

## 1차원 압밀 F.D.M 해석의 최적도식(Scheme) 연구 Study for the Pertinent Scheme of the One Dimensional FDM Analysis

김팔규<sup>1)</sup>, Pal-Kyu Kim, 김지호<sup>2)</sup>, Ji-Ho Kim, 구기욱<sup>3)</sup>, Gi-Wuk Koo, 류권일<sup>4)</sup>, Kwon-Il Ryu

<sup>1)</sup> 충남대학교 공과대학 토목공학과 교수, Professor, Dept. of Civil Eng. Chung-nam Univ.

<sup>2)</sup> 충남대학교 토목공학과 석사과정, Master course, Dept. of Civil Eng. Chung-nam Univ.

<sup>3)</sup> (재)한국철도기술공사 부장, General manager, Korea Railroad Technical Corporation

<sup>4)</sup> 충남대학교 토목공학과 박사과정, Ph. D. Candidate, Dept. of Civil Eng. Chung-nam Univ.

**SYNOPSIS:** Pioneering work by Terzaghi imparted scientific and mathematical bases to many aspects of this subject and many people use this theory to measure the consolidation settlement until now. In this paper, Finite Difference Methods for consolidation are considered. First, it is shown the stability criterion of Explicit scheme and the Crank-Nicolson scheme, although unconditionally stable in the mathematical sense, produces physically unrealistic solutions when the time step is large. It is also shown that The Fully Implicit scheme shows more satisfactory behavior, but is less accurate for small time steps. and then we need to decide what scheme is more proper to consolidation. The purpose of this paper is to suggest the pertinent scheme to consolidation.

**Key Word :** Consolidation, Numerical analysis, Finite Differential Method, Explicit Scheme, Fully Implicit Scheme, Crank-Nicolson Scheme. stability, physical realistic solutions.

### 1. 서 론

압밀침하 해석에 대한 이상적인 양적접근은 Terzaghi(1923)에 의해 최초로 이루어졌으며, 이론적인 난점과 적용성의 한계에도 불구하고 각종공사실무에서 그의 이론이 많이 응용되고 있다. Terzaghi는 압밀현상의 해석을 위하여 지반의 비균질성, 시간의존성, 응력-변형율의 비선형성, 자중의 영향, 시간종속적인 경계조건, 2차 압밀등 여러 가지 현실에서의 요소들을 단순화하여 고려했으며, 실제 이러한 여건을 모두 고려한 실질적인 압밀해석은 매우 복잡하고 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위한 방법으로 최근 부각되는 방법은 컴퓨터를 이용한 수치 해석적 방법이 있으며 여러분야에 걸쳐 다양한 방법들이 활발하게 연구되고 있다. 수치해법은 물리현상을 수학적 모델로 해석하여 이를 수치적으로 예측하는 합리적인 방법이다. 그러한 방법중 압밀해석에 유용한 F.D.M(Finite Differential Method) 해석은 F.E.M(Finite Element Method) 해석에 비하여 경제적이고 단순하며, 정도(Accuracy)에는 큰 오차가 없다.

### 2. 압밀 방정식

토층의 단위요소로부터 간극수의 유출량과 시간에 따른 토층의 체적변화율이 같다고 가정하면 Terzaghi의 1차원 압밀 방정식은 다음과 같다. (Braja, M. Das., 1997)

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = C_v \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2}, \quad C_v = \frac{k}{m_v \cdot \gamma_w} \quad (1)$$

$u_e$  : 과잉간극수압  $\gamma_w$  : 물의 단위중량  $m_v$  : 체적변화율  $k$  : 투수계수

이러한 편미분 방정식은 압밀이라는 물리적 현상을 지배하는 법칙을 수식으로 표현한 방정식일 뿐이므로 이식에서 바로 간극수압이나 침하량을 구할수 있는 것은 아니다. 이 방정식은 초기조건과 경계조건을 가정하여 수학적인 엄밀해의 유도가 가능한 포물선형 압밀 미분방정식이며, 변수 분리법과 Fourier의 급수전개식을 이용한 수학적 방법으로 다음과 같은 엄밀해를 구하는 식을 구할수 있다. Terzaghi가 유도한 압밀 미분방정식은 형태상 포물선형 편미분 방정식의 형태를 갖고 있으며, Terzaghi는 이 공식의 수학적인 엄밀해를 반개층(half-closed layer)에 대하여 유도하였고, 개층(open layer)은 간단히 이를 확장하여 유도하였고, 간극수압과 평균압밀도의 식은 다음과 같다.

$$u_e(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v) \quad (2)$$

$$U_{av} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad (3)$$

위식에서 기호의 의미는 다음과 같다 (Terzaghi, 1943).

$u_e(z, t)$  : 깊이  $z$ , 시간  $t$ 일 때의 과잉간극수압,  $u_0$  : 초기 과잉간극수압,  $U_{av}$  : 평균압밀도

$M = (2m+1)\pi/2$ , ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ),  $H$ 는 배수거리.  $H/2$ ,  $T_v = \frac{C_v t}{H^2}$  : 시간계수

### 3. 유한차분법

#### 3.1 압밀방정식의 이산화와 유한차분법

질량보존법칙을 만족하는 압밀 미분방정식은 대상영역 전체를 지배함과 동시에 아주 작은 영역에서도 성립하는 관계식이다. 그러나 대부분의 물리현상이 이러한 수학적 공식화가 가능한 것은 아니며 설사 가능하다 하더라도 무한급수나 특수함수를 포함하는 해가 되므로 이러한 식으로 요구되는 해를 얻는 것은 무척 어려운 일이다. 이러한 난관을 극복하는데 있어서 컴퓨터는 아주 유용한 도구로서 부각되고 있다. 그러나, 컴퓨터 역시 구조적으로 편미분방정식을 해석적으로 풀 수 있는 것은 아니며, 때문에 무한히 많은 위치에서의 해석을 대신하여 필요한 유한개의 위치를 정하고, 간극수압을 시간과 깊이에 종속된 변수  $u_e(z, t)$ 로 취급하여, 이러한 미지수의 값을 구하게 된다. 이 과정은 연속적인 값을 갖는 물리량 대신 띄엄띄엄 존재하는 이산된 위치에서의 값을 미지값으로 하고, 이점들 사이의 관계를 주어진 지배방정식을 이용하여 어떤 대수식이나, 관계식의 형태로 유도하는 것이며, 이를 이산화라한다. 또, 이때 구해지게 되는 식을 이산화 방정식이라고 한다 (명현국, 1999).

유한 차분법은 각 미분항을 Taylor의 급수전개를 이용하여 3항 이상의 항은 생략하고 근사적으로 미분항의 값에 차분식을 근사시키는 수치해석법이다. 유한차분법의 도식에는 크게 양해법(Explicit Scheme)과 음해법(Implicit Scheme)이 있고, 음해법에는 Crank-Nicholson Scheme 과 Fully Imolcitic Scheme 그리고, Theta Scheme 이 있으며 Crank-Nicholson Scheme은 Theta Scheme의 일종이다. 이 논문에서는 음해법으로 전자의 두 가지를 다루었다. 각 도식은 다시 공간 격자점의 값을 구하려 할 때 이용하게 되는 시간값에 따라서 각각 양해법, Crank-Nicholson법, 완전음해법으로 구별할 수 있다.

### 3.2 양해법(Explicit Scheme)

#### 3.2.1 양해법의 근사방법

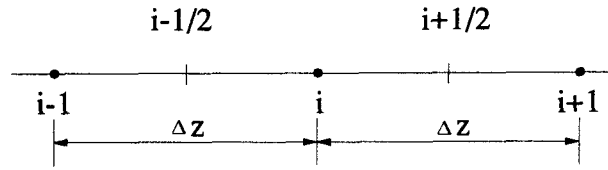


그림 1. 차분식의 개념

임의의 시간에서 그림 1.과 같이 미소 두께의 1차원의 공간을 가정하고, 격자 간격을 등 간격이라 하면  $i-1, i+1$ 점에서의 Taylor 급수전개는 다음과 같다.

$$u_{i-1} = u_i - (\Delta z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_i + \frac{1}{2!} \cdot (\Delta z)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_i - \frac{1}{3!} \cdot (\Delta z)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right)_i + \dots$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_i + \frac{1}{2!} \cdot (\Delta z)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_i + \frac{1}{3!} \cdot (\Delta z)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right)_i + \dots$$

위의 두 식에서 3항 이후는 생략하고 두 식을 더하면 공간에 대한 2차 미분항은 다음의 식이 된다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta z)^2} + e^0 \quad (4)$$

양해법에서는 시간에 대하여 현재시간  $j$ 에서  $\Delta t$ 후의  $j+1$ 의 값은 단지 현재의 값에 의해서 결정된다는 직관적인 원리를 갖고 있으며, 시간에 대한 차분식을  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$  라 하여, 1차원 압밀 방정식에 미분항을 차분항으로 대치하고, 정리하면, 다음의 순환방정식이 된다.

$$u_i^{j+1} = \alpha \cdot u_{i+1}^j + (1-2\alpha) \cdot u_i^j + \alpha \cdot u_{i-1}^j, \quad \alpha = \frac{C_v \Delta t}{(\Delta z)^2} \text{ (operator)} \quad (5)$$

#### 3.2.2 안정성 고찰

초기조건  $u_e(z, 0) = u_0$ 에서  $f(z_i) = u_i^0 \left( (i=0, 1, 2, 3, \dots, m), m = \frac{H_t}{\Delta z} \right)$ 으로 의  $u_i^1$  값을 구할 수 있다. ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ). 또한 경계조건에서  $u(0, t) = u(H_t, t) = 0$ 에 의해서  $u_0^j = u_m^j = 0$  이므로 모든  $i$ 점에서  $u_i^1$ 의 값을 구할수 있으며, 같은 방법으로 반복하여 다음 시간단계의 값을 구할수 있다. 이러한 관계를 행렬의 형태로 나타내면  $(m-1) \times (m-1)$ 의 행렬이 된다.

$$\begin{pmatrix} (1-2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & \dots & \cdot \\ 0 & \alpha & (1-2\alpha) & \alpha & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha & (1-2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

이러한 행렬을 간단히  $AU^j = U^{j+1}$  이라고 하자. 최초의 계산에서의 오차가  $e^0 (= e_1^0, e_2^0, \dots, e_{m-1}^0)$ 라고 하면,  $A[U^j + e^0] = AU^j + Ae^0$  이고, n시간 단계에서의 오차는  $A^n \cdot e^0$  이다. 절단오차는 분명히 0이 아니므로 오차가 확대되지 않기 위해서는 즉, 식이 안정되기 위해서는 모든 n값에 대해서,  $\|A^n \cdot e^0\| \leq \|e^0\|$  이어야 한다. 이는  $\|A\| \leq 1$ 을 의미한다. A의 고유값은  $1 - 4\alpha \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2$  이고, i가 ( $i=1, 2, \dots, m-1$ ) 일 때,  $\left|1 - 4\alpha \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2\right|$ 의 최대값은 1보다 작거나 같아야 한다.  $\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2$ 의 최대값은 1이므로  $\alpha$  값은 0.5보다 작아야 안정하게 된다.

### 3.3 Crank-Nicholson Scheme

#### 3.3.1 Crank-Nicholson의 근사해법

이 도식은 보다 시간에 의존하는 과정을 고려하기 위해, 현재의 값과 미래의 값이 선형적으로 변화한다는 가정을 전제로하여 두 값을 평균하여 계산하는 방법으로 차분화한 식을 살펴보면 다음과 같다.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} + \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta z)^2} \right] \quad (7)$$

우변을 j+1, 좌변을 j 항으로 정리하면,

$$-\frac{\alpha}{2} u_{i-1}^{j+1} + (1+\alpha)u_i^{j+1} - \frac{\alpha}{2} u_{i+1}^{j+1} = \frac{\alpha}{2} u_{i-1}^j + (1-\alpha)u_i^j + \frac{\alpha}{2} u_{i+1}^j \quad (8)$$

식(8)은 Crank-Nicholson 의 순환식이다.

#### 3.3.2 안정성 고찰

Crank-Nicholson Scheme의 오차는 미분 가능일 때  $O[\Delta z^2, \Delta t^2]$  이다. ( $j=1, 2, \dots, n$ )일 때 식 (8)은 행렬식으로 표현이 가능하며  $AU_i^{j+1} = BU_i^j$  이 된다. 그러므로 j+1의 값은  $U_i^{j+1} = A^{-1} \cdot BU_i^j$  와 같이 된다. A와 B를 행렬로 나타내보면,

$$A = \begin{pmatrix} (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{\alpha}{2} & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

이 되고 각 행렬의 고유치는 각각  $1 + 2\alpha \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2, 1 - 2\alpha \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2$  으로 A의 고유치가 B의 고유치보다 항상 큰 값을 갖는다. 결과적으로  $A^{-1} \cdot B$ 의 고유치는 1보다 항상 작은 수를 갖게 되고, 결과적으로 이 Scheme의 오차인  $(A^{-1} \cdot B)^n \cdot e^0$ 는 시간이 진행함에 따라서 작아져서  $\alpha$ 값에 관계없이 안정한 조건을 갖고 있다.

### 3.4 완전암해법 (Fully Implicit Scheme)

### 3.4.1 Fully Implicit Scheme 근사개념

완전음해법의 기본개념은 시간이  $j$ 시간을 초과하는 순간  $u_i$ 값이  $u_i^j$ 에서  $u_i^{j+1}$ 로 되어  $\Delta t$ 시간동안  $u_i^{j+1}$ 의 값으로 머무른다고 전제하므로, 이 시간단계중의 간극수압은 새로운 값  $u_i^{j+1}$ 에 의해서 결정된다. 해석에 요구되는 시간이 길 경우 본질적으로 지수함수적인 감소거동을 보이는 과잉간극수압의 소산은 처음에는 급격히 감소하다가 마지막에는 편평해지는 것이다. 특히 시간간격이 긴 경우 완전암시도식에서의 가정은 Crank-Nicholson Scheme에서 가정한 선형가정보다 실제와 더 일치한다. 시간단계가 아주 짧을 때는 정확도가 떨어지는데, 이는 아주 짧은 시간에서의 소산은 거의 선형적으로 변하기 때문이다. 이러한 개념에서 암밀 미분방정식을 차분식으로 구성해보면 다음과 같이 된다.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} \quad (9)$$

다시 정리하면

$$-a u_{i-1}^{j+1} + (1+2a)u_i^{j+1} - a u_{i+1}^{j+1} = u_i^j \quad (10)$$

### 3.4.2 안정성 고찰

(10)식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} (1+2a) & -a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -a & (1+2a) & -a & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a & (1+2a) & -a & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a & (1+2a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^j \end{pmatrix} \quad (11)$$

간단히  $AU_i^{j+1} = U_i^j$  or  $U_i^{j+1} = A^{-1} \cdot U_i^j$  나타낼 수 있고 행렬  $A$ 의 고유값은  $1 + 4a \left( \sin \left( \frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ )이다.  $a$ 값은 항상 0보다 큰값이고, 따라서  $A$ 의 고유값은 항상 1보다 크게 된다. 그러므로, 이 도식의 오차는 시간에 따라서  $(A^{-1})^n \cdot e^0$ 로 결국 오차는 시간이 진행함에 따라서 작아져서 0의 값이 되고 이식은  $a$ 값에 관계없이 안정하다.

## 4. 적용 예 및 해석결과

본 논문의 목적은 암밀해석에 가장 적합한 유한차분 도식을 규명하는데 있다. 해석 토층은 10m 두께의 포화되어 있는 반무한의 균질한 점토층이며 상하면은 점토에 비해서 투수성이 큰 조립질 배수층으로 양면배수 조건이며, 암밀하중은 전면에 균일하게 작용하여 수평변위가 일어나지 않는다고 가정한 Terzaghi의 1차원 암밀이론에서의 가정을 모두 수용하였다. 3가지 Scheme으로 작성한 program의 결과치와 Terzaghi의 수학적 엄밀해를 깊이 5m, 재하중후 600일 경과후의 값을 비교하였다. 100cm 간격의 계산결과에서 초기구간(0~100일)의 값은 엄밀해의 값보다 약간씩 크게 나왔다. 결과값과 함께 각 해석도식의 용이성, 수렴 및 안정성, 결과값의 물리적 타당성, 정확성의 4가지 사항을 갖고 비교하였다.

점성토의 물성치와 엄밀해에 의한 값은 표 1.과 같다.

표 1. 해석토층의 특성치 및 엄밀해의 값

물의 단위중량, $\gamma_w$ (kg/cm <sup>3</sup> )	투수 계수, $k_c$ (cm/s)	점토의 체적변화율, $m_v$ (cm <sup>3</sup> /kg)	압밀하중, $\Delta p$ (kg/cm <sup>2</sup> )
0.001	$2.0 \times 10^{-7}$	0.1	0.5
Terzaghi의 엄밀해	잔류과잉간극수압 (kg/cm <sup>2</sup> )		예상 침하량 (cm)
	0.228789		35.435

#### 4.1 Explicit Scheme

3가지 도식중 연립방정식의 계산이 필요하지 않고, 단지 대수식의 반복계산을 통해 결과값을 내는 가장 간단한 Algorithm으로 프로그램의 작성이 쉽다. 표 2.에서 나타나듯이  $\alpha$  값이 0.5인 약 7.233일 간격 이상이 되면, 오차값의 확대나 축소에 관계없이 시간의 진행에 따라 진동하며 발산하는 결과가 발생하며, 이중 음의 값은 과잉간극수압의 값이 0으로 수렴함이 분명한데도 부(-)의 값을 갖게 된다는 해석으로 이는 실제 압밀에서는 발생할수 없는 비현실적인 값이며 이때의 결과값 역시 무의미하다. '▽' 부호는 이런 결과치를 나타낸다. 때문에 양해법은  $\alpha > 0.5$  값을 취할 수 없는 제약조건을 갖게되어 정확도의 향상을 위해서 공간격자 간격을 미세하게 할수록 시간간격은 4배수로 작게 나누어야 하고, 계산량은 그만큼 더 증가하게 된다. 정확도는 Taylor 급수전개에 의한 오차항을 고찰해보면  $\alpha$  값이 1/6일 때 오차항이 가장 작게 되나, 오차항은 계산과정이 진행될수록 결국 0이 되므로 600일정도의 결과값에서는 이의 영향이 상당히 작다.  $\alpha = 0.00144$  일 때 즉, 시간간격이 30분일 때 20개의 격자망에서 침하량은 35.462 cm로 엄밀해와 오차가 0.027cm이 되어 동일한 해석조건에서 가장 큰 오차를 보였다. 표 2.에서 이 도식은 같은 격자망에서 시간간격이 커지면 해석 침하량도 증가하는 특징을 보였다.

#### 4.2 Crank-Nicholson Scheme

이 도식은 음해법과 양해법의 중간적 성질의 도식으로, 기지값과 미지값을 동시에 이용하여 미지값을 구해야 하기 때문에 연립방정식의 풀이가 필요하며, 때문에 TDMA(TriDiagonal Matrices Algorithm, 3 대각-행렬 알고리즘)의 계산이 필요하다. 이는 다차원의 문제로 확장시 간단하지 않으며, 대용량의 기억장치와 계산시간이 필요하다. 이 도식의 결과는 수학적 개념에서는 항상 안정한 값이 될 것이라고 예상되나 이 '안정성'이란 것은 단지 어떠한 값에 수렴한다는 것 일뿐이다. 해석과정에서  $\alpha$  값이 1.5이상 이 될 때 초기구간에서 진동하는 값이 발생하였으며 이는  $\Delta t$  시간전의 값이 현재의 값보다 더 작은 값이라는 오류를 갖게 된다. 600일 후의 값은 과잉간극수압도 침하량도 엄밀해와 유사한 값을 보일수 있으나 이는 이러한 오류를 포함하는 결과로 물리적으로 불합리한 해가 된다. 정확도는 operator 의 값 즉,  $\alpha = 0.00576$ 일 때 가장 근사한 값을 나타내었다. 이 시간 간격은 2시간이었고, 이때 침하량은 35.460cm로 엄밀해와 0.024cm의 오차를 보였다. 이하의 작거나 큰 시간간격에서는 모두 이보다 큰 침하량을 보였고 변동폭은 0.001 ~ 0.005cm 였다. 표 3.에서 간격 50cm에서 '▼'표시는 이런 불합리한 해를 대신 나타낸 기호이다. 특이한 점은 표 3.에서 나타내었듯이 같은 격자조건에서도 시간간격이 어느 특정한 간격일 경우에 최소값을 나타내고, 이러한 점이 한 개 이상이며, 다른 시간간격에서는 모두 이값들보다 큰 해석 침하량을 보였다. 그러나 그러한 최소값이 정확히 엄밀해와 일치하지는 않았으며, 이에 대한 연구는 좀더 필요하다고 생각된다.

표 2. Explicit Scheme 결과 ( z=5m, t=600day )

$\Delta z$	$u_e$ (kg/cm <sup>3</sup> )				Settlement (cm)			
	100cm	50cm	25cm	20cm	100cm	50cm	25cm	20cm
$\Delta t$								
30분	.228796	.228797	.228808	.228829	35.551	35.462	35.439	35.436
1시간	.228791	.228788	.228788	.228592	35.551	35.463	35.441	35.438
2시간	.228783	.228779	.228774	.228775	35.552	35.463	35.441	35.439
12시간	.228701	.228697	.228692	.228691	35.557	35.469	35.447	35.444
1일	.228604	.228598	.228593	.228592	35.564	35.475	35.453	35.450
2일	.228410	.228400	▽	▽	35.576	35.488	▽	▽
2.42226일	.228049	.228162	→ $\alpha = 1/6$	▽	35.599	35.502	▽	▽
5일	.227823	.227805	▽	▽	35.621	35.526	▽	▽
7.23379일	.227228	.228609	→ $\alpha = 1/2$	▽	35.651	35.565	▽	▽
10일	.226839	진동, 발산	▽	▽	35.676	▽	▽	▽
15일	.225846	▽	▽	▽	35.740	▽	▽	▽
20일	.224844	▽	▽	▽	35.863	▽	▽	▽
28.9351일	.214577	→ $\alpha = 1/2$	▽	▽	35.112	▽	▽	▽
30일	진동, 발산	▽	▽	▽	35.820	▽	▽	▽

※ '▽' 는 진동, 발산

표 3. Crank-Nicholson Scheme 결과 ( z=5m, t=600day )

$\Delta z$	$u_e$ (kg/cm <sup>3</sup> )				Settlement (cm)			
	100cm	50cm	25cm	20cm	100cm	50cm	25cm	20cm
$\Delta t$								
1시간	.228688	.228738	.228643	.228959	35.558	35.465	35.450	35.427
2시간	.228652	.228833	.228632	.228719	35.560	35.460	35.450	35.442
12시간	.228777	.228810	.228807	.228786	35.552	35.461	35.439	35.438
1일	.228807	.228783	.228796	.228789	35.550	35.463	35.440	35.437
2일	.228802	.228800	.228789	.228784	35.551	35.462	35.440	35.438
3일	.228799	.228795	.228786	.228784	35.551	35.462	35.440	35.438
4일	.228795	.228795	.228790	▽	35.551	35.462	35.440	▽
5일	.228797	.228790	▽	▽	35.551	35.463	▽	▽
10일	.228793	.228790	▽	▽	35.551	35.463	▽	▽
20일	.228779	.228774	▽	▽	35.552	35.464	▽	▽
30일	.228754	▽	▽	▽	35.554	▽	▽	▽
60일	.228646	▽	▽	▽	35.564	▽	▽	▽
75일	.228520	▽	▽	▽	35.571	▽	▽	▽
100일	진동, 수렴	▽	▽	▽	35.583	▽	▽	▽

※ '▽' 는 진동, 수렴

### 4.3 Fully Implicit Scheme

완전암시도식인 이 도식은 현재의 값이 미지값에 의해 결정된다는 도식으로 TDMA를 이용하여야 하며 이로 인해 역시 다차원 해석시 난점이 있다. 안정 및 수렴 조건은 수학적 개념에서와 동일하게 모든  $\alpha$  값에서 물리적으로 역설적인 거동은 나타나지 않았으나 시간간격이 지나치게 작거나 클 때, 정확도는 전자의 두가지 Scheme보다 떨어졌다. 그러나, 표 3.에서  $\alpha$  값이 0.07~0.21근방에서 즉 시간간격이 24시간~3일 사이의 상대적으로 큰 시간 간격에서의 침하량과 엄밀해의 오차는 0.008~0.011cm 정도로 다른 두가지 방법보다 오히려 상대적으로 큰 시간간격을 사용할 때 상당히 정확한 값이 산출되었다. operator,  $\alpha$  값을 0.07보다 작게 취하면, 즉 시간간격을 24시간 이하로 할때 침하량은 크게 계산되고, 0.21보다 큰 값을 취하면, 즉 3일 이상의 시간간격을 취하면 침하량은 작게 산출되었다. 표 4.에서 보듯이 이 도식은 절대적으로 안정하나, 격자간격과 시간간격에 따라서 오차가 클수 있다.

표 4. Fully Implicit Scheme 결과 ( z=5m, t=600day )

$\Delta z$	$u_e$ (kg/cm <sup>3</sup> )				Settlement (cm)			
	100cm	50cm	25cm	20cm	100cm	50cm	25cm	20cm
$\Delta t$								
1시간	less	less	.228763	.228797	more	more	35.442	35.437
2시간	.228882	.228783	.228872	.228854	35.546	35.463	35.435	35.434
12시간	.228890	.228899	.228925	.228896	35.541	35.456	35.431	35.431
1일	.228995	.228995	.228997	.228999	35.538	35.450	35.427	35.424
2일	.229187	.229193	.229183	.229197	35.526	35.436	35.415	35.412
3일	.229377	.229385	.229381	.229374	35.513	35.424	35.402	35.400
4일	.229572	.229583	.229578	.229586	35.501	35.412	35.390	35.387
5일	.229764	.229776	.229776	.229779	35.489	35.399	35.377	35.374
10일	.230721	.230749	.230753	.230746	35.427	35.336	35.314	35.312
20일	.232604	.232665	.232672	.232673	35.305	35.212	35.189	35.186
30일	.234450	.234543	.234526	.234557	35.184	35.089	35.066	35.063
40일	.236255	.236385	.236411	more	35.064	34.968	34.943	less
50일	.238020	.238181	.238221	more	34.946	34.847	34.822	less
100일	.246258	more	more	more	34.372	less	less	less

※ 'less' 더 적은 값, 'more' 더 큰 값

## 5. 결론 및 고찰

- 1) Explicit Scheme 은 Algorithm이 간단하고, 편리함을 가지고 있으며, 2차원 3차원 해석으로의 확장도 비교적 용이하지만,  $\alpha$ 값의 제약으로 인하여 아주 작은 시간간격밖에 사용할 수 없고 계산량과 소요시간이 상당히 크다는 단점이 있다.
- 2) Crank-Nicholson Scheme은 수학적으로 안정하나 이는 단지 수렴조건일 뿐  $\alpha$  값이 1.5이상의 값을 취하게 될 경우, 물리적인 사고에서 불합리한 결과가 된다는 것을 알 수 있었다.
- 3) Fully Implicit Scheme은  $\alpha$ 값에 제약이 없고, 해석값이 실제 압밀 현상과 유사한 지수 함수적 거동과 유사하며 계산 시에도 다른 두 가지 방법보다 큰 time step을 적용하여도 오히려 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있다.

이러한 결과를 종합적으로 판단할 때 소요해석시간이 장기간이고 지수함수적인 감소거동을 보이며 또한 최종적인 침하량의 산정이 중요한 압밀의 해석문제에서 Crank-Nicholson Scheme이나 Fully Implicit Scheme이 Explicit Scheme보다 정확하고 편리하다. 그러나, 적절하게 큰 시간간격을 사용할 때 Fully Implicit Scheme이 압밀 전과정의 거동과 큰 오차없이 일치하며, 가장 적합한 식이 될 것이라 사료된다. 이 논문에서는 단지 Terzaghi의 엄밀해와의 비교만이 이루어졌으며, 실제 실험이나 현장데이터와의 비교 및 검증과 보완이 계속 이루어져야 좀더 가치가 있게 될 것임은 분명하다.

## 참고문헌

1. 명 현국 (1999), 전산열유체 공학, 문운당, 서울, pp. 1~55.
2. Braja M. Das(1997), Advanced Soil Mechanics, Taylor & Francis, pp. 258~2671.
3. Herbert, F,Wang.,Mary,P.A.,(1982), "Introduction to Groundwater Modeling", W.H. Freeman And Company, San Francisco,pp. 1~110.
4. Joel, H.Ferziger.(1981), "Numerical Methods for Engineering Application", John Wiley & Sons, New York, pp.135~155
5. Terzaghi, K(1943), *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley Sons, New York, pp.265~296.