두 가지 불완전수리모형의 최적화

이의용[1], 최승경*[2]

요 약

Brown과 Proschan의 수리모형과 이를 일반화한 Lee와 Seoh의 시스템 수리모형이 고려된다. Brown과 Proschan의 수리모형은 시스템의 고장시 완전수리가 확률 p로, 불완전수리가 확률 $1-p$로 이루어지는 모형이고, Lee와 Seoh의 수리 모형은 시스템 고장시 완전수리와 불완전수리의 선택이 마르코프 연쇄과정에 따라 결정되는 모형이다. 본 논문에서는, 완전수리비용과 불완전수리비용을 고려한 후, 시스템의 수명분포가 지수분포, 균일분포, Weibull분포인 경우로 나누어, 위 두 시스템 수리모형에서의 최적화가 연구된다.

1. 서 론

Brown과 Proschan(1983)은 불완전수리모형을 소개했고, 이 불완전수리모형을 일반화한 것이 Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형이다. Brown과 Proschan(1983)의 불완전수리모형은 시스템의 고장시 완전수리가 확률 p, 불완전수리가 확률 $1-p$로 이루어지는 모형이다. 만약 시스템의 수명분포를 F라고 하면, 시간 t 에서 불완전수리 후 다음 고장이 발생할 때까지의 시스템의 고장시간(failure time)의 분포는 다음과 같다.

$$\overline{F}(x \mid t) = \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}, \qquad x > 0.$$

Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형은 시스템의 고장시 완전수리와 불완전수리의 선택이 마르코프 연쇄과정에 따라 결정되는 모형이다. 즉, 새로운 시스템으로 출발한 후, 시스템의 수리는 아래와 같은 추이확률행렬(transition probability matrix)에 따라 결정된다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \end{array}$$

여기서 '0'은 완전수리, '1'은 불완전수리이고, $0 \le \alpha, \beta \le 1$ 이다. 만약 $\alpha = 1-\beta = p$ ($0 \le p \le 1$)이면 Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형은 Brown과 Proshan(1983)의 불완전수리모형으로 축소된다.

본 논문 2장에서는 Borwn과 Proshan(1983)의 불완전수리모형에 완전수리비용 C_1, 불완전수리비용 C_2를 고려한 후, F가 DMRL(decreasing mean residual life)를 따르면 단위시간당 평균비

1) (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가 53-12, 숙명여자대학교 통계학과, 부교수
2) (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가 53-12, 숙명여자대학교 통계학과, 대학원생

용 $C(p)$를 최소화하는 유일한 p가 존재한다는 Lee와 Lee(1999)의 결과를 이용하여, F가 DMRL인 지수분포, 균일분포, Weibull분포일 때 단위시간당 평균비용 $C(p)$를 최소화하는 유일한 p를 구하고, 3장에서는 Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형에 완전수리비용 C_1과 불완전수리비용 C_2고려한 후, 시스템의 수명분포가 지수분포, 균일분포, Weibull분포일 때 단위시간당 평균비용 $C(\alpha, \beta)$를 최소화하는 유일한 α, β를 구한다.

2. Brown과 Proschan의 불완전수리모형에서의 최적화

Brown과 Proschan(1983)의 불완전수리모형에서 완전수리비용을 C_1. 불완전수리비용을 C_2라고 하고, 단위시간당 평균비용을 구하면,

$$C(p) = \frac{pC_1 + (1-p)C_2}{p\mu(p)}, \qquad 0 < p \le 1$$

로 주어진다[Lee와 Lee(1999)]. 여기서 $\mu(p) = \int_0^\infty \overline{F}^{p}(t)\,dt$ 이고, 완전수리와 완전수리 사이의 평균시간을 나타낸다. $C(p)$의 분모를 $g(p)$, $C'(p)$의 분자를 $A(p)$로 놓고, $A(p)$를 구하면

$$A(p) = (C_1 - C_2)g(p) - g'(p)\{pC_1 + (1-p)C_2\}$$

이다. $A(p) = 0$인 p가 최소비용을 갖는 유일한 p가 된다. 이러한 사실은 Lee와 Lee(1999)에 의해서 밝혀졌다.

수명분포가 지수분포의 경우는 지수분포의 망각특성 때문에 완전수리후 고장시간의 분포와 불완전수리후 고장시간의 분포가 같다. 그래서 $C_1 > C_2$인 경우에는 시스템이 고장이 났을 때 불완전수리만 하는 $p=0$일 때 최적화가 이루어진다. 이때 최소비용은 $C(p) = \lambda C_2$이다. $C_1 \le C_2$일때는 시스템 고장시 완전수리만 하는 $p = 1$인 경우에 최적화가 이루어진다. 그리고 최소비용은 $C(p) = \lambda C_1$이 된다. 시스템의 수명분포가 균일분포, Weibull분포의 경우는 다음과 같다.

2.1 균 일 분 포

균일분포의 수명분포는 다음과 같다.

$$\overline{F}(t) = 1 - \frac{t}{a}, \qquad 0 < t < a.$$

이 수명분포는 시간이 갈수록 평균잔여수명이 작아지는 DMRL이다. 비용을 최소화하는 p를 구하기 위해서 필요한 값들을 구해보면 다음과 같다.

$$\mu(p) = \frac{a}{p+1} \quad ,$$

$$g(p) = p\mu(p) = \frac{pa}{p+1} \quad ,$$

$$g'(p) = \frac{a}{(p+1)^2} \quad ,$$

$$C(p) = \frac{p^2(C_1 - C_2) + pC_1 + C_2}{ap},$$

$$A(p) = \frac{a}{p+1}\left\{p(C_1 + C_2) - \frac{p}{p+1}(C_1 - C_2) - \frac{1}{p+1}C_2\right\}.$$

$A(p)=0$을 만족하는 p를 구하면

$$p = \sqrt{\frac{C_2}{C_1 - C_2}}$$

이 된다. p는 0과 1사이에 존재하는 값이므로 아래의 정리2.1을 얻을 수 있다.

<정리2.1>

i) $C_1 \le 2C_2$인 경우에는 시스템이 고장 났을 때 완전수리만 하는 $p=1$일 때 $C(p)$ 최소가 된다. 이 때 최소비용은 $C(p) = \frac{2C_1}{a}$ 이다.

ii) $C_1 > 2C_2$인 경우에는 시스템이 고장 났을 때 $p = \sqrt{\frac{C_2}{C_1 - C_2}}$ 비율로 완전수리를 하는 것이 최적이 된다. 이 때 최소비용은 $C(p) = \frac{C_1 + 2\sqrt{C_2(C_1 - C_2)}}{a}$ 이다.

2.2 Weibull 분 포

Weibull분포의 수명분포는 $b > 1$ 인 경우에 DMRL이 되고, 다음과 같다.

$$\overline{F} = e^{-at^b}, \quad t > 0, \quad b > 1.$$

비용을 최소화하는 p구하기 위해서 필요한 값들을 구해보면 다음과 같다

$$\mu(p) = \frac{\Gamma(\frac{1}{b})}{(pa)^{(\frac{1}{b})} b} \quad ,$$

$$g(p) = \frac{1}{b} p^{(1-\frac{1}{b})} a^{-\frac{1}{b}} \Gamma(\frac{1}{b}),$$

$$g'(p) = (1 - \frac{1}{b}) \frac{1}{b} p^{-\frac{1}{b}} a^{-\frac{1}{b}} \Gamma(\frac{1}{b}) \; ,$$

$$C(p)=\frac{(pa)^{-\frac{1}{b}} b\{pC_1+(1-p)C_2\}}{\Gamma(\frac{1}{b})p},$$

$$A(p)=\frac{1}{b}a^{-\frac{1}{b}}p^{-\frac{1}{b}}\Gamma(\frac{1}{b})\left\{p(C_1-C_2)-(1-\frac{1}{b})(pC_1+(1-p)C_2)\right\}.$$

$A(p)=0$을 만족하는 p를 구하면

$$p=\frac{(b-1)C_2}{C_1-C_2}$$

이 된다. p값은 0과 1사이에 존재하므로 아래의 정리2.2를 얻을 수 있다.

<정리2.2>

i) $C_1 \leq bC_2$인 경우에 시스템이 고장 났을 때 완전수리만 하는 $p=1$일 때 $C(p)$가 최소가 된다. 이 때 최소비용은 $C(p)=\frac{a^{-\frac{1}{b}}bC_1}{\Gamma(\frac{1}{b})}$ 이다.

ii) $C_1 > bC_2$인 경우에는 시스템이 고장 났을 때 $p=\frac{(b-1)C_2}{C_1-C_2}$ 비율로 완전수리를 하는 것이 최적이 된다. 이 때 최소비용은 $C(p)=\left(\frac{a(b-1)C_2}{C_1-C_2}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{b^2(C_1-C_2)}{\Gamma(\frac{1}{b})(b-1)}\right)$ 이다.

3. Lee와 Seoh의 불완전수리모형에서의 최적화

Lee와 Seoh(1999)의 불완전수리모형에서 완전수리가 있은 후 다음 완전수리가 발생할 때까지 생존함수와 이의 기대값은 다음과 같다.

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t)=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\right)\overline{F}(t)+\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)\overline{F}^{1-\beta}(t),$$
$$\mu=\left(\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\right)\mu(1)+\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)\mu(1-\beta).$$

완전수리비용을 C_1 , 불완전수리비용을 C_2라고 하자. 단위시간당 평균비용은 재생보상정리[Renewal Reward Theorem, Ross (1983 p.78)]에 의해 구해보면

$$C(\alpha,\beta)=\frac{(1-\beta)C_1+(1-\alpha)C_2}{(1-\beta)\mu(1)+(1-\alpha)g(1-\beta)}$$

로 주어진다. 여기서 $g(1-\beta)=(1-\beta)\{\mu(1-\beta)-\mu(1)\}/\beta$ 이다. Lee와 Seoh(1999)는 α와 β를

동시에 통제할 때 시스템 수명분포가 DMRL이면 $C(\alpha,\beta)$의 최소비용이 $C(1,\beta)=C_1/\mu(1)$ 또는 $C(0,\beta^*)$로 주어짐을 보였다. 여기서 β^*는 아래 방정식을 만족하는 유일한 값이다.

$$C_2\mu(1)-C_1g(1-\beta)+\{(1-\beta)C_1+C_2\}g'(1-\beta)=0. \tag{3.1}$$

수명분포가 지수분포인 경우는 $C_1 > C_2$ 일 때 $\alpha=0,\beta=1$에서 최소비용 $C(0,1)=\lambda C_2$를 갖고, $C_1 \le C_2$일 때는 $\alpha=1$에서 최소비용 $C(1,\beta)=\lambda C_1$을 갖는다. 여기서 β의 값은 완전수리만 이루어지므로 그 의미가 없어진다. 시스템의 수명분포가 균일분포, Weibull분포인 경우는 다음과 같다.

3.1 균 일 분 포

균일분포에서 완전수리후 다음 완전수리까지의 생존함수는

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t)=\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}(1-\frac{t}{a})+\frac{1-\alpha}{\beta}(1-\frac{t}{a})^{(1-\beta)}$$

이다. 최소비용을 갖는 유일한 α,β를 구하기 위해서 필요한 값들을 구해보면 다음과 같다.

$$\mu(1)=\frac{a}{2},$$

$$\mu(1-\beta)=\frac{a}{2-\beta},$$

$$g(1-\beta)=\frac{1-\beta}{\beta}(\frac{a}{2-\beta}-\frac{a}{2})=\frac{(1-\beta)a}{2(2-\beta)},$$

$$g'(1-\beta)=\frac{a}{2(2-\beta)},$$

$$C(\alpha,\beta)=\frac{2(2-\beta)\{(1-\beta)C_1+(1-\alpha)C_2\}}{a(1-\beta)(3-\alpha-\beta)}.$$

시스템 수명분포가 균일분포인 경우에 (3.1)을 만족하는 β^*값을 구해보면

$$\beta^*=\frac{(C_1-2C_2)-\sqrt{C_2(2C_1-C2)}}{C_1-C_2}$$

가 된다. β^*는 0과 1사이에 존재하는 값이고, 이 때 $C(1,\beta)$와 $C(0,\beta^*)$를 비교하면 다음 정리 3.1를 얻을 수 있다.

<정리3.1>

i) $C_1 \le 2C_2$인 경우에는 시스템이 고장이 났을 때 완전수리만하는 $\alpha=1$일 때 최소가 된다. 여기서 β값은 완전수리만 이루어지므로 그 의미가 없어진다. 이 때 최소비용은 $C(1,\beta)=\dfrac{C_1}{\mu(1)}=\dfrac{2C_1}{a}$ 이다.

ii) $2C_2 < C_1 \leq 5C_2$인 경우에는 시스템이 고장났을 때 완전수리와 불완전수리를 교대로 하는 $\alpha=0, \beta=0$일 때 최소비용을 갖는다. 이 때 최소비용은

$C(0,0)=\dfrac{4(C_1+C_2)}{3a}$ 이다.

iii) $C_1 > 5C_2$인 경우에는 $\alpha=0$, $\beta^*=\dfrac{(C_1-2C_2)-\sqrt{C_2(2C_1-C2)}}{C_1-C_2}$ 에서 최적이 된다. 이 때

최소비용은 $C(0,\beta^*)=\dfrac{(2C_1-C_2)\{C_2\sqrt{C_2(2C_1-C_2)}+2C_1C_2\}+C_1^2\sqrt{C_2(2C_1-C_2)}}{a\{C_2(2C_1-C_2)+C_1\sqrt{C_2(2C_1-C_2)}\}}$ 이다.

3.2 Weibull 분 포

Weibull분포에서 완전수리후 다음 완전수리까지의 생존함수는

$$\overline{F}_{\alpha,\beta}(t)=\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}(e^{-at^b})+\frac{1-\alpha}{\beta}(e^{-(1-\beta)at^b})$$

이다. 최소비용을 갖는 유일한 α,β를 구하기 위해서 필요한 값들을 구해보면 다음과 같다.

$$\mu(1)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})}{ba^{1/b}},$$

$$\mu(1-\beta)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})}{b\{(1-\beta)a\}^{1/b}},$$

$$g(1-\beta)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})\{(1-\beta)^{1-1/b}-(1-\beta)\}}{\beta ba^{1/b}},$$

$$g'(1-\beta)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})\left\{(1-\frac{1}{b})(1-\beta)^{-1/b}+\frac{1}{b}(1-\beta)^{1-1/b}-1\right\}}{\beta^2 ba^{1/b}},$$

$$C(\alpha,\beta)=\frac{\beta ba^{1/b}\{(1-\beta)C_1+(1-\alpha)C_2\}}{\Gamma(\frac{1}{b})(1-\beta)\{\beta+(1-\alpha)(1-\beta)^{-1/b}-(1-\alpha)\}}.$$

시스템의 수명분포가 Weibull분포의 경우에 (3.1)의 좌변을 $B(\beta)$라 하면 다음과 같이 구해진다.

$$B(\beta)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})[\beta^2C_2-\beta(1-\beta)C_1\{(1-\beta)^{-1/b}-1\}]}{\beta^2 ba^{1/b}}+\frac{\Gamma(\frac{1}{b})\left[\{(1-\beta)C_1+C_2\}\left\{(1-\frac{1}{b})(1-\beta)^{-1/b}+\frac{1}{b}(1-\beta)^{1-1/b}-1\right\}\right]}{\beta^2 ba^{1/b}}.$$

$B(\beta)$는 [0,1]에서 증가함수이므로, $\lim_{\beta\to 0}B(\beta) > 0$이면 $B(\beta)=0$을 만족하는 β^*는 [0,1]에서 존재하지 않고 $\lim_{\beta\to 0}B(\beta) \le 0$이면 $B(\beta)=0$를 만족하는 β^*가 [0,1]에서 유일하게 존재함을 알 수 있다. $\lim_{\beta\to 0}B(\beta)$의 값을 구하기 위해 L' Hopital' s rule을 두 번 적용하면

$$\lim_{\beta\to 0}B(\beta)=\frac{\Gamma(\frac{1}{b})\left[C_1\left\{(\frac{1}{b}-1)(-2-\frac{1}{b})-2\right\}+C_2\left\{(1-\frac{1}{b})\frac{1}{b}+2\right\}\right]}{2ba^{1/b}}$$

이 된다. 즉 $C_1 > (2b-1)C_2$의 경우 $\lim_{\beta\to 0}B(\beta) \le 0$이 된다. 이 사실과 함께 우리는 $C(1,\beta)$와 $C(0,\beta^*)$를 비교하면 다음 정리3.2를 얻을 수 있다.

<정리3.2>

i) $C_1 \ge bC_2$인 경우에는 시스템이 고장이 났을 때 완전수리만하는 $\alpha=1$일 때 최소가 된다. 여기서 β값은 완전수리만 이루어지므로 그 의미가 없어진다. 이 때 최소비용은 $C(1,\beta)=\dfrac{C_1ba^{1/b}}{\Gamma(\frac{1}{b})}$ 이다.

ii) $bC_2 < C_1 \le (2b-1)C_2$인 경우에는 시스템이 고장났을 때 완전수리와 불완전수리를 교대로 하는 $\alpha=0, \beta=0$일 때 최소비용을 갖는다. 이 때 최소비용은 L' Hopital' s rule을 한 번 적용하여 $C(0,0)=\dfrac{ba^{1/b}(C_1+C_2)}{\Gamma(\frac{1}{b})(\frac{1}{b}+1)}$ 이 됨을 알 수 있다.

iii) $C_1 > (2b-1)C_2$인 경우에는 $\alpha=0, \beta=\beta^*$ $(0<\beta^*<1)$에서 최소비용을 갖는다. β^*는 다음을 만족하는 유일한 값으로 이론적으로 구하기는 불가능하지만, 수치해석적인 방법으로는 쉽게 구할 수 있다.

$$\beta^2C_2-\beta(1-\beta)C_1\{(1-\beta)^{-1/b}-1\}+$$
$$\{(1-\beta)C_1+C_2\}\left\{(1-\frac{1}{b})(1-\beta)^{-1/b}+\frac{1}{b}(1-\beta)^{1-1/b}-1\right\}=0$$

[참고문헌]

[1] Brown, M. and Proschan, F. (1983), Imperfect Repair, Journal Applied Probability, Vol. 20, pp. 851-859.

[2] Lee, E. Y. and Lee, J. (1999), An Optimal Propotion of Perfect Repair, Operations Research Letters, Vol. 25, pp. 147-148.

[3] Lee, E. Y. and Seoh, M. (1999), A Repair Process with Embedded Markov Chain, Journal of the Korean Statistical Society, Vol. 28:4, pp. 515-522.

[4] Ross, S. M. (1983). Stochastic Processes, Wiley, New York.