

후벽 유압실린더 튜브의 탄소성 응력해석

김옥삼*, 김중현**

*여수대학교 기계공학과, **전남대학교 기계공학과

Elasto-plastic Stress Analysis for Hydraulic Cylinders Tube of Thick wall

O. S. Kim* and J. H. Kim**

* Dept. of Mechanical Engineering, Yosu National University

***Graduate School, Dept. of Mechanical Engineering, Chonnam National University

Abstract

This paper was utilized the STKM13C tubes for machine structural purposes model, inner radius was 100 mm and outer radius was 140 mm, axial length was semi-infinite and the isoparametric element was used. Radial, tangential and shearing stress occurred the maximum stresses(-20, 52 and 26 MPa) at the inner radius and the minimum stresses at the outer radius of the hydraulic actuator cylinders for an industrial systems. But negative signs have meaning compressive stress and stress diminution ratio was about 0.15 MPa/mm. And then coincidence between the simulation and exact results(Lame's equation) is found to be fairly good, showing that the proposed analytical by BEM are reliable.

1. 서론

작동조건에 탄소성 응력분포 및 응력구배에 대한 경향해석, 최소응력 발생방안 강구 등에 시뮬레이션 기법을 활용하는 것이 경제적으로 타당성¹⁾이 있다. 액추에이터 실린더와 같은 축대칭 형상 구조물의 응력해석에는 유한요소법(finite element method, FEM)²⁾ 및 경계요소법(boundary element method, BEM)³⁾⁻⁴⁾ 등과 같은 해석적 기법이 널리 사용되고 있다. 그 가운데 BEM은 여러 가지 하중조건에 적용력이 강하며 이방성 및 이물질의 적층재료도 모델링이 용이하다. 또한 경계조건외의 종류 및 개수에 제한이 없으며 특정부위의 요소크기를 자유롭게 취급할 수도 있다. 그리고 비선형 물체의 거동도 해석 가능하며 경계부를 따라 요소 및 절점을 분할하고 내부의 해를 구할 때는 점의 좌표만 부여하는 특징⁵⁾이 있다. 이상과 같은 장점이 부각되어 축대칭 문제에 대한 경계적분 방정식(boundary integral equation : BIE)의 시도가 Kermandis⁶⁾와 Mayr⁷⁾에 의해, 축대칭 커널(kernel)을 구하는 방법으로 3차원 켈빈(Kelvin)해를 이용하여 원주경로에 따라 적분하는 3차원 적분방법을 개발하였다. Lachat⁸⁾ 등은 축대칭 BIE를 체계화하였고 적

분변환 방법을 이용하여 축대칭 커널 등을 구하는 방법과 단일성(singularity)적분을 해석하였다. Bakr과 Fenner⁹⁾는 축대칭 커널을 구하는데 행렬(Hankel)변환법을 이용하여 축대칭 문제를 직접적으로 해결하는 방법을 모색하였다.

본 연구에서는 산업현장의 적하용 유압 액추에이터 실린더튜브에 균일한 내압하중으로 작용할 때 튜브 전체에 발생하는 탄소성 응력들의 거동용 규명함으로써 향후 유압 액추에이터 실린더의 파손예측성을 확보하고, 경계요소법의 단일절점(single node)와 이중절점(double node)의 해석결과와의 타당성을 평가하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 엄밀해의 유도

해석결과와 검증용 위하여 엄밀해(exact solution)인 라메(Lame)방정식을 사용하였으며 라메 방정식, 유한요소법 및 경계요소법의 결과를 상호 비교 검토하였다. 엄밀해를 유도하기 위하여 내압을 받고 있는 실린더의 반경

방향 응력(radius stress)과 원주방향 응력(circumference stress)은 아래의 식과 같다

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2)$$

한편 평면 문제에 있어서는 사용된 주응력 $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{\max}$ 와 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 의 관계는

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5)$$

과 같다.

2.2 경계요소법 의한 이론식

영역내부의 탄소성 응력의 관계식은 내부점 p 에 관해 미분하고 변형을 구한후 후크(Hooke)의 법칙을 이용하여 각 위치에서의 작용응력을 구한다. 경계에 대한 적분방정식의 수치적 계산을 위하여 경로 Γ 는 임의의 개수의 요소로 분할하고, 각 요소에 대한 수치적분한 결과를 합하면 된다. 경계에 대한 적분방정식은 각 변수를 전체 좌표계에서 국부 좌표계로 변환시키고, 가우스(Gauss)수치적분을 적용하면 이산형(離散形) 적분방정식이 구성되어 아래 식과 같이 된다.

$$C_i^j(P) U_i(P) = 2\pi \sum_{n=1}^N \sum_{\xi=1}^3 \int_{-1}^{+1} U_i^*(P, Q) N_i(\xi) r_Q(\xi) K(\xi) d\xi \cdot T_j \\ - 2\pi \sum_{n=1}^N \sum_{\xi=1}^3 \int_{-1}^{+1} T_i^*(P, Q) N_i(\xi) r_Q(\xi) K(\xi) d\xi \cdot U_j \quad (6)$$

각 절점에 대한 경계 적분방정식을 전 절점에 대해 수행하면 선형대수 방정식은 다음과 같은 구해진다.

$$[A]\{U\} = [B]\{T\} \quad (7)$$

여기서 $[A]$ 는 계수 대각선 항에 기여하는 계수 C_i^j 를 포함한다. 선형 또는 2차 이상의 요소를 사용하는 경우, 트래션(traction)의 불연속성이나 경계조건의 불일치성이

발생하면 2중절점 개념을 도입할 필요가 있다. 2차원 물체에서는 좌표값을 갖는 두개의 경계절점으로 구성되어 있으며 이 경우 요소의 연결성은 $k=j$ 로서 나타낸다. 그러므로 트래션의 불연속은 j 와 k 절점에서 각각 다른 값의 트래션이 할당되는 것으로 가정할 수 있다. 이때 두 절점에서의 변위는 동일하기 때문에 각 방향에서 j 절점의 트래션과 k 절점의 변위(또는 반대의 경우) 등에 대한 경계조건의 조합이 이루어져야 한다.

이중지수형 적분법(double exponential formula)을 적용하는 경우 만일 $-1 \leq \eta \leq 1$ 에서 적분 가능한 함수 $f(\eta)$ 를 고려하면, 이 때 함수 $f(\eta)$ 의 특성은 구간 내에서는 특이점이 없으나 $|\eta| = 1$ 에서 특별히 특이점이 아래와 같이 존재한다.

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (8)$$

만일 (8)식을 m 점까지 가우스 수치적분법을 사용한다면

$$I = \sum_{i=1}^m W_i f(\eta_i) \quad (9)$$

식과 같고 이 경우 함수 $f(\eta)$ 의 정확한 해가 구해지지 않으므로 해의 정밀도를 높이기 위해 변수 (η)를 변수 t 의 이중지수형 함수(double exponential function)로 치환하면

$$\eta = \tanh \left\{ \frac{\pi}{2} \sinh(t) \right\} \quad (10)$$

따라서 식(8)은

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f \left\{ \tanh \left\{ \frac{\pi}{2} \sinh(t) \right\} \right\} \frac{\pi}{2} A(t) dt \quad (11)$$

식과 같으며 여기서 $A(t)$ 는

$$A(t) = \frac{\cosh(t)}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \sinh(t) \right\}} \quad (12)$$

식이 성립한다. 또한, 구간 $-1 \leq \eta \leq 1$ 은 $-\infty < t < \infty$ 로 변환되는데 이때 h 를 미소폭이라 하면 $t = \eta \cdot h$ 이 되고 $dt = h$ 가 되어

$$I = \frac{\pi}{2} h \sum_{n=1}^m f \left\{ \tanh \left\{ \frac{\pi}{2} \sinh(\eta h) \right\} \right\} A(\eta h) \quad (13)$$

식과 같다. 그리고 윗식은 $\pm\infty$ 의 구간을 가지므로 계산 불가능하여 적분가능 범위로 축소시켜야 하지만, $A(t) = A(\eta \cdot h) = A(\pm 2.5) = 1.36 \times 10^{-7}$ 이고 $t = \pm 2.5$ 에서 I 가 급속히 zero에 수렴하므로 이 구간에서만 계산하면 된다. 이 적분방법의 장점은 $|\eta| = 1$ 일때 $A(t) \rightarrow 0$ 로 빨리 수렴하여 오차의 누

적용 방지할 수 있다는 것이다. 그러나 $| \eta \cdot h | = 1 \leq 2.5$ 일 경우 $h \approx 0.01$ 이라면 500회의 계산이 요구되어 정확도는 향상되지만 반면에 계산시간이 증대한다. 따라서 내부 절점해를 계산할 때 내부점의 위치가 경계에서 얼마만큼 떨어져 있을 때 부터 이중 지수적분법을 적용할 것인가 결정하는 것은 계산시간의 단축면에서 중요하다. 구체적인 방법으로 실제 내부점에서 경계까지의 거리 r 이 해당요소 길이 내에 있을 때 가우스 적분법보다는 이중지수적분법을 사용하는 것이 오차를 감소시킬 수 있는 효과적인 방안이다.

3. 모델설정 및 해석과정

해석모델 설정에 있어서는 균등한 내압을 받는 유압 액츄에이터의 실린더가 Fig. 1와 같이 구성되므로 2차원 축대칭 문제로 가정하였다. 외압의 작용을 배제하고 250 kgf/cm^2 의 내압만을 받고 있는 액츄에이터 실린더의 탄소성 응력거동을 해석하였다. BEM 해석에서 Fig. 2과 같이 전체 요소수와 절점수를 26개로 설정하였고 Fig. 3와 같이 프로그램의 주 흐름도(main flow chart)를 작성하였다.

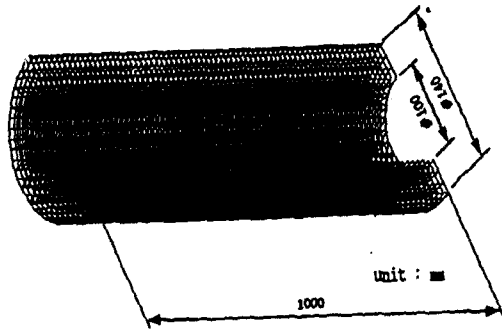


Fig. 1 Model of hydraulic actuator cylinder

2차원 축대칭 문제의 탄소성 응력해석을 위하여 2차 요소의 형상함수(shape function)를 사용하여 수치계산의 정확도를 제고시켰다. 해석 과정에서 타당성을 입증 위하여 엄밀해진 라메방정식과 FEM 및 BEM의 결과와 상호 비교·검토하였다.

4. 해석결과 및 고찰

재료로 선정된 기계구조용 탄소강관(STKM 13C, KSD3517)은 최대 허용응력 60.5 MPa, 종탄성계수 206

GPa 및 Poisson's ratio 0.3의 기계적 물성치를 보유하고 있다. 내경 100 mm, 외경 140 mm, 반무한 길이 및 6 S이하의 표면정밀도로 보링(boring) 가공한 유압

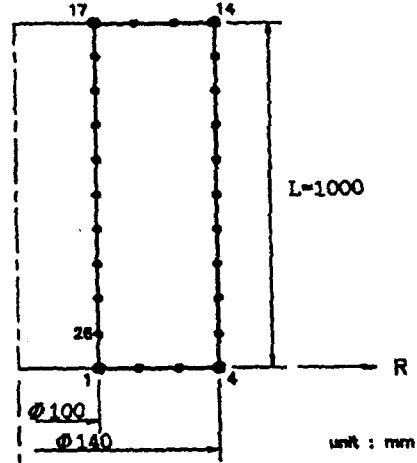


Fig. 2 Mesh generation for BEM model of actuator cylinders

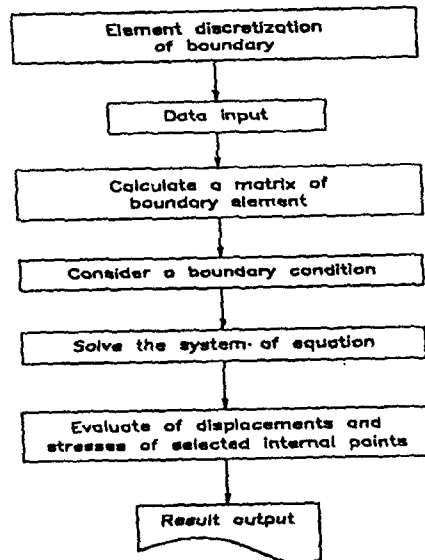


Fig. 3 Main flow chart of elasto-plastic stress for actuator cylinder by BEM

액츄에이터 실린더에 각종 응력에 대한 해석결과를 도출하였다.

Fig. 4는 평면에 있어서 접선방향에 대한 주응력

(σ_1) 분포로서 56~24 MPa 인장응력을 받고 있으며 직경이 증가할수록 주응력 값은 내경의 위치 ($r=100mm$) 및 56 MPa를 최대치로 지수함수 곡선 형태로 점차 감소하는 경향을 보인다.

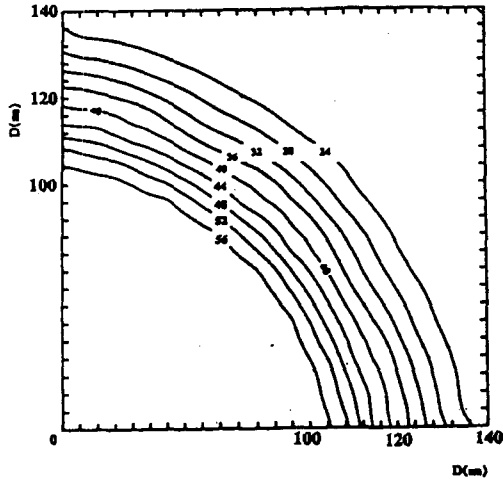


Fig. 4 Principle stress σ_1 in plane stress

직경방향에 대한 주응력(σ_2) 분포는 Fig. 5와같이 압축응력이 작용하고 있으며 크기는 접선방향의 응력보다 $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ 정도 현저하게 적다. 또한 접선방향과 같이 직경이 증가할수록 주응력이 지수함수 형태로 감소하고 있다. 그림상의 (-)부호는 압축응력을 의미한다.

Fig. 6은 최대전단 응력(τ_{max})에 대한 분포를 나타낸 그림으로서 직경이 120 mm인 경우 최대치 26 MPa를 기록하고 있다. 접선방향 응력, 반지름방향 응력 및 최대 전단응력 등은 유압 액추에이터 실린더의 중심부에서 최대치를 나타내고 직경이 증가함에 따라 선형적으로 감소하는 경향을 보여준다.

Fig. 7은 단일절점(single node)에 의한 반경방향 응력(σ_r)의 해석결과로서 $r=100mm$ 위치에서 20.3MPa 정도의 압축응력을 나타내고 반경이 증가함에 따라 점차 소실되어 $r=140mm$ 위치에서는 zero로 수렴하고 있다. 다만 직경 115 mm 위치에서 엄밀해 및 FEM의 결과와 BEM의 결과가 4 MPa 정도의 편차를 나타내고 있는데 이것은 BEM의 해의 수렴과정에서 원시오차(inherent error)의 영향으로 사료된다. 단 (+)부호는 인장응력, 음의 부호(-)는 압축응력을 의미한다.

이중절점(double node)에 의한 BEM 해석 결과는 Fig. 8 에 도시하였다. 이 그림은 Fig.7과 전체적인 크기나 경

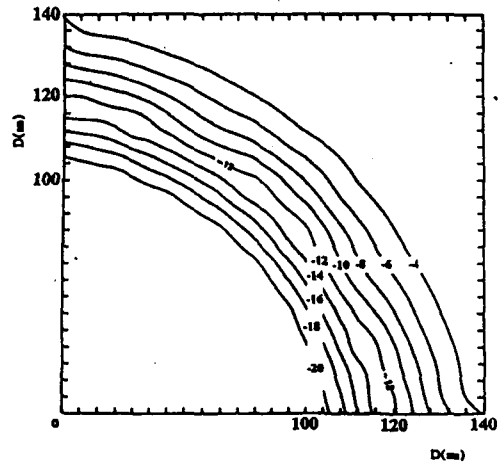


Fig. 5 Principle stress σ_2 in plane stress

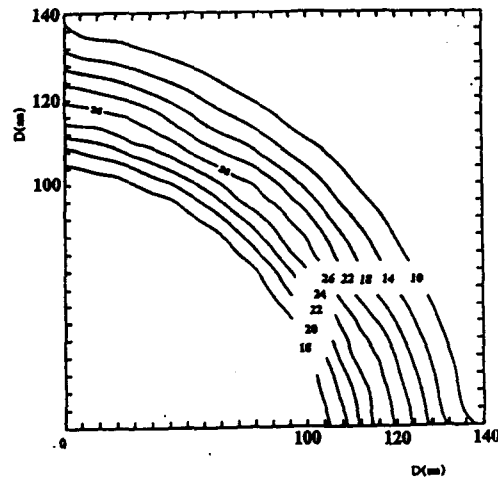


Fig. 6 Principle stress τ_{max} in plane stress

향은 유사하지만 $r=140mm$ 위치에서의 약 1 MPa 정도의 압축응력이 잔존하고 있음을 보여준다. 두 그림을 종합하면 반경방향 응력(σ_r)은 최대 20 MPa 정도의 압축응력을 받고 있었으며 반경이 증가함에 따라 $r=140mm$ 위치에서는 거의 zero에 수렴하는 것이 단일절점이 나 이중절점 모두 나타나고 있다. 다만 직경 115 mm 위치에서 해의 편차는 이중절점의 경우보다 15~20% 정도 감소하였다.

Fig.9는 이중지수 공식(double exponential formula) 과 이중절점(double node)에 의해서 계산된 축대칭(axisymmetric) 문제에 대한 해석결과로 엄밀해와 FEM 및 BEM에 의한 해가 거의 일치하고 있다. 이

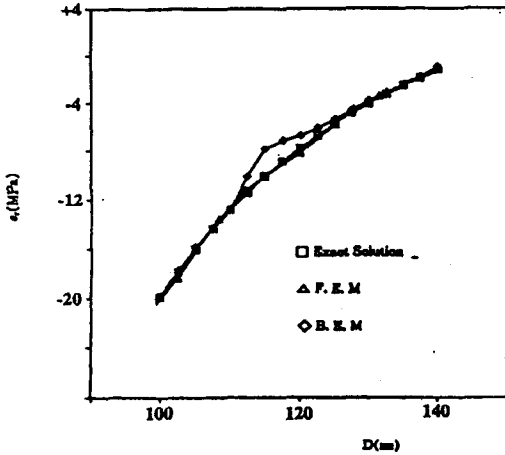


Fig. 7 σ_r in axisymmetric problem calculated by single node and single exponential formula

결과로 이루어 볼 때 축대칭의 문제의 경우 FEM이나 BEM의 해석결과는 신뢰성을 확보할 수 있을 것으로 나타났다.

반경방향이 증가함에 따라서 원주방향 응력(σ_θ)를 다양한 계산방법들의 결과를 나타낸 것이 Fig.10이다. FEM과 BEM의 해석결과로 $r=100mm$ 위치에서 최대 52 MPa의 인장응력으로서 거의 비슷하지만 엄밀해와는 다소의 오차가 발생하고 있는데 그 이유는 코너부분에서의 트래션 벡터(traction vector)의 불연속성이 해의 안정성에 영향을 미친것으로 사료된다. 다만 외경 방향으로 진행함에 따라서 $r=140mm$ 위치에서는 거의 비슷한 값으로 수렴하고 있다.

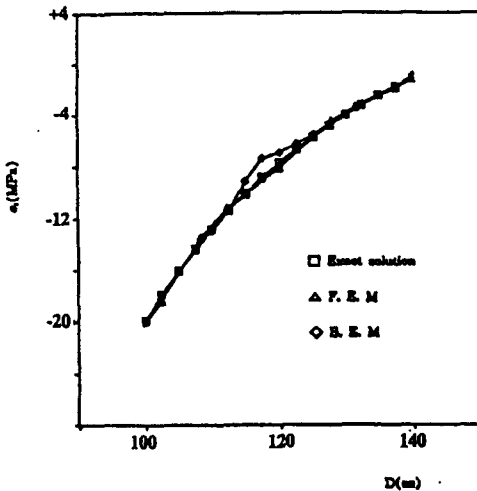


Fig. 8 σ_r in axisymmetric problem calculated by double node and double exponential formula

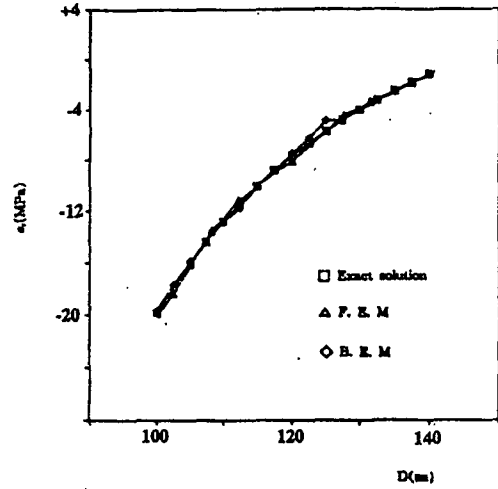


Fig. 9 σ_z in axisymmetric problem calculated by double node and double exponential formula

한편 엄밀해, FEM 및 이중절점에 의한 BEM해석결과가 일치하고 있음을 Fig. 11에 나타냈다. 이 그림은 반경방향 응력이 압축응력으로 작용하는 것과 반대로 원주방향응력(σ_θ)에서는 최대 52 MPa, 최소 28 MPa의 인장응력이 전체 구간에서 작용하여 0.15 MPa/mm의 응력구배를 보여주고 있다.

그러므로 유압 액츄에이터 실린더 튜브와 같은 원통형의 형상을 가진 구조물의 응력거동에 대한 해석을 위해 FEM 및 BEM의 결과에 타당성이 입증되었으므로

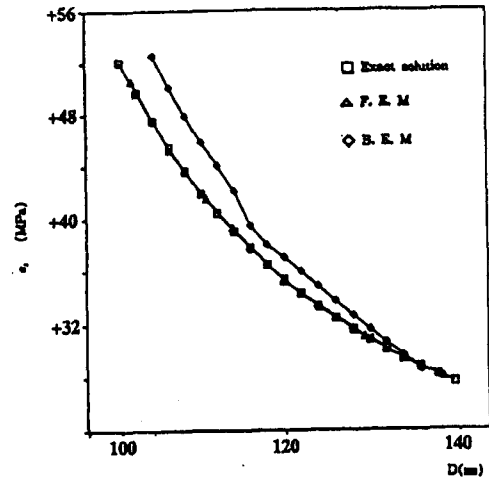


Fig. 10 σ_θ in axisymmetric problem calculated by single node and single exponential formula

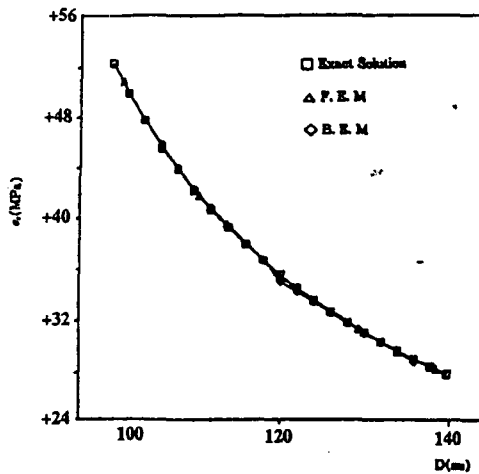


Fig. 11 σ_{θ} in axisymmetric problem calculated by double node and double exponential formula

BEM을 사용하는 경우 이중절점을 이용하는 해석방법이 트랙션 벡터의 불일치성을 감소시키고 해의 정확성을 제고시키는 것으로 확인되었다.

5. 결론

종래의 방식을 탈피하고 BEM 기법을 도입한 해석으로 산업현장의 적하용 유압 액추에이터 실린더의 탄소성 응력분포를 해석한 결과 아래와 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 직경방향의 응력은 최대 -20 MPa 정도의 압축응력, 원주 방향의 응력 σ_{θ} 는 반대로 최대 52 MPa 정도의 인장응력으로 작용하였으나 STKM 13C의 항복강도를 초과하지는 않았다.
- 2) 원주방향의 응력 σ_{θ} 가 감소하는 양상을 보였고, 115 mm 부근에서 다소의 오차가 발생되었는데 그 이유는 코너부의 트랙션 벡터의 불연속성 때문이라고 사료된다.
- 3) 경계요소법의 단일절점과 이중절점의 해석결과에 대한 오차는 이중절점의 경우가 15~20%정도 감소하고 있었고, BEM의 이중절점 해석결과는 엄밀해와 FEM의 해석결과가 일치하였다.

후기

본 연구는 과학기술부·한국과학재단 지정 여수대학교 실비자동화 및 정보시스템 연구개발센터의 지원에 의한 것이다.

참고문헌

1. A. C. Scordelis and K. S. Lo, "Computer analysis of cylindrical Shells", J. Am. Concr. Inst., 61, pp. 539~561, 1968.

2. T. A. Cruse, "Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics, Int. J. Solid Struct., Vol. 5, pp. 1259~1274, 1969.

3. T. Higashimashi *et al*, "Interactive Structural Analysis System using the Advanced Boundary Element Method", Proc. of the 5th Inter. Confer., Boundary Elements, pp. 847~856, 1983.

4. T. A. Cruse, "An Improved Boundary Integral Equation Method for 3-Dimensional Elastic Stress Analysis", Com. and Struct., Vol. 4, pp. 741~754, 1974.

5. 木原諄二, 相澤龍彦, "境界要素法の二次元弾性問題への應用", 鐵と鋼, 第6號, pp. 720~725, 1981.

6. T. Kermandis, "A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems", Int. J. Solid Struct., Vol. 11, pp. 493~500, 1975.

7. M. Mayr, "The Numerical Solution of Axisymmetric Elasticity Problems using an Integral Equation Approach", Mech. Res. Comm., Vol. 3, pp. 393~398, 1976.

8. J. C. Lachat and J. O. Watson, "A Second Generation Boundary Integral Equation Program for Three Dimensional Elastic Analysis in Boundary Integral Equation Method", Computational Application in Applied Mechanics, Amd. Vol. 11, ASME, NewYork, 1975.

9. A. A. Bakr and R. T. Fenner, "Use of the Hankel Transform in Boundary Integral Methods for Axisymmetric Problems", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 19, pp.1765~ 1769.