.

$$|\arg(E'(z))| < \arctan\frac{(2N+1)\pi}{\mathrm{Re}E(z)} < \arctan\frac{(2N+1)\pi}{2\sqrt{r^2-(2N+1)^2\pi^2}}$$

그런데 arctan는 유계이므로 우리는 다음의 (1)과 (2)를 만족시키는 상수 C와 α를 취할 수 있다.

(1) $\lambda e^{\sqrt{r^2-(2N+1)^2\pi^2}} > C \cdot e^{r^\alpha}$

(2) $C > e^{r^\alpha} \cdot \arctan\dfrac{(2N+1)\pi}{2\sqrt{r^2-(2N+1)^2\pi^2}}$

즉, T는 $\theta^* = 0$에 C^1-점근적인 $E_\lambda^{-1}(\Gamma)$의 쌍곡성분이 된다. 따라서 Devaney 와 Tangerman의 정리에의하면

$$\Lambda_N = \{z \in \bigcup_{-N}^{N} T_j \mid E_\lambda^j(z) \bigcup_{-N}^{N} T_j,\ j \geq 0\}$$

은 Cantor N-bouquet가 되고 결국

$$J_T(E_\lambda) = \{ z : E_\lambda^j(z) \in T,\ j \geq 0 \}$$

은 Cantor bouquet를 포함한다.

참고문헌

(1) L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill International Edition, 1979.

(2) A.B. Beardon, Iteration of Rational Functions, Springer-Verlag 1991

(3) B. Branner, The Mandelbrot Set, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics 39 (1989) pp 75-105

(4) A. Douady and J. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexe, C,R Acad. Sci. Paris. 294(1982) pp123-126

(5) M. Misiurewicz, On iterate of e^z, Ergodic Theory Dynamical Systeml (1981), 1106