

# 등가 전력선을 가진 Chua 회로에서의 카오스 동기화

배 영 철

여수대학교 전기공학과

## Chaos Synchronization using Chua Circuit with Equivalent Power Line

Young-chul Bae

Nat'l Yosu University

E-mail : ycbae@yosu.ac.kr

### Abstract

Chua's circuit is a simple electronic network which exhibits a variety of bifurcation and attractors. The circuit consists of two capacitors, an inductor, a linear resistor, and a nonlinear resistor. In this paper, a transmitter and a receiver using two identical Chua's circuits are proposed and synchronizations of a equivalent power line are investigated. Since the synchronization of the equivalent power line system is impossible by coupled synchronization, theory having both the drive-response and the coupled synchronization is proposed. As a result, the chaos synchronization has delay characteristics in the equivalent power line transmission system caused by the line parameters L and C.

### 1. 서 론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학, 공학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다. Chua는 간단한 전자 회로로 카오스 현상이 존재함을 증명하였다. Chua 회로는 매우 단순한 자울, 3차계 시스템으로 가역성을 가지며 1개의 비선형 소자인 3구분 선형 저항(3-segment piecewise-linear resistor)과 4개의 선형 소자인(R, L, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>)로 구성되는 발진회로다.

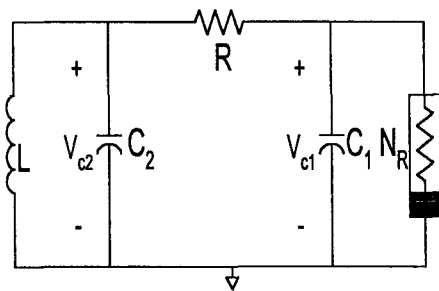


그림 1. Chua 회로

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로[1]를 그림 1에 나타냈으며 상태방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = G(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1})$$

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L \quad (1)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C_1}$$

여기서  $G = 1/R$ ,  $g(\cdot)$ 는 식 (2)와 같이 표현되는 3구분 선형 함수(3-segment piecewise-linear function)이며 그림 2에 나타내었다.

$$g(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|v_R + B_P| - |v_R - B_P|] \quad (2)$$

여기서  $m_0$ 는 외부 영역의 기울기,  $m_1$ 은 내부 영역의 기울기,  $\pm B_P$ 는 break-point이다.

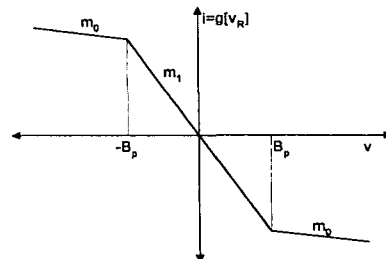


그림2. 비선형 저항의 전압 전류 특성

카오스 동기화에 관한 이론은 결합동기이론, 구동 동기 이론[5]이 제안되어 있으나 실제 선로에는 적용할 수 없는 문제가 있다. 이에 본 연구에서는 동일한 2개의 Chua 회로 사이에 구동동기와 결합동기 이론을 혼합한 구동-결합 동기이론을 등가 전력선에 적용하고 그 가능성을 확인하였다.

## 2. 관계이론

### 2.1 등가 무손실 전송선로를 가진 Chua 회로

구분 선형 소자를 가진 Chua 회로의 LC 공진기를 한쪽이 단락된 무손실 전송선로로 치환하면 그림 3과 같은 회로를 얻을 수 있다.

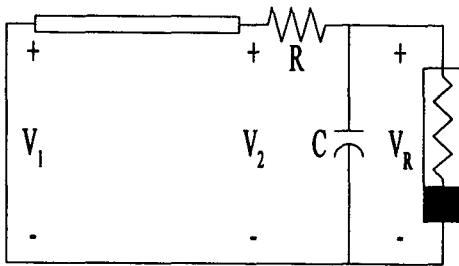


그림 3. 전송 선로를 가진 Chua 회로

Branin[7]는 무손실 전송선로의 과도 해석을 위한 특성곡선법을 제안하였다. 그림 4와 같은 전송 선로의 특성 방정식은 다음과 같이 표시된다.

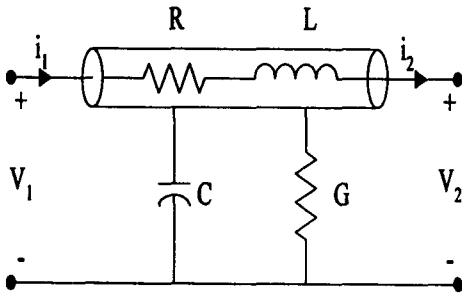


그림 4. 전송 선로

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri + \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$C \frac{\partial e}{\partial t} + Ge + \frac{\partial i}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

여기서  $e(x, t)$ 와  $i(x, t)$ 는 시간  $t$ 에서 선로  $x$ 점의 전압과 전류,  $R, L, C, G$ 는 단위 길이당의 저항, 인덕턴스, 커패시턴스, 컨덕턴스를 나타낸다.

특성곡선에서 정의된  $dx/dt = 1/\sqrt{LC}$ 과  $dx/dt = -1/\sqrt{LC}$ 를 사용하여 식(3)과 식(4)를 계산하면 다음식과 같은 상미분 방정식을 유도할 수 있다.

$$\sqrt{\frac{L}{C}} di + (Ri + \sqrt{\frac{L}{C}} G e) dx + de = 0 \quad (5)$$

$$-\sqrt{\frac{L}{C}} di + (Ri - \sqrt{\frac{L}{C}} G e) dx + de = 0 \quad (6)$$

식(5)는  $dx/dt = 1/\sqrt{LC}$  일 때 얻어지며 진행파 특성을 가지고 식(6)은  $dx/dt = -1/\sqrt{LC}$  일 때 얻어지며 반사파 특성을 가진다.

식(5)와 (6)에서 무손실 전송 선로인 경우  $R=0, G=0$ 이므로 다음과 같은 식으로 정리할 수 있다.

$$\Delta e = -Z_0 \Delta i \quad (7)$$

$$\Delta e = +Z_0 \Delta i \quad (8)$$

여기서  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ 이며 선로의 특성 임피던스,  $\Delta e$ 는 주어진 선로에서의 임의의 두점간의 전압차,  $\Delta i$ 는 전류차를 나타낸다.

전송선로의 길이를  $d$ 라고 하고 일단에서 다른 일단으로의 파의 지연 시간을  $\tau = \sqrt{LC}d$ 라 놓으면 식(9), (10)과 같은 전압 방정식을 세울 수 있다.

$$e(d, t) = -Z_0 i(d, t) + [e(0, t-\tau) + Z_0 i(0, t-\tau)] \quad (9)$$

$$e(0, t) = +Z_0 i(0, t) + [e(d, t-\tau) - Z_0 i(d, t-\tau)] \quad (10)$$

식(9)와 식(10)은 입사파와 반사파 전압원을 이용하여 다음과 같은 수식으로 정리 할 수 있다

$$e(d, t) = -Z_0 i(d, t) - e_2(0, t-\tau) \quad (11)$$

$$e(0, t) = +Z_0 i(0, t) - e_1(d, t-\tau) \quad (12)$$

여기서

$$e_2(0, t) = -[2e(0, t) + e_1(d, t-\tau)]$$

$$e_1(d, t) = -[2e(d, t) + e_2(0, t-\tau)]$$

이다.

식(11)과 식(12)의 등가 회로를 그림 5에 나타내었다.

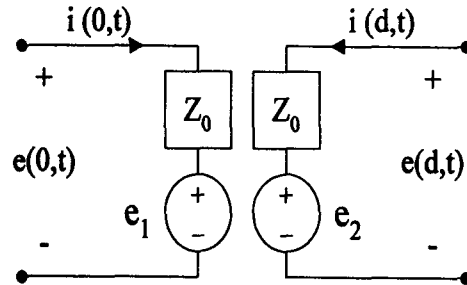


그림 5. 전송 선로의 특성 모델

그림 4의 전송선로는 그림 5와 같이 등가 변환되므로 전송선로를 가진 그림3의 Chua 회로는 그림 6과 같은 새로운 등가회로로 변환할 수 있다.

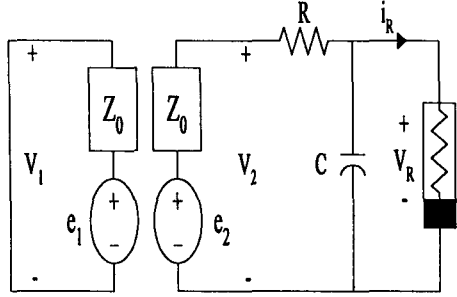


그림 6. 전송 선로를 가진 Chua 회로의 등가회로

2.2 등가 전력 전송선로를 가진 Chua 회로에서의 카오스 동기화

동일한 Chua 회로 2개를 송신부와 수신부로 놓고 그 사이에  $\pi$ 형 전력선을 가진 카오스 회로를 그림 7과 같이 나타내었다.

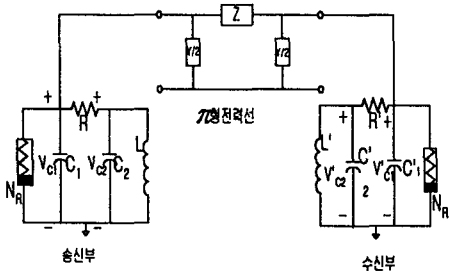


그림 7.  $\pi$ 형 전력선을 가진 카오스 회로

그림 7에서 동기화를 이루기 위해 Chua 회로의 송신부와 전력선 사이를 구동-결합 동기 방법을 적용하고 전력선과 수신부 사이는 결합 동기 방식을 적용한 회로를 그림 8에 나타내었다.

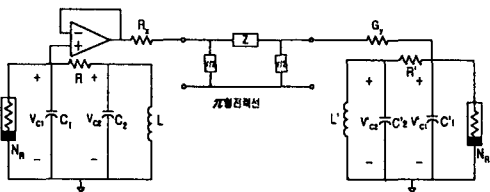


그림8.  $\pi$ 형 전력선을 가진 카오스 동기화 회로

그림 8과 같이 동기화 회로를 구성한 이유는 구동 동기가 시스템에 따라 구동하지 못하는 경우가 생기며 결합 동기는 시스템에 불안정한 영역이 발생하여 동기화가 이루어지지 못하는 경우가 나타나기 때문에 본 논문에서는 이들의 문제점을 해결하기 위하여 구동 동기와, 구동-결합 동기 이론을 적용하여 동기화를 이루었다.

그림 8의 전력선을 동기화 회로의 상태 방정식을 다음 식과 같다.

송신부의 상태방정식

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= G(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{aligned} \quad (13)$$

전력선로의 상태방정식

$$\begin{aligned} L_i \frac{di_{L_i}}{dt} &= v_{c_1} - (R_x + R_i)i_{L_i} - v_{c_i} \\ C_i \frac{dv_{c_i}}{dt} &= i_{L_i} - (G_i + G_y)v_{c_i} + G_y v_{c_1}' \end{aligned} \quad (14)$$

수신부의 상태방정식

$$\begin{aligned} C_2' \frac{dv_{c_2}'}{dt} &= G'(v_{c_1}' - v_{c_2}') + i_{L'} \\ C_1' \frac{dv_{c_1}'}{dt} &= G'(v_{c_2}' - v_{c_1}') - g(v_{c_1}') + G_y(v_{c_1} - v_{c_1}') \\ L' \frac{di_{L'}}{dt} &= -v_{c_2}' \end{aligned} \quad (15)$$

$v_x = v_{c_1} - v_{c_1}'$ ,  $v_y = v_{c_2} - v_{c_2}'$ ,  $i_z = i_L - i_{L}'$ 라 정의하고 식(13), 식(14), 식(15)에서 차 시스템을 구하면 식(16)과 같이 5차 시스템으로 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_x}{dt} &= G(v_y - v_x) - S_i v_x + G_y(v_{c_1}' - v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_y}{dt} &= G(v_x - v_y) + i_z \\ L \frac{di_z}{dt} &= -v_y \\ C_i \frac{dv_{c_i}}{dt} &= i_{L_i} + G_y(v_{c_1}' - v_{c_1}) \\ L_i \frac{di_{L_i}}{dt} &= v_{c_1} - v_{c_1}' - (R_x + R_i)i_{L_i} \end{aligned} \quad (16)$$

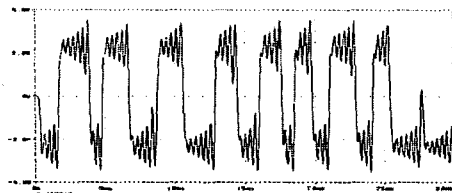
식(4-6)에서 차 시스템은 시간이 지남에 따라 0으로 수렴해가는, 즉  $\lim_{t \rightarrow \infty} |v_x| = \lim_{t \rightarrow \infty} |v_y| = \lim_{t \rightarrow \infty} |i_z| = 0$ 가 되면 동기화가 이루어지는 것이다.

식 (16)을 상태방정식 꼴로 고치고 간략화하기 위해  $x_1 = v_x$ ,  $x_2 = v_y$ ,  $x_3 = i_z$ ,  $x_4 = v_{c_1}$ ,  $x_5 = i_{L_i}$ ,  $u = v_{c_1}' - v_{c_1} = v_{c_1} - v_{c_1}'$ 라 놓고 정리하면 식(17)과 같이 된다.

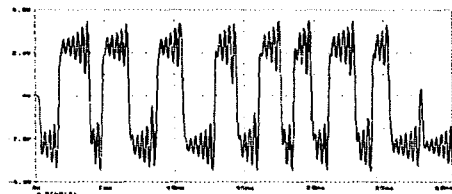
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(G+S_1)/C_1 & G/C_1 & 0 & 0 & 0 \\ G/C_2 & -G/C_2 & 1/C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(R_1+R_2)/L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + u \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)에 식 (18)의  
 $L, L' = 18mH \quad R_x = 780\Omega \quad C_1 = 0.062\mu F$   
 $C_1, C_1' = 10mF \quad G_y = 0.01\Omega$   
 $C_2, C_2' = 100mF \quad R_1 = 89.7\Omega$   
 $R, R' = 1.74K\Omega \quad L_1 = 0.04H \quad (18)$

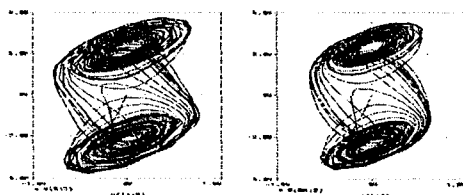
시스템 파라미터를 대입한 특성 방정식으로부터 안정도 판별에 의한 안정한 조건의  $R_x$ 와  $G_y$  값은  $R_x > 700\Omega, G_y > 0.0125\Omega$ 이 되며 이를 적용한 동기화 결과를 송,수신부의 시계열 데이터, 위상 공간으로 그림 9에 나타내었다.



(a) 송신부의 시계열 데이터



(b) 수신부의 시계열 데이터



(c) 송,수신부의 위상공간

그림 9. 등가 전력선 카오스 동기화 결과

### 3. 결 론

본 논문에서는 Chua 회로에서 새로운 카오스 동기화 방법인 구동-결합 이론을 제시하였다. 제시한 구동-결합 이론은 결합 동기 이론과 결합 동기 이론의 단점을 모두 해결 할 수 있을 것으로 보이며 특히 유선 전송 선로의 동기화 및 암호화 통신에 적용하여 동기화 및

암호화 통신에 활용될 것으로 기대한다.

### 감사의 글

이 논문은 과학기술부, 과학재단 지정 지역협력 센터인 여수대학교 설비자동화 및 정보 시스템 연구개발센터의 연구비 지원에 의해 연구되었음.

### [참 고 문 헌]

- [1] T. Matsumoto, "A Chaotic Attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. on Circuit and System, vol. CAS-31, pp. 1055 - 1058, 1984.
- [2] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 Bifurcation과 Attractor", 대한전기학회 하계 학술대회 논문집, pp.664 - 666, 1995.
- [3] 배영철, 고재호, 임화영, "구분 선형 함수의 최적 구현에 관한 연구", 한국자동제어학회 회의 논문집, pp. 370 - 373, 1995.
- [4] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 파라미터 변화에 의한 Period-doubling과 Bifurcation에 관한 연구", 한국 자동제어 학술 회의 논문집, pp. 482 - 485, 1995.
- [5] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert and L. O. Chua, "Experimental Demonstration of Secure Communication via Chaotic Synchronization" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 2, no. 3, pp. 709-713, 1992.
- [6] K. S. Halle, C. W. Wu, M. Itoh and L. O. Chua, "Spread Spectrum Communication through Modulation of Chaos" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 3, no. 2, pp. 469-477, 1993
- [7] 배영철, 고재호, 임화영, 유창완, 홍대승, "손실전송선로를 가진 Chua 회로에서의 카오스 비밀 통신에 관한 연구", 한국통신학회논문지, 24권, 10A호, 1539-1545. 1999.
- [8] 배영철, 임화영, "RLCG 전송선로를 가진 Chua 회로에서의 카오스 동기화에 관한 연구", 한국 통신학회논문지, 24권 11B호, 2030-2035. 1999.
- [9] 배영철, "등가전송선로를 가진 Chua 회로에서의 카오스 동기화 및 암호화 통신에 관한 연구", 한국해양정보통신학회논문지, 4권, 1호, 241-250. 2000.
- [10] 배영철, 고재호, 유창완, 홍대승, 임화영, "리아프노프 함수를 이용한 Chua 오실레이터 회로에서의 카오스 제어", 한국해양정보통신학회논문지, 3권, 1호, 113-120. 1999.