발란싱축소화로 구한 축소모델로부터 원 시스템 상태변수를 구하는 방법

Approximation of the State Variables of the Original System from the Balanced Reduced Model

정 광 영*

* 공주대학교 기계공학과(Tel : 81-041-850-8614; Fax : 81-041-854-1449 ; E-mail: kyjeong@knu.kongju.ac.kr)

Abstract : When the generalized singular perturbation method is used for model reduction, the state variables of the original system is reconstructed from the reduced order model. The state reduction error is defined, which shows how well the reconstructed state variables approximate the state variables of the original system equation.

Keywords : Balancing Reduction, Balanced Coordinates, State Reduction Error

1. 서론

수백 수천의 상태변수를 갖는 시스템을 제어하는 경우 LQG제어기와 같이 시스템과 같은 차수를 갖는 제어기를 사용하는 것이 실용적이지 못하기 때문에 모델축소화방법이 제어 분야에서 흔히 쓰인다. Moore[2]가 소개한 발란싱 축소화 방법은 주어진 시스템의 상태변수를 가제어성과 가관측성이 같아지는 발란싱좌표계로 변환시켜서 가제어성과 가관측성이 작은 상태변수들을 없애고 축소화 모델을 얻는다. Moore의 이 방법은 고주파수에서는 오차가 작으나 저주파수에서는 오차가 크다는 단점이 있어서 저주파수에서 오차를 줄이는 Singular Perturbation(SP) 방법이 제시되었다. 이 방법을 따르면 DC 이득이 0이 되는 축소모델을 얻을 수 있으며 어느 특정주파수 입력에 대한 오차를 줄이기 위한 목적으로 Generalized Singular Perturbation(GSP) 방법[5]이 제시되었다.

발란싱축소화로 얻어진 축소 모델은 가제어성과 가관측성이 큰 상태변수들을 갖고 있으나 이 축소 모델의 상태변수들은 원 시스템의 상태변수들에 대한 정보를 갖고 있지 못하다. 축소된 모델을 좌표변환하여 축소된 모델을 원시스템의 상태변수로 나타내는 방법[6]이 제시되었는 데 이 방법은 Moore의 축소방법에만 국한되어 있다. 본 논문은 이 방법을 일반화하여 GSP 방법으로 얻은 축소모델에서 원 시스템의 상태변수를 재구성하는 방법을 제시한다.

2. 축소화 모델에서 원상태변수를 구하는 방법

안정된 선형 시불변 시스템이 다음과 같이 주어지고 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $A \in R_{nxn}$, $B \in R_{nxp}$, $C \in R_{mxn}$, $D \in R_{mxp}$의 차원을 갖는다. 이 시스템의 제어 그래미안과 관측 그래미안은 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 만족시킨다.

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 \tag{2}$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \tag{3}$$

시스템 (A, B, C, D)가 가제어하고 가관측하다고 가정하면 이 시스템을 발란싱좌표계로 변환시키는 변환행렬 P를 찾을 수 있다.[2] 즉,

$$x = P\bar{x} \tag{4}$$

에 의해

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{B}u\ ,\quad y = \bar{C}\,\bar{x} + Du \tag{5}$$

가 되며

$$\bar{A} = P^{-1}AP,\ \bar{B} = P^{-1}B,\ \bar{C} = CP \tag{6}$$

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = diag\ \{\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\ \} \tag{7}$$

$$(\quad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n > 0\quad)$$

발란싱 좌표계에서는 식 (7)처럼 제어 그래미안과 관측 그래미안이 같은 대각행렬이 되며 그래미안의 대각성분을 Hankel 특이값이라 한다. 식 (5)를 큰 Hankel 특이값에 대응하는 상태변수 벡터 $\bar{x}_r$과 나머지 상태변수 벡터 $\bar{x}_{n-r}$로 분해하여 나타내면,

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \tag{8}$$

$$y = (\ \bar{C}_1\quad \bar{C}_2) \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{n-r} \end{pmatrix} + Du \tag{9}$$

GSP 방법을 사용하면 $\dot{\bar{x}}_{n-r} = \alpha\,\bar{x}_{n-r}$로 놓고 식 (8)에서

$$\bar{x}_{n-r} = (\alpha I - \bar{A}_{22})^{-1}\bar{A}_{21}\,\bar{x}_r + (\alpha I - \bar{A}_{22})^{-1}\bar{B}_2 u \tag{10}$$

이므로 축소모델은 다음과 같이 정리된다.[5]

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_r &= (\ \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\alpha I - \bar{A}_{22})^{-1}\bar{A}_{21})\,\bar{x}_r \\ &\quad + (\ \bar{B}_1 + (\alpha I - \bar{A}_{22})^{-1}\bar{B}_2)\,u \\ &= \bar{A}_r\,\bar{x}_r + \bar{B}_r u \end{aligned} \tag{11}$$