

차분법에 의한 복합 박판에서의 비선형 응력 해석

현해정 · 김치경

인천대학교 안전공학과

본 연구에서는 등분포하중을 받는 laminated 박판의 거동해석을 제시하였다. 접착한 두 박판의 비선형 지배방정식을 Von Karman 식을 이용하여 유도하고 박판의 거동을 차분법을 이용하여 수치해석 한다. Interlayer에서의 전단변형을 고려하여 지배방정식에 포함시켜 하중 증분법(load incremental method)으로 기하학 비선형 해석을 수행한다. 하중 증분법에 따른 반복법을 도입하여 비선형 방정식을 해석했다. 해석방법의 타당성을 입증 하기 위하여 해석결과들을 기존의 문헌의 결과와 비교, 검토함으로써 본 논문에서 제시한 이론 및 해석방법의 타당성을 입증한다. 차분법의 하중 증분법 알고리즘을 개발하여 예제문제에 대한 수치해석 결과들을 논하였다.

1. 서론

산업의 발달과 구조해석의 수가 증가함에 따라 고층 건물의 벽체 및 특히 항공기에 있어서 고강도의 복합 판이 주된 구조 재료로서 이용되고 있다. 지금까지 복합재료가 개발되고 디자인 방법과 개념이 이들 새로운 재료들을 효과적으로 이용할 수 있도록 발전되어 왔다. 박판의 Laminated 판 구조는 두께가 작은 탄성재료의 interlayer 와 상대적으로 두께가 큰 두개의 판으로 구성되어 있다. Laminated 판은 단판(monolithic plate), 복판(layered plate)에 비하여 열, 풍압, 소음, 충격 등 외부하중에 저항성이 현저하게 큰 기계적 특성을 가지고 있다. 이에 따라 건축구조물 및 항공기산업 등 내구성을 요하는 자재로서 널리 이용되고 있다. 그러나 Laminated 판으로 이루어진 구조물의 설계에 있어서 laminated 판의 기계적 거동을 정확하게 예측하기가 쉽지 않다. 이러한 원인은 Laminated 판을 구성하는 Interlayer와 두 판 사이의 상호작용에 역학적인 복잡성이 있는 것이다. Reissner(1) 가 두 박판 사이의 중간 core 부분의 횡 전단변형을 고려한 Sandwich 판의 비선형 처짐 방정식을 처음으로 발전시켰다. 이 전개에서는, 중간 core부분의 두께가 두 박판의 두께에 비해 상대적으로 크기 때문에 두 박판의 두께에 대한 응력의 변화를 무시하였다. 이러한 전개는 Laminated 판의 구조해석에는 적합하지가 못하다. Pister 와 Dong(2) 이 여러겹의 판에 대하여 Von Karman 과 유사한 비

선형 방정식을 발전시켰다. 그러나 그들의 해석도 휨 전 단면이 휨 후에도 변형이 없는 Kirchoff의 가정에 근거하였다. 비록 이 방법이 많이 쓰이고 있지만 이러한 해석은 중간 core부분에서의 전단 변형을 무시한 것이다. 본 연구에서는 두께가 작은 중간 core부분인 interlayer에서의 전단변형을 고려한 것이다. 이 interlayer는 상, 하단판에 비해 아주 작은 탄성계수를 가지고 있다.

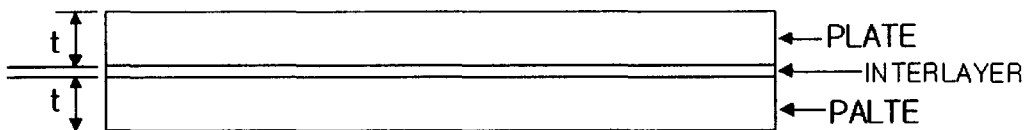


Fig.1 Laminated Plate Unit

2. 분포 하중의 비선형 박판 방정식

분포 면내(in-plane) 하중이 작용함으로 Von Karman 방정식에 분포 막응력을 포함한 새로운 평형방정식을 삽입하여 수정한다. 이들 수정부분을 Von Karman 방정식과 연관하여 다음과 같은 지배방정식을 얻는다

$$D \nabla^4 w = q + t [\sigma_x w_{,xx} + 2 \tau_{xy} w_{,xy} + \sigma_y w_{,yy}]$$

$$= q + t [(\phi_{,yy} + V) w_{,xx} - 2 \phi_{,xy} w_{,xy} - (\phi_{,xx} + V) w_{,yy}] \quad (1)$$

$$\nabla^4 \phi + (1 - \nu) \nabla^2 V = -E [w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2] \quad (2)$$

위의 식에서 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 들은 막응력을 나타낸다. 여기에서 $D = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)}$ = 판

의 강성; w =중양 면에서의 종처짐; ϕ =Airy 응력함수; q =종압력; t =판의 두께; E =판의 Young's 탄성계수; μ =Poisson's 비; ∇^4 =Biharmonic operator;

3. Laminated 판의 지배방정식

판 1)에 대하여 지배방정식은

$$D \nabla^4 w = q_1 + t [(\phi_{1,yy} + V) w_{,xx} - 2 \phi_{1,xy} w_{,yy} + (\phi_{1,xx} + V) w_{,yy}] \quad (3)$$

$$\nabla^4 \phi_1 + (1 - \nu) \nabla^2 V = -E [w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2] \quad (4)$$

판 2) 에 대하여 지배방정식은

$$D \nabla^4 w = q_2 + t [(\phi_{2,yy} + V) w_{,xx} - 2 \phi_{2,xy} w_{,yy} + (\phi_{2,xx} + V) w_{,yy}] \quad (5)$$

$$\nabla^4 \phi_2 + (1 - \nu) \nabla^2 V = -E [w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2] \quad (6)$$

q 와 ϕ 에 대한 아래 첨자 1,2는 판1, 판2 에 해당하는 물리량을 나타낸다.

식(3),(4)와 (5),(6)을 서로 중첩하여 판의 지배방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$2D \nabla^4 w = q + 2t [\phi_{,xx} - w_{,yy} - 2\phi_{,xy} w_{,xy} + \phi_{,yy} w_{,xx}] \quad (7)$$

$$\nabla^4 \phi = -E (w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2) \quad (8)$$

여기서

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \quad q = q_1 + q_2 \quad (9)$$

$$M_x = M_{x1} + M_{x2}, \quad M_y = M_{y1} + M_{y2} \quad (10)$$

M 에 대한 추가적인 아래 첨자 1,2는 판1, 판2 에 작용하는 모멘트의 양을 나타낸다.

4. 수치 차분해석

식(7),(8)은 비선형 미분방정식이 일련의 대수방정식으로 치환되어 아래와 같은 연립 방정식을 얻는다.

$$[R] \{w\} = \{q\} + f_1(w, \phi) \quad (11)$$

$$[S] \{\phi\} = f_2(w) \quad (12)$$

여기에서 $[R]$ 와 $[S]$ 는 선형대칭이며 positive definite로서 컴퓨터 프로그램에서 half-band 행렬로 변형된다. $\{w\}$, $\{\phi\}$ 그리고 $\{q\}$ 는 각각 변위, 응력함수 그리고 절점에서의 하중을 나타내며 f_1 과 f_2 는 비선형 함수이다.

5. 비선형 방정식의 반복 해석

식(11) 과 식(12)으로 처짐과 응력을 구할 수 있다. 이들 방정식은 비선형이므로 반복법으로 계산한다. $(i+1)$ 반복 후 방정식은 아래와 같다.

$$[R] \{w^{i+1}\} = \{q\} + \{f_1(w^i, \phi^i)\} \quad (13)$$

$$[S]\{\phi^{i+1}\} = \{f_2(w^{i+1})\} \quad (14)$$

6. 수치예제

본 연구에서 개발된 방법의 효율성과 정확성을 보여주기 위해서 등분포 하중을 받는 사각형 모양의 박판 알루미늄판을 사용하여 수치해석 하였다. 수치계산에 사용되는 박판의 크기와 물성값은 $a=60\text{in}$, $b=90\text{in}$, 두께 $t=0.15\text{in}$, 탄성계수 $E=10 \times 10^6$ psi 그리고 포아송비 $\mu=0.22$ 들이다. 판이 이중 대칭임으로 판의 1/4 만 고려하여 10×15 격자수로 차분화 하였다. 우선 먼저 개발한 모델의 타당성을 입증하기 위해 단(monolithic)판을 위의 물성치를 이용하여 비선형적으로 해석하여 SAP2000의 결과를 비교하였다. 그림7 에서 보듯 결과를 무차원적으로 나타내어 판의 중앙에서 지지부분으로의 하중과 최대 처짐의 관계가 비선형적으로 발전함을 볼 수 있다. 비선형 그래프가 선형 이론의 결과치 보다 많은 차이를 보이는 것은 큰 처짐으로 인하여 발생하는 막응력 효과가 판의 강성을 증가시키기 때문이다. 최대 처짐이 판의 두께의 2배 보다 크며 처짐 분포에 있어서 SAP2000 의 결과치와 비교해서 최대 차이가 약 7%로 크게 차이를 보이지 않고 있다. 이 차이들은 격자의 수에 기인된다고 생각되며 격자의 수를 증가 함으로서 이 차이를 줄일 수 있을 것이다. 대체적으로 두 결과가 아주 만족하게 접근하여 본 연구 결과의 타당성을 입증할 수 있을 것이다. 그림3과 4는 개발한 알고리즘을 이용하여 Laminated 판의 처짐과 하중의 변화에 따른 최대주응력 분포를 등고선으로 보여주고 있다. 그림3은 하중 $q=0.15\text{psi}$ 일 때 처짐을 나타내며 그림4는 하중 $q=0.15\text{psi}$, 0.3psi 일 때 최대주응력을 보여주고 있다. 이들 그림은 판의 중심에서 코너까지의 최대 주응력의 변화와 처짐을 보여주고 있다. 중앙 부분에서의 최대 주응력이 지지 변으로 갈수록 크게 증가되는 것을 보여 주고 있다. 판을 설계하는데 있어서 주응력의 크기 및 위치는 중요한 자료가 된다.

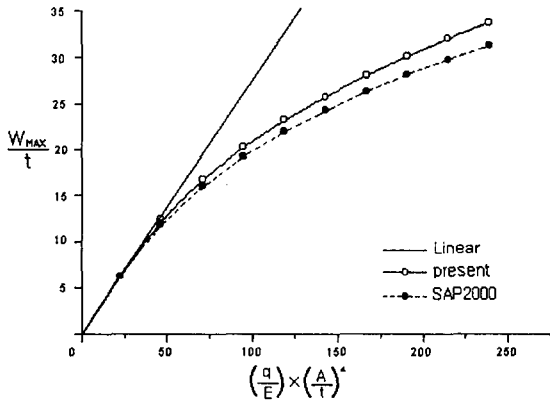


Fig. 2 Comparison of Present and SAP2000 Solutions with Pressure 0.30 psi

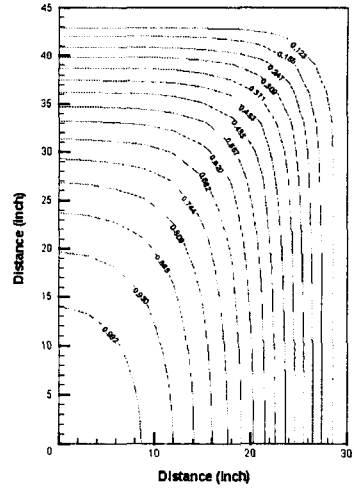
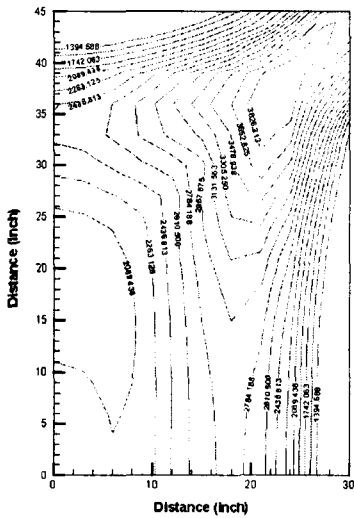
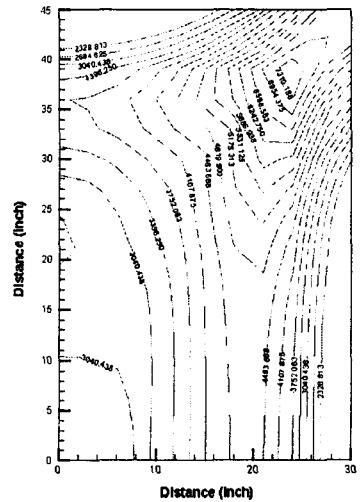


Fig. 3 Lateral Displacements Due to 0.15 psi Pressure



(a) 0.15psi Pressure



(b) 0.30psi Pressure

Fig. 4 Maximum Principle Tensile Stresses

7. 결론

본 연구에서는 단순지지의 등분포하중을 받는 laminated 판의 탄성해법을 유도하고 응력과 처짐을 계산하는 알고리즘을 개발하였다. Laminated 박판의 큰 처짐의 기하학적 비선형을 Von Karman 방정식을 수정하여 차분법으로 해석하였다. 이 모델의 해는 하중의 증가수나 크기 및 바로 전의 변위에 관계없이 수렴함을 보여주며 각각의 하중에 대해 반복법이 Von Karman 방정식에 정확하게 수렴함으로써 다른 일반적인 수치 해석 방법보다 결과치가 정확하다. 이 모델은 전 하중에 관계없이 어떠한 하중에 대하여 직접적 해를 보여주고 있으며 계수 매트릭스가 초기 해에서 half band 형태로 발전되어 비선형 반복계산에서 중합 저장된다. 이 방법은 다른 비선형 유한요소법과 비교하여 모델을 효과적으로 만들고 있다. 또한 개발된 모델은 단순하며 컴퓨터 저장 장소나 실행시간에 매우 효과적이며 가변적인 격자 크기가 어떠한 크기의 사각형 판에 적용된다. 본 논문에서 제시한 방법은 다른 복합(multiple laminated)판의 해석 및 설계에 유용하게 적용될 수 있다.

참고문헌

1. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1981.
2. Szilard, R., "Theory and Analysis of Plates," Prentice-Hall, Inc., 1974.
3. Timoshenko, S., and Krieger, S.W., "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959.
4. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1981.
5. Reissner, Eric., "Finite Deflection of Sandwich Plates," Journal of the Aeronautical Science, 1948.
6. Kan, H.P., and Huang, J.C., "Large Deflection of Rectangular Sandwich Plates," AIAA, Vol.5. 1967.
7. Pinstner, K.S., and Dong, S.B., "Elastic Bending of Layered Plates," ASCE, Vol.85, 1959.
8. Yu, Y.Y., "A new theory of elastic Sandwich Plates-One-Dimensional Case," Journal of Applied Mechanics, 1959.
9. Wang, C.T., "Principle and Application of Complementary Energy Method for thin Homogeneous and Sandwich Plates and Shells With Finite Deflections," Technical Note 2620, NACA, 1952.