

# 직교이방성 판 내에서의 균열전파 해석

김만원 · 박재학

충북대학교 안전공학과

## 1. 서론

이방성 재료에서 균열의 성장을 예측하는 것은 실제 구조물의 안전성을 정확하게 해석하기 위한 중요한 문제이다. 이방성 재료 내에서의 균열의 거동은 등방성 재료의 경우와는 다르기 때문에 이방성 재료 내의 균열 해석 문제가 중요한 관심을 끌게 되었다. 비등방성 재료에 대한 지금까지의 연구는 대부분 직선균열의 해석, 직선균열의 초기 전파 각도에 대한 해석에 대하여 이루어져 왔고 곡선 균열에 대한 연구[1-4]는 많이 이루어지지 않았다.

이방성 재료에서 균열의 전파를 해석하기 위해서는 곡선균열에 대한 정확한 응력강도계수(stress intensity factor)와 균열의 전파각도를 구해야만 한다. 이방성재료의 경우 균열의 초기 전파각도는 재료상수와 파괴인성(fracture toughness)의 영향을 받으므로 등방성 재료에서의 균열 전파 조건 식을 그대로 사용할 수 없다. 또한 경사진 균열이나 곡선균열의 경우 혼합모드에서의 파괴조건이 필요하다. 일반적으로 이방성 재료에서의 파괴조건으로 최대원주인장응력(maximum circumferential tensile stress)조건[5], 최소변형률에너지밀도(minimum strain energy density)조건[6,7], 최대원주변형률(maximum circumferential stain)조건[8] 등이 사용된다. 그 외에 Azhdari 등[9]은 사파이어 단결정의 (11 $\bar{2}$ 0) 면으로 시편을 채취하여 응력 기반의 A-파라미터 파괴조건을 제시하고 실험과 유한요소 해석을 행하였다.

본 논문에서는 유한요소 교호법(finite element alternating method)을 적용하여 곡선 균열의 선단에서 응력강도계수를 구하고 파괴조건을 이용하여 균열의 전파각도를 계산한 후 Paris의 법칙을 적용하여 균열의 성장을 예측하였다.

## 2. 유한요소 교호법을 이용한 곡선균열의 해석

유한요소 교호법은 해석해와 유한요소법을 교대로 사용하는 방법으로, 유한요소 해석

에서와 같이 균열 선단 부근에서 특이요소를 사용하거나 유한요소 격자를 잘게 나누지 않아도 되므로 시간과 비용을 절약할 수 있으며 정확한 응력강도계수를 구할 수 있다는 장점을 갖는 효과적인 균열 해석 방법이며, 2차원 균열 문제뿐만 아니라 3차원 균열 문제에도 성공적으로 적용되었다.

본 연구에서 이방성 재료에서의 곡선균열의 성장경로를 해석하기 위하여 유한요소교호법에서 사용한 해석해는 참고문헌[4]와 동일한 방법으로 구하였다. 곡선균열을 전위의 연속된 분포라고 가정하고 Fig. 1과 같이 곡선균열을  $(n+1)$  개의 절점으로 나눈다. 그러면 첫 번째 절점과  $(n+1)$  번째 절점은 균열 선단에 위치할 것이다. 그리고 절점과 절점 사이의 균열은 직선이라고 가정하였다.

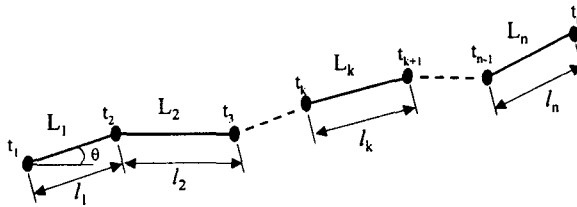


Fig. 1. A curved crack consisting of  $n$  crack elements.

유한요소법으로 균열면에서의 표면력(traction)을 구하고, 적당한 전위밀도함수의 분포를 가정하여 응력함수로 표현된 결과력(resultant force) 식에 대입한 후, 균열면을 따라 적분하면 결과력으로 표현된 적분방정식을 얻는다.

이 적분방정식을 풀어서 균열 선단요소에서의 전위밀도함수 값을 구한다. 이때 적분방정식의 각 항의 적분 중 간단한 꼴로 적분값을 표시할 수 있는 항들은 이론적으로 적분값을 구하고, 그 외의 적분 값들은 수치적분으로 구하였다. 피적분 함수에  $1/\sqrt{t}$  형의 특이성이 존재하는 경우에는 Gauss 적분공식 형태의 적절한 적분 공식을 사용하였다.

균열 선단에서의 전위밀도함수 값이 얻어지면 응력강도계수를 구할 수 있다. Sih 등 [10]의 결과를 이용하면 균열선단에서 응력강도계수는 다음 식으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\pi l/2} [(D_1)_c C_{22} - (D_2)_c C_{12}] / C, \\ K_{II} &= \sqrt{\pi l/2} [(D_2)_c C_{11} - (D_1)_c C_{21}] / C. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $(D_1)_c$ 와  $(D_2)_c$ 는 균열 선단에서의 전위밀도함수 값이고,  $l$ 은 균열선단을 포

함하는 균열요소의 길이, C 및  $C_{ij}$ 는 재료상수에 관련된 실상수 값으로 참고문헌 [4]에 주어져 있다.

### 3. 피로균열의 전파 해석

곡선균열의 선단에서 응력강도계수가 구해지면 파괴조건식을 이용하여 균열의 초기 진전각을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 제안된 파괴조건식들 중에서 직교이방성 재료에서 좋은 결과를 내면서도 비교적 간단한 최대원주인장응력 조건을 사용하였다. 최대 원주인장응력 조건은 등방성 재료의 경우에 균열이 최대원주응력이 작용하는 방향으로 균열이 전파된다는 가정을 그대로 이방성 재료에 적용하였는데, 등방성의 경우와 달리 파괴인성 값이 재료의 주축에 대한 각도의 함수로 나타나므로 적용하는 절차가 다르다.

$$\max \left( \frac{K_I \operatorname{Re}[A(s_1 B - s_2 C)] + K_{II} \operatorname{Re}[A(B - C)]}{K_{IC}^1 \cos^2 \theta + K_{IC}^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (2)$$

여기서  $A=1/(\mu_1 - \mu_2)$ ,  $B=(\mu_2 \sin \theta + \cos \theta)^{3/2}$ ,  $C=(\mu_1 \sin \theta + \cos \theta)^{3/2}$  이며,  $K_{IC}^1$ 과  $K_{IC}^2$ 는 각각 x축에 수직인 직선 중앙균열에 대한 파괴인성과 x축에 수직인 직선 중앙균열에 대한 파괴인성을 나타낸다.

식(2)의 값이 최대가 되는 각도를 찾아서 그 각도와 균열 선단에서의 응력강도계수를 조건식에 대입하여 1 보다 크면 균열은 그 방향으로 진전한다. 파괴 조건식으로부터 균열의 전파각도가 구해지면 Paris의 피로법칙( $da/dN = A(\Delta K)^m$ )을 적용하여 균열을 진전시킨다. 이때 성장한 균열길이에 대한 총 하중사이클을 구할 수 있도록 하였고, 실험계수  $A=6.3 \times 10^{-8}$ ,  $m=4.3$  이며,  $E_2/E_1 = K_{IC}^1/K_{IC}^2$ 의 관계가 있다고 가정하였다.

### 4. 수치해석 결과 및 고찰

유한요소 교호법의 절차 중 유한요소 해석에서는 8 절점 2차 사변형요소(8-node quadratic element)를 사용하였고, 가로와 세로가 10 in.×10 in.인 단위두께의 직교이방성 평판을 사용하였다. 본 연구에서 균열의 진전은 가해진 하중에 대하여 현재의 균열 선단 요소에 대한 균열의 전파 각을 구하여 일정 길이만큼 진전시킨 후, 다음 단계에서 같은 과정을 반복하여 단계 별 응력강도계수와 균열 진전각이 구해지도록 모사하였다.

우선 초기균열 길이  $2a=50.8\text{mm}$ 인 수평 중앙균열이 직교이방성 판 내에 존재하는

경우에 대하여, 균열의 성장 단계를 4 단계로 하고  $\Delta a=25.4\text{mm}$ 인 경우(CASE 1)와  $\Delta a=12.7\text{mm}$ 인 경우(CASE 2)에 대하여 균열의 진전방향을 구하였다. 이때 사용한 재료상수 값은  $E_1=39.5\text{GPa}$ ,  $E_2=158.03\text{GPa}$ ,  $G_{12}=20.48\text{GPa}$ ,  $\nu_{12}=0.34$  이다. Table 1은 균열의 우측 선단에서 각각의 경우에 대하여 응력강도계수의 비와 각 단계별 균열의 성장 방향을 나타낸 것이다.

Table 1 Crack propagation angles

| step   |   | $K_{II}/K_I$ | crack growth angle (deg.) |
|--------|---|--------------|---------------------------|
| CASE 1 | 1 | 0.00         | 65.6                      |
|        | 2 | 2.11         | -85.5                     |
|        | 3 | -0.30        | 75.9                      |
|        | 4 | 1.08         | -83.6                     |
| CASE 2 | 1 | 0.00         | 65.6                      |
|        | 2 | 1.82         | -85.3                     |
|        | 3 | -0.29        | 75.6                      |
|        | 4 | 1.11         | -83.7                     |

이때 균열 진전 각도는 균열 선단에서의 국부좌표계를 기준으로 결정된 것이며, 최종 균열의 초기 균열에 대한 최종 방향과 총 하중 사이클이 각각 CASE 1의 경우  $-27.6^\circ$ ,  $1.2 \times 10^{14}$ 번이었고 CASE 2의 경우  $-27.8^\circ$ ,  $6.6 \times 10^{13}$ 번이었다. 결과로부터 균열 성장시 각 단계별 균열의 성장길이가 달라도 최종적으로 같은 방향으로 진전됨과 CASE 2의 총 하중 사이클이 CASE 1의 경우에 비하여 0.5 배 차이 남을 알 수 있다.

다음으로 균열 증분 길이의 영향을 보기 위하여  $E_1/E_2=0.25$ 인 경우에 대하여 각각  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  균열을  $\Delta a$ 를 달리하여 균열의 성장궤적을 구하였다.(Fig. 2) 균열의 증분을 매우 작게 하면 균열이 매끄러운 직선이 될 것이라는 것을 알 수 있다.

다음으로 재료의 이방성의 영향을 알아보기 위하여  $E_1/E_2$ 의 비를 0.25, 0.5, 1, 5, 10으로 바꾸어 가면서 해석하였다. Fig. 3은 각각 x축으로부터  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  경사진 균열에 대한 피로균열 전파경로를 나타낸 것이다. 두 경우 모두  $\Delta a=8.467\text{mm}$ 로 하였다. 이때  $\sigma_0=1.0\text{GPa}$ 을 외부하중으로 가하였다.

Fig. 3에서 볼 때 수평균열의 경우,  $E_1/E_2>1$ 인 경우 균열은 거의 수평으로 전파하였으며,  $E_1/E_2<1$ 인 경우 균열이 지그재그 형태로 전파하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 4에서도 유사한 결과를 보이고 있다. 이는 재료의 강성이 약한 방향으로 균열이 전파하려는 경향이 있음을 의미한다.

## 5. 결론

비등방성 유한 판 내에 존재하는 곡선균열의 성장 예측 문제를 풀 수 있도록 유한요소 교호법을 확장, 적용하였다. 균열의 진전 단계별 길이가 달라도 같은 방향으로 균열이 진전하였고, 수평균열과 경사균열에서 재료의 탄성계수 비에 따른 균열 성장 궤적을 구하였다. 직교이방성 판의 균열 성장은 재료의 강성이 약한 방향으로 진전하려 하는 경향이 있으며 이때 각각의 성장 단계별 균열의 진전 각을 구할 수 있었다.

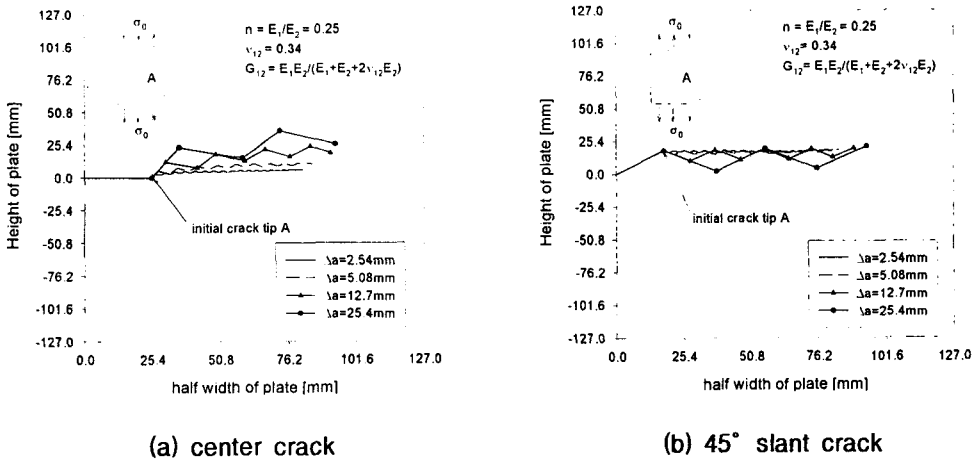


Fig. 2 Crack propagation with different increments of the crack length,  $\Delta a$ .

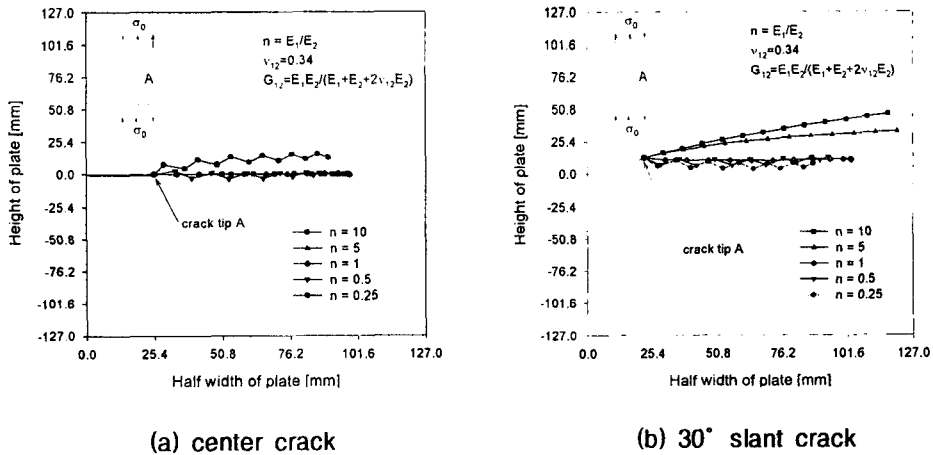


Fig. 3 Crack propagation in orthotropic plates with different material properties.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

1. M. Obata, S. Nemat-Nasser, and Y. Goto, "Branched Cracks in Anisotropic Elastic Solids," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 56, pp.858-864, 1989.
2. W. L. Zang and P. Gudmundson, "Kinked Cracks in an Anisotropic Plane Modeled by an Integral Equation Method," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, pp. 1855-1865, 1991.
3. H. Gao and C-H., Chiu, "Slightly Curved or Kinked Cracks in Anisotropic Elastic Solids," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, pp.947-972, 1992.
4. 김만원, 박재학, "유한요소 교호법을 이용한 이방성 재료내의 꺾인 균열 및 원호 균열 해석," 한국항공우주학회지, 제28권, 제7호, pp.66-73, 2000.
5. V. E. Saouma, M. L. Ayary and D. A. Leavell, "Mixed Mode Crack Propagation in Homogeneous Anisotropic Solids," *Eng. Fracture Mech.*, Vol.27, No.2, pp.171-184, 1987.
6. G. C. Sih, "Strain Energy Factors Applied to Mixed Mode Crack Problems," *Int. J. of Fracture*, Vol.10, pp.305, 1974.
7. Z. YE and M. L. Ayari, "Prediction of Crack Propagation in Anisotropic Solids," *Eng. Fracture Mech.*, Vol.49, No.6, pp.797-808, 1994.
8. M. L. Ayari and Z. YE, "Maximum Strain Theory for Mixed Mode Crack Propagation in Anisotropic Solids," *Engn. Fracture Mech.*, Vol. 52, No. 3, pp.389-400, 1995.
9. A. Azhdari, S. Nemat-Nasser, and J. Rome, "Experimental Observations and Computational Modeling of Fracturing in an Anisotropic Brittle Crystal(Sapphire)," *Int. J. of Fracture*, Vol.94, pp.251-266, 1998.
10. G. C. Sih, P. C. Paris, and G. R. Irwin, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies," *Int. J. Fracture Mech.*, Vol. 1, pp.189-203, 1965.