

TSK퍼지시스템을 이용한 적응퍼지제어기

Adaptive Fuzzy Controller by using TSK fuzzy system

장용줄*, 오갑석**, 이원창*, 강근택*

Yong Jool Jang, Kabsuk Oh*, Wonchang Lee*, Geuntaek Kang*

*부경대학교 전자공학과, **동명대학 전자계산과

*Pukyong National University, **Tong Myong College

Abstract

본 논문에서는 퍼지규칙의 수가 적고, 결론부가 선형식으로 표현되는 TSK퍼지시스템을 이용한다. 본 논문에서 제안되는 적응제어 방법은 규범모델 적응제어 기법을 응용한 것으로 Lyapunov함수를 이용하여 안정성문제를 해결하면서 동시에 최적의 적응법칙을 유도 할 수 있도록 설계되었다. 그리고 역진자 시스템에 대해서 시뮬레이션을 통해 제안된 적응 퍼지제어기의 설계 방법이 유효함을 보인다.

I. 서론

일반적으로 퍼지제어 기법은 시스템을 물리적으로 해석하여 구하는 수식모델이 매우 복잡하거나 구하기 어려울 때 매우 유용한 제어기법으로 한번 규칙이 정해지면 파라미터들이 고정되므로 시스템의 동적 변화가 없거나 적은 경우에는 제어기 자체의 강건성에 의해 요구된 성능을 나타내지만 시스템 파라미터에서 불확실성이 큰 경우나 동적 변화가 큰 경우에는 적응능력에 문제점을 나타내어 예상한 결과를 얻을 수 없다. 이러한 적응능력에서의 단점을 극복하기 위해 많은 적응제어 기법들이 제안되어왔다. Procyk와 Mamdani는 자기구성 퍼지제어기를 제안하였는데, 이러한 적응제어 기법들은 모델의 구성없이 입출력 데이터를 통하여 제어규칙 파라미터들을 자동 생성하도록 고안되었다. 반면 Wang 등은 규범모델에 근거하여 다음 제어상태를 예측하는 규범모델 적응제어 기법을 제안하였다. 그리고 신경회로망이나 유전알고리즘 등을 이용하여 수치 데이터를 학습

하여 제어규칙을 만드는 방법과 고정규칙에서 퍼지 멤버십함수를 자기 조종하는 적응제어기법들이 활발히 연구되고 있다.

이러한 제어기법들은 퍼지 규칙의 결론부가 상수이거나 퍼지집합인 Mamdani에 의해 제안된 퍼지제어규칙을 이용하고, 숙련가의 경험에 의한 정성적 제어지식을 퍼지제어규칙에 직접 응용한 경우들이 대부분이다.

이와는 달리 퍼지규칙의 수가 상대적으로 적고, 결론부가 선형식으로 나타나는 TSK퍼지규칙들을 이용한 연구는 미비하다.^[1] 그래서 본 논문에서는 TSK퍼지규칙들을 이용한 적응퍼지제어기의 설계방법을 제안한다. TSK 퍼지제어기는 제어대상 시스템의 입출력 데이터로부터 모델링을 통해 TSK퍼지모델을 구하고, 그 모델로부터 TSK 퍼지제어규칙들을 설계하는 방법이다. 본 논문에서 제안하는 방법은 Wang이 제안한 규범모델 적응제어 기법을 응용한 것으로 Lyapunov 함수를 이용하여 안정성문제를 해결하면서 동시에 최적의 적응법칙을 유도 할 수

있도록 설계하였다. 그리고 이 방법의 타당성을 검증하기 위해 역진자 시스템에 대해서 시뮬레이션을 하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. II장에서는 규범모델 적응퍼지제어기를 설계하는 방법에 대해 설명한다. III장에서는 제안한 규범모델 적응퍼지제어기의 타당성을 입증하기 위해 시뮬레이션을 행하고, 그 결과를 보인다. 마지막으로 IV장에서 결론을 맺는다.

II. 규범모델 적응퍼지제어기의 설계

본 논문에서 제안하는 규범모델 적응퍼지제어기는 우선적으로 제어대상시스템에 대한 TSK퍼지모델을 구하고, 그 모델로부터 TSK퍼지제어규칙의 초기 파라미터를 구하여 초기 TSK퍼지제어기를 설계하고, 시스템의 출력이 규범모델의 출력에 추종하도록 퍼지제어규칙의 파라미터를 직접 조정하는 방법이다.

1. TSK퍼지제어기의 설계

제어대상 플랜트가 식 (4)와 같이 미분방정식으로 기술된 n 차 비선형 시스템이라고 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 f 와 g 는 비선형이고, 알려지지 않은 함수이다. 그리고 가제어성 때문에 $g(x) \neq 0$ 이어야 한다. u 는 플랜트 입력이고, y 는 플랜트 출력이다. 그리고, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$ 는 시스템의 상태벡터이며 측정 가능하다고 하자.

먼저 식 (1)의 시스템의 입출력 데이터로부터 다음과 같은 TSK퍼지모델이 만들어졌다고 하자.

$$\begin{aligned} \text{If } z_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_n \text{ is } F_n^i \\ \text{Then } y' = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u \end{aligned} \quad (2)$$

위의 TSK퍼지모델로부터 TSK퍼지제어기를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{If } z_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_n \text{ is } F_n^i \\ \text{Then } u^i = c_m^i y_m + c_0^i + c_1^i x_1 + \dots + c_n^i x_n \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $c_m^i = \frac{1}{b^i}$, $c_0^i = \frac{(-a_0^i)}{b^i}$, $c_1^i = \frac{(-a_1^i)}{b^i}$, \dots , $c_n^i = \frac{(-a_n^i)}{b^i}$ 이며, y_m 은 원하는 플랜트

출력이다.

식 (3)과 같은 퍼지규칙들로 구성된 퍼지제어기로부터 추론되는 제어입력을 u_f 라 두면, u_f 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i u^i}{\sum_{i=1}^r w^i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i (c_m^i y_m + c_0^i + c_1^i x_1 + c_2^i x_2 + \dots + c_n^i x_n)}{\sum_{i=1}^r w^i} \\ &= \frac{w^1 c_m^1 y_m}{\sum_{i=1}^r w^i} + \frac{w^1 c_0^1}{\sum_{i=1}^r w^i} + \frac{w^1 c_1^1 x_1}{\sum_{i=1}^r w^i} + \dots + \frac{w^r c_n^r x_n}{\sum_{i=1}^r w^i} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 r 은 퍼지규칙의 갯수이다.

시스템의 출력이 규범모델의 출력에 추종하고, 또 시스템의 변화에도 퍼지제어기가 적응하도록 제어기의 파라미터 $c_m^i, c_0^i, c_1^i, \dots, c_n^i$ 를 조정하는 알고리즘을 본 연구에서 제안한다.

실시간에 조정 가능한 적응 파라미터들을 분리하여 제어입력 u_f 를 벡터형태로 표현하면 식 (5)과 같다.

$$u_f = u_f(x|\theta) = \theta^T \phi(x) \quad (5)$$

여기서 $\theta = (c_m^1, c_0^1, c_1^1, \dots, c_n^1)^T \in R^{(n+2)r}$ 이며 적응파라미터이다. 그리고,

$$\phi(x) = \left[\frac{w^1 y_m}{\sum_{i=1}^r w^i}, \frac{w^1}{\sum_{i=1}^r w^i}, \frac{w^1 x_1}{\sum_{i=1}^r w^i}, \dots, \frac{w^r x_n}{\sum_{i=1}^r w^i} \right]^T \in R^{(n+2)r}$$

이다.

2. 적응법칙의 설계

식 (1)의 제어시스템에서 f 와 g 가 알려진 함수라면, 간단히 제어기를 작성할 수 있을 것이다. 즉, 비선형성이 없어지도록 선형제어이론을 적용하여 이상적인 제어기 u^* 를 다음과 같이 설계할 수 있을 것이다.

먼저 $e = y_m - y = y_m - x$, $e = (e, \dot{e}, \ddot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T$

라 두고, 다항식 $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n = 0$ 의 모든 근들이 복소평면의 왼쪽면에 존재하도록 하는 $k = (k_n, \dots, k_1)^T$ 가 주어지면 이상적인 제어기 u^* 는 다음 식과 같이 구해진다.

$$u^* = \frac{1}{g(x)} [-f(x) + y_m^{(n)} + k^T e] \quad (6)$$

실제로는 제어기를 식 (5)의 퍼지제어기 $u_f(x|\theta)$ 를 사용하므로, 식 (6)에서 얻어진 $f(x) = y_m^{(n)} + k^T e - g(x)u^*$ 와 $u = u_f$ 를 식 (1)

에 대입하면 다음의 에러방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}^{(n)} = -k^T e + g(x)[u^* - u_f(x|\theta)] \quad (7)$$

식 (7)의 에러 방정식을 벡터형태로 쓰면,

$$\frac{de}{dt} = Ae + b[u^* - u_f(x|\theta)] \quad (8)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -k_1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$

이다.

퍼지제어기의 최적 파라미터 θ^* 를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in R^{(n+2)}} \left[\sup_{x \in R^n} |u_f(x|\theta) - u^*| \right] \quad (9)$$

퍼지제어기가 가질 수 있는 최소 에러 α 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = u_f(x|\theta^*) - u^* \quad (10)$$

식 (10)과 식 (5)를 이용하여 식 (8)의 에러 방정식을 다시 쓰면

$$\frac{de}{dt} = Ae + b(\theta^* - \theta)^T \phi(x) - b\alpha \quad (11)$$

Lyapunov 안정성 판별법을 이용하여 퍼지제어기 파라미터 θ 의 적응법칙을 다음과 같이 만든다. 먼저 Lyapunov 함수 후보를 다음과 같이 선택한다.

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{g(x)}{2\gamma} (\theta^* - \theta)^T (\theta^* - \theta) \quad (12)$$

여기서 γ 는 양의 상수이고, P 는 다음의 Lyapunov 방정식을 만족하는 positive definite행렬이다.

$$A^T P + P A = -Q \quad (13)$$

여기서 Q 는 임의의 $n \times n$ positive definite 행렬이고, A 는 식 (8)에 주어져 있다.

V 의 시간미분 $\frac{dV}{dt}$ 를 식 (11)와 식 (13)을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b [(\theta^* - \theta)^T \phi(x) - \alpha] - \frac{g(x)}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \frac{d\theta}{dt} \quad (14)$$

P 의 마지막 열을 p_n 이라 하고, $b = (0, \dots, g(x))^T$ 을 이용하면 $e^T P b = e^T p_n g(x)$ 가 되며 식 (14)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{g(x)}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T [\gamma e^T p_n \phi(x) - \frac{d\theta}{dt}] - e^T p_n g(x) \alpha \quad (15)$$

만약 적응법칙을 다음과 같이 선택하면,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e^T p_n \phi(x) \quad (16)$$

\dot{V} 는 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} e^T Q e - e^T p_n g(x) \alpha \quad (17)$$

여기서 Lyapunov방법에 따라서 $\frac{dV}{dt} < 0$ 되도록 해야한다. Q 가 Positive definite이므로 $-\frac{1}{2} e^T Q e < 0$ 이며, 다음 식이 만족되면 $\frac{dV}{dt} < 0$ 가 되어 V 를 최소화시킬 수 있다.

$$|e^T p_n g(x) \alpha| < \frac{1}{2} e^T Q e \quad (18)$$

퍼지제어기 출력 u_f 가 이상적인 제어기 u^* 에 충분히 접근하면 α 가 매우 작아 식 (18)을 만족할 수 있다. 이를 위해서는 퍼지제어기 초기 파라미터를 결정하는 식 (2)의 TSK퍼지모델의 오차가 매우 작도록 작성하여야 한다.

III. 시뮬레이션 및 고찰

1. 제어 대상시스템

제어대상 시스템으로 Cart-pole 시스템을 이용하였다. 그 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \cos \theta \left(\frac{-u - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{m_c + m} \right)} \quad (19)$$

여기서 $g=9.8m/s^2$, $m_c=1.0kg$, $m=0.1kg$, $l=0.5m$ 라 두었다.

2. 적응퍼지제어기를 이용한 적응제어

식 (19)의 제어대상 시스템으로부터 입출력 데이터를 받아 TSK퍼지모델을 인식하였다. 인식된 퍼지모델은 다음과 같다.

- M¹: if $\theta(t)$ is F^1 then $\ddot{\theta}^1(t) = -30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t)$
- M²: if $\theta(t)$ is F^2 then $\ddot{\theta}^2(t) = -16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t)$
- M³: if $\theta(t)$ is F^3 then $\ddot{\theta}^3(t) = -6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t)$
- M⁴: if $\theta(t)$ is F^4 then $\ddot{\theta}^4(t) = 19.112\theta(t) - 2.027u(t)$
- M⁵: if $\theta(t)$ is F^5 then $\ddot{\theta}^5(t) = 6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t)$
- M⁶: if $\theta(t)$ is F^6 then $\ddot{\theta}^6(t) = 16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t)$
- M⁷: if $\theta(t)$ is F^7 then $\ddot{\theta}^7(t) = 30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t)$

위의 퍼지모델의 전체부 퍼지집합은 그림 1와 같다.

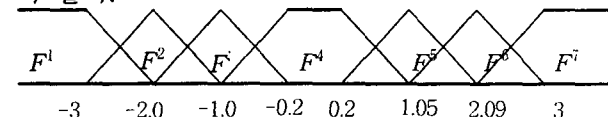


그림 1. 식 (20) 퍼지모델의 퍼지집합

식 (20)의 제어대상 시스템에 대한 TSK퍼지 모델로부터 식 (3)와 같은 형태로 퍼지제어기를 설계하면 다음과 같다.

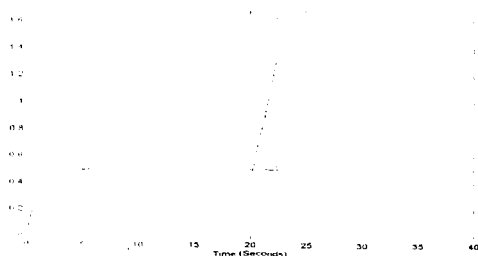
$$\begin{aligned}
 C^1: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^1 \text{ then } u^1(t) = 0.484y_m + 14.623 + 4.504\theta(t) \\
 C^2: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^2 \text{ then } u^2(t) = 1.011y_m + 16.484 - 0.404\theta(t) \\
 C^3: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^3 \text{ then } u^3(t) = -1.015y_m - 6.407 + 10.475\theta(t) \\
 C^4: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^4 \text{ then } u^4(t) = -0.493y_m + 9.429\theta(t) \quad (21) \\
 C^5: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^5 \text{ then } u^5(t) = -1.015y_m + 6.407 + 10.475\theta(t) \\
 C^6: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^6 \text{ then } u^6(t) = 1.011y_m - 16.484 - 0.404\theta(t) \\
 C^7: & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^7 \text{ then } u^7(t) = 0.484y_m - 14.623 + 4.504\theta(t)
 \end{aligned}$$

위 식 (21)의 파라미터들은 식 (5)의 파라미터 θ 의 초기파라미터로 하고, 적응 알고리즘을 시뮬레이션 하였다. 이때, 식 (8)에서의 $k_1=2$, $k_2=1$ 로 하였고, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ 로 하여 식 (13)에 대입하여 식 (12)의 P행렬을 구하면 다음과 같이 구하였다.

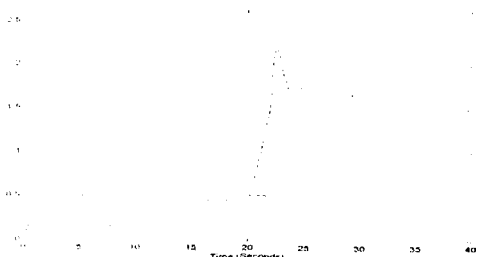
$$P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

규범모델의 출력을 $y_m(t) = 0.5$ 로 하고, m 과 m_c 의 값을 시스템 동작중에 변화시켰을 때의 시뮬레이션 결과는 다음과 같다.

그림 2의 (a)는 샘플시간 20에서 m 을 0.1kg에서 0.5kg로 변화시켰을 때의 적응제어 결과를



(a) 규범모델(실선)의 출력과 퍼지제어기(이중점선)와 적응퍼지제어기(점선)를 적용한 플랜트의 출력



(b) 규범모델(실선)의 출력과 퍼지제어기(이중점선)와 적응퍼지제어기(점선)를 적용한 플랜트의 출력

그림 2 m 과 m_c 변화에 따른 제어기의 출력비교

를 보여주고, 그림 2의 (b)는 샘플시간 20에서 m_c 를 1.0kg에서 1.5kg으로 변화시켰을 때의 적응제어 결과를 보여주고 있다. 그림 2의 결과는 적응이 없는 퍼지제어기로서는 시스템의 상태변화에 적응할 수 없음을 보여준다. 그러나 본 논문에서 제한한 규범모델 적응퍼지제어기는 시스템의 상태변화에 따라 규범모델의 출력을 성공적으로 추종함을 보여준다.

IV. 결론

본 논문에서는 시스템의 상태가 불명확하거나 시간에 따라 변화하는 경우에 사용될 수 있는 적응퍼지제어기의 설계방법을 제안하였다.

논문에서 제안한 적응퍼지제어기는 적은 규칙으로도 최상의 성능을 가지는 TSK퍼지규칙을 이용하였고, Lyapunov 안정성 이론을 이용하여 적응법칙을 설계하는 방법을 사용하였다. 본 논문에서 제안한 적응퍼지제어기는 규범모델의 출력을 시스템의 출력이 추종하도록 조정하는 규범모델 적응제어 기법을 응용한 규범모델 적응퍼지제어기이다.

제안한 적응퍼지제어기와 적응이 없는 퍼지제어기를 이용하여 시뮬레이션을 한 결과는 본 논문에서 제안한 규범모델 적응퍼지제어기가 적응이 없는 퍼지제어기에 비하여 시스템의 상태변화에 대해 성공적인 제어가 실행됨을 보여주었다.

참고문헌

- [7] G. Kang and W. Lee, "Design of Fuzzy Parameter Adaptive Controllers", in *Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress*, 1995, pp. 609-612.
- [8] K. Kiriakidis and A. Tzes, "Application of Implicit Self-Tuning Fuzzy control to Nonlinear Systems", in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1995, pp. 1419-1426.
- [11] L. X. Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 146-155, May, 1993
- [12] H. Butler, "Model Reference Adaptive Control: from Theory to Practice", *Prentice Hall*, 1992.