

직선 박벽보에 대한 엄밀한 자유진동해석

Exact Free Vibration Analysis of Straight Thin-walled Straight Beams

김 문 영*
Kim, Moon-Young

윤 희 택**
Yun, Hee-Taek

나 성 훈***
Na, Sung-Hoon

ABSTRACT

For the general case of loading conditions and boundary conditions, it is very difficult to obtain closed form solutions for buckling loads and natural frequencies of thin-walled structures because its behaviour is very complex due to the coupling effect of bending and torsional behaviour. In consequence, most of previous finite element formulations are introduce approximate displacement fields to use shape functions as Hermitian polynomials, and so on. The purpose of this study is to presents a consistent derivation of exact dynamic stiffness matrices of thin-walled straight beams, to be used in the free vibration analysis, in which almost types of boundary conditions are exist An exact dynamic element stiffness matrix is established from governing equations for a uniform beam element of nonsymmetric thin-walled cross section. This numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. The natural frequency is evaluated for the thin-walled straight beam structure, and the results are compared with analytic solutions in order to verify the accuracy of this study.

1. 서 론

유연한 적용성과 해석과정의 단순함으로 인하여 보(beam)는 가장 널리 사용되고 있는 구조 요소이다. 특히 I형, 채널, 앵글단면 형태를 가지는 박벽보 구조는 단위중량에 대한 강성이 매우 높아 실무에서 활발히 적용되고 있다. 박벽보에 관한 연구는 1960년대에 Vlasov와 Timoshenko 등에 의해 시작된 이후, 최근까지도 국내외에서 많은 발전이 이루어지고 있다.^{(1)~(7)} 그러나 박벽보 요소는 구조적 거동이 복잡하여 단순한 경계조건이 주어지지 않는 한, 고유진동수와 진동모우드 등의 동적 특성과 좌굴하중과 같은 정적 특성에 대한 엄밀한 해석이 매우 어렵다. 이러한 이유로 직선 박벽보 요소의 안정성 및 자유진동 해석을 위한 대부분의 연구에서는 Hermitian다항식 등을 형상함수로 사용함으로써 근사적인 요소 강도행렬을 산정한다.

* 성균관대학교 토목환경공학과 교수

** 한국철도기술연구원 선임연구원

*** 한국철도기술연구원 주임연구원

본 연구에서는 박벽보 구조의 동적해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 유한요소 정식화 기법을 제안한다. 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 지배방정식을 14개의 변위 파라메타를 도입하여 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용함으로써 엄밀한 14×14 동적 요소 강도행렬을 유도하였다.

본 연구와 관련하여, 1985년 Friberg⁽³⁾는 Vlasov이론을 바탕으로 비대칭 박벽보 요소의 엄밀한 동적 강도행렬을 유도한 바가 있으나, 이로부터 좌굴하중이나 고유진동수를 산정하기 위해서는 Wittrick-Williams algorithm과 같은 추가적인 수치해석 기법을 적용해야 하는 불편이 있다. 그러나 본 연구에서 제안한 유한요소 정식화 기법에서는 이러한 추가적인 작업이 필요하지 않다. 형상함수를 도입하여 요소의 강도행렬을 산정하는 기존의 유한요소법과 비교할 때, 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 2축대칭, 1축 대칭, 비대칭 단면을 가지는 단순지지 박벽보 구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해와 비교하였다.

2. 비대칭 박벽보의 지배방정식

그림 1과 같이 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보 요소의 지배방정식은 식(1)과 같다⁽⁵⁾⁻⁽⁶⁾. 여기서 U_x , U_y , U_z 와 ω_1 , ω_2 , ω_3 는 각각 x_1 , x_2 , x_3 방향으로의 강체이동변위와 회전변위를 나타내며, f 는 x_1 방향으로의 뒹(warping)을 정의하는 파라메타이다. EA 는 축강성, EI_3 , EI_2 는 휨강성, GJ 는 순수비틀강성을 나타낸다. I_ϕ , $I_{2\phi}$, $I_{3\phi}$ 는 뒹-비틀강성(warping torsional rigidity)⁽⁶⁾, 그리고 m , ω 는 부재의 단위 길이당 질량과 고유진동수(angular frequency)를 나타낸다. 또한 oF_1 , oM_2 , oM_3 , ${}^oM_\phi$ 는 단면의 도심에 작용하는 축방향 하중, 휨모멘트, Wagner effect를 나타내는 단면력을 나타낸다⁽⁶⁾. 식(1)의 지배방정식에서 전단 변형(shear deformation)은 무시되지만, 뒹-비틀의 영향은 고려되었다.

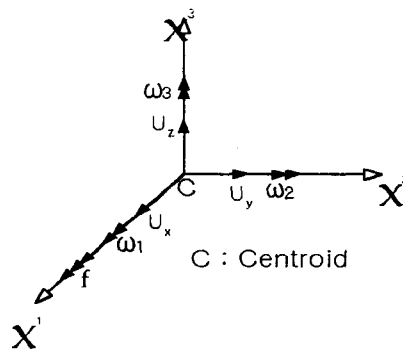


그림 1 박벽단면의 변위파라메타

$$-EAU_x'' - \rho\omega^2AU_x = 0 \quad (1-1)$$

$$EI_3 U_y'''' + EI_{3\phi}\theta'''' - \rho\omega^2AU_y'' + \rho\omega^2I_3U_y'' + \rho\omega^2I_{3\phi}\theta'' - {}^oF_1U_y'' + {}^oM_2\theta'' = 0 \quad (1-2)$$

$$EI_2 U_z'''' + EI_{2\phi}\theta'''' - \rho\omega^2AU_z'' + \rho\omega^2I_2U_z'' + \rho\omega^2I_{2\phi}\theta'' - {}^oF_1U_z'' + {}^oM_3\theta'' = 0 \quad (1-3)$$

$$EI_{\phi} \theta'''' - GJ\theta' + EI_{3\phi} U_y'''' + EI_{2\phi} U_z'''' - \rho\omega^2 I_o \theta + \rho\omega^2 I_{\phi} \theta'' + \rho\omega^2 I_{2\phi} U_z'' + \rho\omega^2 I_{3\phi} U_y'' - {}^oM_p \theta' + {}^oM_2 U_y'' + {}^oM_3 U_z'' = 0 \quad (1-4)$$

이렇게 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 지배방정식은 휨과 비틀의 연계효과로 인하여 식(1)과 같이 4계 연립 상미분방정식의 형태를 가지며, 단순한 하중이나 경계조건이 주어지지 않는 한 엄밀해를 구하는 것은 매우 어렵다. 이러한 경우 지금까지 직선 박벽보 요소의 안정성 및 자유진동 해석을 위한 대부분의 연구에서는 Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 사용하므로써 근사적으로 요소 강도행렬을 산정하였다.

3. 동적 강도행렬의 유도

여기서는 비대칭 직선 박벽보 요소에 대한 지배방정식 (1)로부터 엄밀한 동적 강도행렬을 구하는 과정을 설명하고자 한다. 먼저 지배방정식을 선형 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여, 14개의 변위 파라메타를 다음과 같이 도입한다.

$$\{d_i\} = \{d_1, d_2, \dots, d_{14}\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } d_1 = U_x, d_2 = U_x', d_3 = U_y, d_4 = U_y', d_5 = U_y'', d_6 = U_y''', \\ d_7 = U_z, d_8 = U_z', d_9 = U_z'', d_{10} = U_z''', d_{11} = \theta, d_{12} = \theta', d_{13} = \theta'', d_{14} = \theta'''' \text{이다.} \end{aligned}$$

식(2)를 식(1)에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 4개 파라메타들 사이의 관계를 구할 수 있다.

$$-EA d_2' = \rho\omega^2 A d_1 \quad (3-1)$$

$$EI_3 d_6' + EI_{3\phi} d_{14}' = \rho\omega^2 A d_3 - \rho\omega^2 I_3 d_5 - \rho\omega^2 I_{3\phi} d_{13} + {}^oF_1 d_5 - {}^oM_2 d_{13} \quad (3-2)$$

$$EI_2 d_{10}' + EI_{2\phi} d_{14}' = \rho\omega^2 A d_7 - \rho\omega^2 I_2 d_9 - \rho\omega^2 I_{2\phi} d_{13} + {}^oF_1 d_9 - {}^oM_3 d_{13} \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} EI_{\phi} d_{14}' + EI_{3\phi} d_6' + EI_{2\phi} d_{10}' = GJ d_{13} + \rho\omega^2 I_o d_{11} \\ - \rho\omega^2 I_{\phi} d_{13} - \rho\omega^2 I_{2\phi} d_9 - \rho\omega^2 I_{3\phi} d_5 + {}^oM_p d_{13} - {}^oM_2 d_5 - {}^oM_3 d_9 \end{aligned} \quad (3-4)$$

또한 나머지 10개의 변위 파라메타들 간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_1' = d_2, d_3' = d_4, d_4' = d_5, d_5' = d_6, d_7' = d_8 \\ d_8' = d_9, d_9' = d_{10}, d_{11}' = d_{12}, d_{12}' = d_{13}, d_{13}' = d_{14} \end{aligned} \quad (3-5)$$

식(3)의 관계는 다음과 같이 상수인 계수를 가지는 1차 연립방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{d_i'\} = [B]\{d_i\} \quad (i=1\sim 14) \quad (4)$$

여기서, $[A]$ 의 각 요소는 다음과 같으며, 그 외의 요소는 모두 0이다.

a_1													
	a_2												
		a_1											
			a_1										
				a_1									
					a_3								a_6
						a_1							
							a_1						
								a_4					a_7
									a_1				
										a_1			
											a_1		
												a_1	
					a_6								a_5
									a_7				

$$a_1 = 1.0, \quad a_2 = -EA, \quad a_3 = EI_3, \quad a_4 = EI_2, \quad a_5 = EI_\phi, \quad a_6 = EI_{3\phi}, \quad a_7 = EI_{2\phi}$$

마찬가지로, $[B]$ 의 요소는 다음과 같으며, 그 외의 요소는 모두 0이다.

	b_1												
b_2													
		b_1											
			b_1										
				b_1									
		b_2			b_3								b_4
							b_1						
								b_1					
						b_2		b_5				b_6	
										b_1			
											b_1		
					b_4							b_1	
							b_6		b_7			b_8	

$$b_1 = 1.0, \quad b_2 = \rho\omega^2 A, \quad b_3 = -\rho\omega^2 I_3 + {}^oF_1, \quad b_4 = -\rho\omega^2 I_{3\phi} - {}^oM_2, \quad b_5 = -\rho\omega^2 I_2 + {}^oF_1, \\ b_6 = -\rho\omega^2 I_{2\phi} - {}^oM_3, \quad b_7 = \rho\omega^2 I_o, \quad b_8 = GJ - \rho\omega^2 I_\phi + {}^oM_\phi$$

식(4)의 해, $\{d_j\}$ 는 다음과 같이 복소 지수함수의 형태로 가정할 수 있다.

$$\{d_j\} = \sum_{j=1}^{14} \{a_j\} [Z_{ij}] e^{(\lambda_j)x} \quad (i, j = 1 \sim 14) \quad (5)$$

식(5)를 식(4)에 대입하여 정리하면, 아래와 같은 복소수 형태의 선형 고유치 문제로 정식화할 수 있다(이후로 편의상 \sum 는 생략하기로 한다). 이와 같은 고유치 문제로부터 복소수 형태로 14개의 고유치(eigenvalue), $\{\lambda_j\}$ 와 14×14 고유벡터(eigenvector), $[Z_{ij}]$ 를 구할 수 있다. 여기서 고유치 해석은 IMSL subroutine DCVCRG를 이용하였다.

$$([A]\{\lambda_j\} - [B])[Z_{ij}] = 0 \quad (6)$$

따라서, 14개의 변위파라메타에 관한 식(5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{d_i\} = [X_{ij}]\{a_j\} \quad (7)$$

여기서, $[X_{ij}] = \sum_{j=1}^{14} [Z_{ij}] e^{(\lambda_j)x}$ 이며, 각 요소가 x 에 관한 복소 지수함수 형태로 이루어진 14×14 행렬이다. 복소 계수 $\{a_j\}$ 를 소거하기 위해서는 그림2와 같은 박벽보 요소 양단의 절점변위 파라메타를 도입해야 한다.

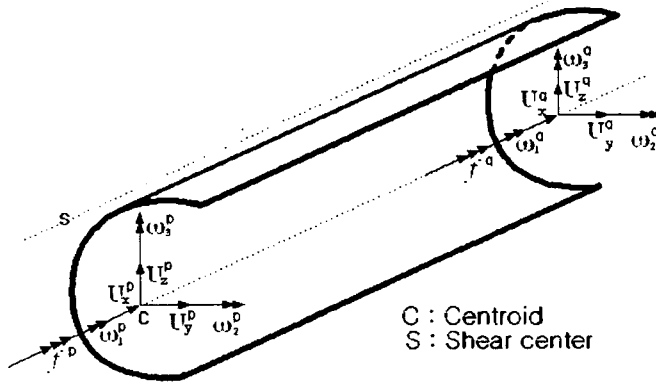


그림 2 박벽 보요소의 절점변위

$$\{u_i\} = [X_{ij}]\{a_j\} \quad (8)$$

$$\text{여기서 } \{u_i\} = \{ U_x(0), U_y(0), \omega_3(0), U_x(L), U_y(L), \omega_3(L), \omega_2(0), \omega_2(L), \omega_1(0), \omega_1(L), f(0), f(L) \}^T$$

이고, $[X_{ij}]$ 의 각 요소는 $[X_{ij}]$ 로부터 쉽게 구할 수가 있다. 여기서 복소수 형태의 역행렬은 IMSL subroutine DLINCG를 이용하여 구하였다.

$$\{a_j\} = [X_{ij}]^{-1}\{u_i\} \quad (9)$$

식(9)를 식(7)에 대입하면, 복소계수 $\{a_j\}$ 를 소거할 수 있으며, 결국 14개의 변위 파라메타를 다음과 같이 모두 구할 수가 있다.

$$\{d_i\} = [X_{ij}][X_{ij}]^{-1}\{u_i\} \quad (10)$$

한편, Hamilton의 원리로부터 그림 3과 같은 비대칭 박벽보 요소의 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다. 그림 3에서 F_1, F_2, F_3 는 각각 x_1 방향의 축력과 x_2, x_3 방향의 전단력이다. 또한 M_3, M_2 는 x_2, x_3 방향의 휨모멘트, M_1, M_ϕ 는 x_1 방향의 비틀모멘트와 바이모멘트(bimoment)를 나타낸다. 그리고 첨자 p, q는 각각 보의 양단($x = 0, L$)을 의미한다. 힘-변위 관계식에 식(2)와 같은 14개의 변위 파라메타를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$F_1 = EA U_x' = EA d_2 \quad (11-1)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= -EI_3 U_y''' - EI_{3\phi} \theta''' - \rho\omega^2 I_3 U_y' - \rho\omega^2 I_{3\phi} \theta' + {}^o F_1 U_y' - {}^o M_2 \theta' \\ &= -EI_3 d_6 - EI_{3\phi} d_{14} - \rho\omega^2 I_3 d_4 - \rho\omega^2 I_{3\phi} d_{12} + {}^o F_1 d_4 - {}^o M_2 d_{12} \end{aligned} \quad (11-2)$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{3\phi} \theta'' + 0.5 {}^o M_2 \theta = EI_3 d_5 + EI_{3\phi} d_{13} + 0.5 {}^o M_2 d_{11} \quad (11-3)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= -EI_2 U_z''' - EI_{2\phi} \theta''' - \rho\omega^2 I_2 U_z' - \rho\omega^2 I_{2\phi} \theta' + {}^o F_1 U_z' - {}^o M_3 \theta' \\ &= -EI_2 d_{10} - EI_{2\phi} d_{14} - \rho\omega^2 I_2 d_8 - \rho\omega^2 I_{2\phi} d_{12} + {}^o F_1 d_8 - {}^o M_3 d_{12} \end{aligned} \quad (11-4)$$

$$M_2 = EI_2 U_z'' + EI_{2\phi} \theta'' + 0.5 {}^o M_3 \theta = EI_2 d_9 + EI_{2\phi} d_{13} + 0.5 {}^o M_3 d_{11} \quad (11-5)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI_\phi \theta''' + GJ\theta' - EI_{3\phi} U_y''' - EI_{2\phi} U_z''' - \rho\omega^2 I_\phi \theta' \\ &\quad - \rho\omega^2 I_{2\phi} U_z' - \rho\omega^2 I_{3\phi} U_y' + {}^o M_\rho \theta' - 0.5 {}^o M_2 U_y' - 0.5 {}^o M_3 U_z' \\ &= -EI_\phi d_{14} + GJd_{12} - EI_{3\phi} d_6 - EI_{2\phi} d_{10} - \rho\omega^2 I_\phi d_{12} - \rho\omega^2 I_{2\phi} d_8 \\ &\quad - \rho\omega^2 I_{3\phi} d_4 + {}^o M_\rho d_{12} - 0.5 {}^o M_2 d_4 - 0.5 {}^o M_3 d_8 \end{aligned} \quad (11-6)$$

$$\begin{aligned} M_\phi &= EI_\phi \theta'' + EI_{3\phi} U_y'' + EI_{2\phi} U_z'' \\ &= EI_\phi d_{13} + EI_{3\phi} d_5 + EI_{2\phi} d_9 \end{aligned} \quad (11-7)$$

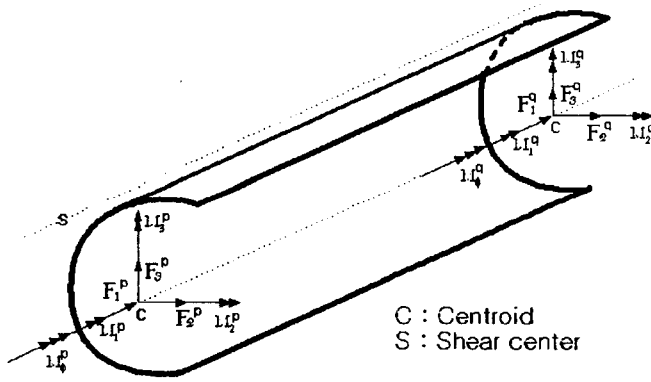


그림 3 박벽보 요소의 질점력

식(11)은 다음과 같이 행렬식으로 표현할 수가 있다.

$$\{f_i\} = [S_{ij}] \{d_j\} \quad (i=1\sim 7, j=1\sim 14) \quad (12)$$

여기서 $\{f_i\} = \{F_1, F_2, M_3, F_3, M_2, M_1, M_\phi\}^T$ 이고, 7×14 행렬, $[S]$ 의 각 요소는 다음과 같다.

	S1														
		S2	-S3					S4							-S5
			S3					S6		S5					
					S7		-S8		S9						-S10
						S8		S11		S10					
		S12		-S5		S13		-S10		S14					-S15
			S5				S10								S15

$$s_1 = EA, \quad s_2 = -\rho\omega^2 I_3 + {}^o F_1, \quad s_3 = EI_3, \quad s_4 = -\rho\omega^2 I_{3\phi} - {}^o M_2, \quad s_5 = EI_{3\phi}, \quad s_6 = 0.5 {}^o M_2$$

$$s_7 = -\rho\omega^2 I_2 + {}^o F_1, \quad s_8 = EI_2, \quad s_9 = -\rho\omega^2 I_{2\phi} - {}^o M_3, \quad s_{10} = EI_{2\phi}, \quad s_{11} = 0.5 {}^o M_3$$

$$s_{12} = -\rho\omega^2 I_{3\phi} - 0.5^\circ M_2, \quad s_{13} = -\rho\omega^2 I_{2\phi} - 0.5^\circ M_3, \quad s_{14} = GJ - \rho\omega^2 I_\phi + {}^\circ M_\rho, \quad s_{15} = EI_\phi$$

그 외의 요소는 모두 0이다. 요소의 절점변위를 나타내는 식(10)을 식(12)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에서 박벽보 요소에 대한 절점력과 절점변위와의 관계식을 구할 수가 있다.

$$\{f\} = [S][X][\hat{X}]^{-1}\{u\} \quad (13)$$

결국, 박벽 직선 보의 요소 강도행렬 $[K]$ 을 다음과 같다.

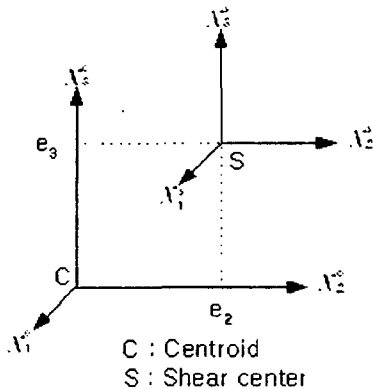
$$[K]_{7 \times 14} = [S][X][\hat{X}]^{-1} \quad (14)$$

식(14)의 $[K]$ 은 7×14 행렬이며, 이를 보 양단($x = 0, L$)의 14×14 행렬로 확장하면 다음과 같이 비 대칭 박벽 직선보의 자유진동 해석을 위한 동적 요소 강도행렬을 구할 수가 있다.

$$[K]_{14 \times 14} = \begin{bmatrix} -[S][X(0)][\hat{X}]^{-1} \\ [S][X(L)][\hat{X}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

4. 수치해석

본 연구에서 제안한 직선 박벽보에 대한 동적 강도행렬의 정확성을 검증하기 위하여 다음과 같은 2축대칭, 1축대칭 그리고 비대칭 단면을 가지는 단순지지 박벽보에 대한 자유진동 해석을 수행하였다.



$$E = 1000000.0 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 500000.0 \text{ kg/cm}^2,$$

$$A = 30.0 \text{ cm}^2, \quad J = 10.0 \text{ cm}^4, \quad I_o = 900.0 \text{ cm}^4,$$

$$I_2 = 100.0 \text{ cm}^4, \quad I_3 = 800.0 \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 83750.0 \text{ cm}^4,$$

$$I_{2\phi} = 600.0 \text{ cm}^4, \quad I_{3\phi} = -8000.0 \text{ cm}^4,$$

$$\rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3, \quad \text{length} = 100.0 \text{ cm}$$

그림 4 박벽보 단면의 도심과 전단중심

표 1 고유진동수 f_n (Hz)

mode	(2축대칭단면) $e_2 = 0 \text{ cm}, e_3 = 0 \text{ cm}$		(1축대칭단면) $e_2 = 6 \text{ cm}, e_3 = 0 \text{ cm}$	
	Present Study	Analytic solution	Present Study	Analytic solution
1	3.23156	3.23156	2.30302	2.30302
2	4.26776	4.26776	5.97670	5.97670
3	9.03704	9.03704	9.03709	9.03709

mode	(1축대칭단면)		(비대칭단면)	
	$e_2 = 0\text{ cm}, e_3 = 10\text{ cm}$		$e_2 = 6\text{ cm}, e_3 = 10\text{ cm}$	
	Present Study	Analytic solution	Present Study	Analytic solution
1	2.01138	2.01138	1.72365	1.72365
2	3.23156	3.23156	3.71945	3.71945
3	18.4045	18.4045	18.6261	18.6261

5. 결 론

- 1) 4계 상미분 연립방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1계 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용하여 엄밀한 동적 강도행렬을 유도하였다.
- 2) Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 도입하여 구한 요소 강도행렬과는 달리, 본 연구에서 유도한 동적 강도행렬은 박벽 뼈대구조를 해석할 경우에 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.
- 3) 동적 강도행렬로부터 단순지지 보의 고유진동수를 구하고, 해석해와 비교하였다. 해석 결과에서 보는 바와 같이, 2축 대칭, 1축 대칭, 비대칭 박벽보의 고유진동수는 해석해와 일치함으로써 본 연구에서 제시한 동적 강도행렬의 정확성을 입증하였다.
- 4) 이와 유사한 과정을 통하여 비대칭 박벽보 요소의 좌굴해석을 위한 정적 강도행렬을 구할 수가 있으며, 이러한 엄밀한 강도행렬은 교량이나 철도레일 등 보요소로 모델링이 가능한 구조물의 정·동적 해석에 유용하게 이용할 수 있으리라 판단된다.

참고문헌

1. Banerjee, J. R. 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements,' *Int. j. numer. methods eng.* 1989, **28**, pp.1283-1298
2. Barsoum, R. W. and Gallagher, R. H. 'Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems', *Int. J. Num Meth Engng.* 1970, **2**, pp.335-352
3. Friberg, P. O. 'Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams,' *Int. j. numer. methods eng.* 1985, **21**, pp.1205-1228
4. Kim, M. Y., Chang, S. P. and Kim, S. B. 'Spatial stability analysis of thin-walled space frames', *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1996, **39**, pp.499-525
5. Kim, S. B., 'Spatial Stability and Free Vibration Analysis of Shear Deformable Thin-walled Space Frames and Circular Arches', *Phd Thesis, Seoul National University.*, 1995, pp.75-77
6. Kim, S. B. and Kim, M. Y. 'Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames,' *Engng. Struct.* 1999, pp.446-458
7. Vlasov, V. Z. *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961
8. IMSL. Library, *Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming*, IMSL Inc., Houston, 1984