

Chua 회로에서의 카오스 동기화

배 영 철

여수대학교 전기공학과

Chaos Synchronization using Chua Circuit

Young-chul Bae

Nat'l Yosu University

E-mail : ycbae@yosu.yosu.ac.kr

Abstract

Chua's circuit is a simple electronic network which exhibits a variety of bifurcation and attractors. The circuit consists of two capacitors, an inductor, a linear resistor, and a nonlinear resistor. In this paper, a transmitter and a receiver using two identical Chua's circuits are proposed and a synchronizations methods are investigated. Since the synchronization of the transmission system or nonidea system are impossible by coupled synchronization, the drive-response synchronization theory were used.

1. 서 론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학, 공학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다.. Chua는 간단한 전자 회로로 카오스 현상이 존재함을 증명하였다. Chua 회로는 매우 단순한 자율, 3차계 시스템으로 가역성을 가지며 1개의 비선형 소자인 3구분 선형 저항 (3 - segment piecewise - linear resistor) 과 4개의 선형 소자인 (R, L, C₁, C₂)로 구성되는 발진회로다.

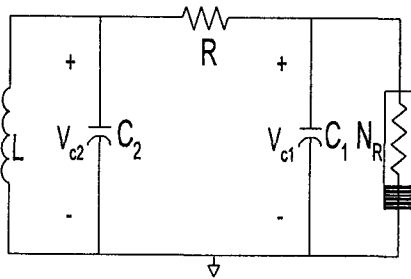


그림 1. Chua 회로

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로[1]를 그림 1에 나타냈으며 상태방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = G(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1})$$

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L \quad (1-1)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C_2}$$

여기서 $G = 1/R$, $g(\cdot)$ 는 식 (2)와 같이 표현되는 3구분 선형 함수 (3- segment piecewise-linear function) 이며 그림 2에 나타내었다.

$$g(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [|v_R + B_p| - |v_R - B_p|] \quad (1-2)$$

여기서 m_0 는 외부 영역의 기울기, m_1 은 내부 영역의 기울기, $\pm B_p$ 는 break-point이다.

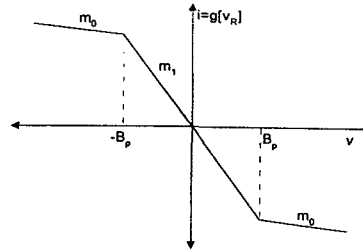


그림2. 비선형 저항의 전압 전류 특성

카오스 동기화에 관한 이론은 결합동기이론, 구동 동기 이론[5]이 제안되어 있으나 결합동기와 구동 동기 이론이 안되는 문제가 생긴다. 이에 본 연구에서는 동일한 2개의 Chua 회로 사이에 구동동기와 결합동기 이론을 혼합한 구동-결합 동기이론을 제안하고 적용 방법에 대하여 논하였다..

2. 관계이론

카오스 동기화와 관련된 이론으로 결합 동기 이론, 구동 동기 이론이 제시되어 있다.

2.1 결합 동기(Coupled Synchronization) 이론
결합 동기 이론은 Afraimovich에 의해 선형 확산 결합(linear diffusion coupling)으로 연결된 두 개의 동일한 카오스 회로는 똑같은 카오스 궤적을 갖는다는 것이 고찰된 이후 확립된 이론이다.

선형 확산 결합 변수에 의해 결정되는 2개의 Chua 회로는 다음식으로 정의된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y-x-f(x)) + \delta_x(x'-x) \\ \dot{y} &= x-y+z + \delta_y(y'-y) \\ \dot{z} &= -\beta y + \delta_z(z'-z) \end{aligned} \tag{2-1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \alpha(y'-x'-f(x')) + \delta_x(x-x') \\ \dot{y}' &= x'-y'+z' + \delta_y(y-y') \\ \dot{z}' &= -\beta y' + \delta_z(z-z') \end{aligned} \tag{2-2}$$

여기서 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 는 각각 x, y, z 결합에서의 결합 계수를 의미한다.

식(2-1)과 식(2-2)의 차 시스템(difference system)을 정의하면 식(2-3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} p(t) &= x(t) - x'(t) \\ q(t) &= y(t) - y'(t) \\ r(t) &= z(t) - z'(t) \end{aligned} \tag{2-3}$$

식(2-3)과 식(2-1), 식(2-2)로부터 차 시스템의 일반식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - 2\delta_x p \\ \dot{q} &= p - q + r - 2\delta_y p \\ \dot{r} &= -\beta q - 2\delta_z r \end{aligned} \tag{2-4}$$

식 (2-4)는 구분적 선형 특성을 갖기 때문에 식 (2-5)와 같은 행렬식으로 나타내면

$f(x) - f(x') = f(n)(x-x')$ 이고 $f(n)$ 은 두 개의 값 $a(RG_a)$ 와 $b(RG_b)$ 를 가지므로 (2-5)식의 행렬 A는 두 개의 표현을 갖는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

여기서 행렬 A는 다음 행렬

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \alpha a - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}$$

또는

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \alpha b - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}$$

중의 하나이다.

식(2-5)는 x, y, z 결합 시스템의 차 시스템의 행렬에 관한 일반식이며 위 행렬의 모든 고유값의 실수부가 음수이면 식 (2-4)의 평형점은 안정하다는 것을 의미하며 이는 식(2-1)과 식(2-2)의 R^6 위상 공간에서 $(x, y, z, x', y', z': x=x', y=y', z=z')$ 가 되어 서로 점근적으로 접근하고 있음을 의미한다.

2.1.1 x-결합 시스템

x결합 Chua 동기화 회로를 그림 3에 나타내었다.

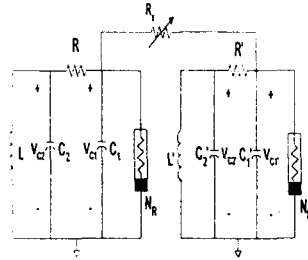


그림 3. x-결합 시스템

그림 3의 상태 방정식을 세우면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

송신측 상태 방정식

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) + \frac{1}{R_x}(v_{c_1}' - v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{aligned} \tag{2-6}$$

수신측 상태 방정식

$$\begin{aligned} C_1' \frac{dv_{c_1}'}{dt} &= \frac{1}{R'}(v_{c_2}' - v_{c_1}') - g(v_{c_1}') + \frac{1}{R_x}(v_{c_1} - v_{c_1}') \\ C_2' \frac{dv_{c_2}'}{dt} &= \frac{1}{R'}(v_{c_1}' - v_{c_2}') + i_L' \\ L' \frac{di_L'}{dt} &= -v_{c_2}' \end{aligned} \tag{2-7}$$

식 (2-6)과 식 (2-7)의 상태 방정식을 차원이 없는 (dimensionless) 형태로 변환하기 위하여 식(2-8)과 같이 새로운 파라미터 값으로 치환하고 상태방정식을 나타내면 식 (2-9), 식 (2-10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = \frac{v_{c1}}{B_p}, \quad y = \frac{v_{c2}}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{B_p G}, \quad \tau = \frac{tG}{C_2}, \quad a = RG_a, \quad b = \frac{R^2}{C_2^2} b_b, \quad (2-8)$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{C_2 R^2}{L}, \quad t = \frac{C_2 \tau}{G}, \quad v_{c1} = B_p x, \quad v_{c2} = B_p y$$

차원이 없는 송신부의 상태방정식

$$\dot{x} = a(y - x - f(x)) + \delta_x(x' - x) \quad (2-9)$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

차원이 없는 수신부의 상태 방정식

$$\dot{x}' = a(y' - x' - f(x')) + \delta_x(x - x') \quad (2-10)$$

$$\dot{y}' = x' - y' + z'$$

$$\dot{z}' = -\beta y'$$

여기서 $\delta_x = \frac{R\alpha}{R_x}$ 이다.

식 (2-9)과 식 (2-10)에서 차 시스템을 정의하면 식 (2-11)과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{p} = a q - a p - S_i a p - 2 \delta_x p \quad (2-11)$$

$$\dot{q} = p - q + r$$

$$\dot{r} = -\beta q$$

식 (2-11)을 행렬식으로 나타내면 식 (2-12)와 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - S_i a - 2\delta_x & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

여기서 $S_i = a, b; i=1, 2$ 이다.

식 (2-11)에서 평형점을 구해보면 유일한 평형점은 (0,0,0)이 되며 이 평형점의 안정성을 판별하기 위해 특성 방정식을 구하면 식 (2-13)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \lambda + a + S_i a + 2\delta_x & -a & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \beta & \lambda \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\lambda^3 + (a + S_i a + 2\delta_x + 1)\lambda^2 + (S_i a + 2\delta_x + \beta)\lambda + \beta(a + S_i a + 1) = 0$$

여기서

$$k = a + S_i a + 2\delta_x + 1$$

$$\rho = S_i a + 2\delta_x + \beta$$

$$\sigma = (a + S_i a + 2\delta_x)\beta \quad \text{라 놓으면 식 (2-13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.}$$

$$\lambda^3 + k\lambda^2 + \rho\lambda + \sigma = 0 \quad (2-14)$$

식(2-14)를 Routh Hurwitz의 안정도 판별을 구해보면

	1	ρ
λ^2	k	σ
λ^1	$\frac{k\rho - \sigma}{k}$	
λ^0	σ	

Routh Hurwitz 안정도 판별 조건에 의해

$$k > 0, \quad \frac{k\rho - \sigma}{k} > 0, \quad \sigma > 0 \quad \text{이라하면}$$

$p = q = r = 0$ 은 안정점이고 두 카오스 회로는 동기한다.

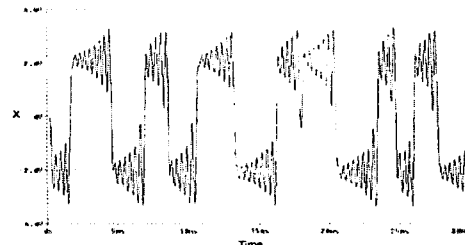
즉

$$a = 10, \quad \beta = 14.87, \quad \alpha = -1.27, \quad b = -0.68$$

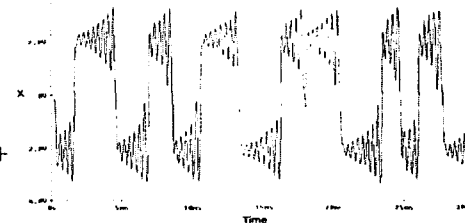
을 대입하여 $k > 0, \quad \frac{k\rho - \sigma}{k} > 0, \quad \sigma > 0$ 의 조건을 만족

하는 δ_x 를 내부 영역과 외부 영역으로 나누어 구하면 8개의 값이 구해지며 가장 큰 값이며 충분 조건으로서 $\delta_x > 5.56$ 이 되며 이 조건에서 x결합에 의한 동기화가 이루어질 것으로 생각되나 컴퓨터 시뮬레이션의 경우 $\delta_x > 0.5 (R_x = 3.34 K\Omega)$ 의 조건에서 동기화가 이루어졌다.

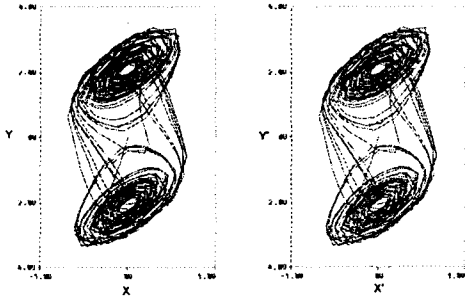
이는 충분 조건만을 만족시키는 이론적인 값과 실험적인 사항을 고려한 값과의 오차 때문에 결합 저항 R_x 의 값을 적절하게 선정해야 할 것으로 생각한다. 그림 4에 Chua x 결합 동기화 결과를 나타내었다.



(a) Time series of transmitter



(b) Time series of receiver



(c) Phase portrait of transmitter-receiver

그림 4. x결합 동기화 결과

2.2 구동 동기(Drive-Response Synchronization) 이론

Pecora와 Carroll에 의해 제시된 구동 동기 이론은 다음과 같다. 식(2-15)와 같은 자율 n차원 동력학 시스템을 고려하자.

$$\frac{du}{dt} = F(u) \tag{2-15}$$

이 시스템을 두 개의 부시스템 ($u = (v, w)$)로 나누면 식(2-16)과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} = G(v, w), \quad \frac{dw}{dt} = H(v, w) \tag{2-16}$$

여기서

$$v = (u_1, \dots, u_m), \quad G = (F_1, \dots, F_m),$$

$$w = (u_{m+1}, \dots, u_n), \quad H = (F_{m+1}, \dots, F_n)$$

이다.

다음에 w 부시스템과 동일한 새로운 부시스템 w' 를 만들면 $(2n-m)$ 차원 시스템으로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} = G(v, w), \quad \frac{dw}{dt} = H(v, w), \quad \frac{dw'}{dt} = H(v, w') \tag{2-17}$$

이때 $v-w$ 시스템을 구동 시스템(drive system), w' 부시스템을 응답 시스템(response system)이라 한다. 만약 $w'(t)$ 가 $w(t)$ 에 점근적으로 수렴하게 된다면 동기화가 되었다고 말한다. 즉, 구동 동기 이론은 구동 시스템 상태 변수 중 몇 개의 상태 변수만을 응답 시스템으로 전송하면 전송된 몇 개의 상태 변수들에 의해 전송되지 않은 나머지 상태 변수들을 가지고 응답 시스템에 나타나게 하여 동기를 이루는 방법이다. 구동 동기 이론에 의한 동기화 결과는 응답 시스템의 CLE(Conditional Lyapunov Exponent)가 모두 음수일 때 동기화가 이루어진 것으로 본다. 부시스템이 선형일 때 CLE는 차 시스템을 이용하여 식(2-18)을 계산한 다음 식(2-19)를 계산한다.

$$\zeta(t) = \omega(t) - \omega'(t) \tag{2-18}$$

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{\omega}(t) - \dot{\omega}'(t) = H(v, w) - H(v, w') \tag{2-19}$$

이때 부시스템이 선형이라면 식(2-19)는 식(2-20)과 같이 놓을 수 있다.

$$\dot{\zeta}(t) = A\zeta(t) \tag{2-20}$$

여기서 A 는 $(n-m) \times (n-m)$ 상수 행렬이다.

A 의 고유값을 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m})$ 이라 할 때 이들 고유값의 실수부가 CLE가 된다.

이때 CLE의 모든 값이 음수이면 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ 되어

부시스템은 동기화, CLE가 양수이면 부시스템은 동기화 되지 않음을, CLE가 0이라면 수렴도 발산도 하고 초기 조건에 의한 일정거리를 유지함을 나타내기 때문에 CLE 값으로 동기화를 판정할 수 있다.

2.2.1 x 구동 시스템

그림 5에 x 구동 동기화 회로를 나타내었다.

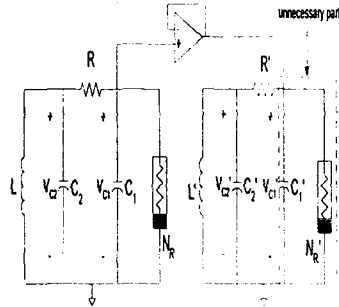


그림 5. x-구동 시스템

그림 5의 차원이 없는 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y-x-f(x)) \\ \dot{y} &= x-y+z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \tag{2-21}$$

$$\dot{y}' = x' - y' + z' \tag{2-22}$$

$$\dot{z}' = -\beta y'$$

식(2-21)과 (2-22)의 차 시스템은 식 (2-3)에서 정의한 바와 같이 $q = y - y'$, $r = z - z'$ 라 놓고 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

특성 다항식을 구해보면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ \beta & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \beta = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-1} \tag{2-24}$$

차 시스템의 고유값의 실수부가 CLE 이므로 CLE는

(-0.5,-0.5)가 되어 안정화되고 부시스템은 동기화 된다. 그림 6에 x구동 동기화 결과를 나타내었다. 그림 6에 알 수 있듯이 완전한 동기화가 됨을 확인할 수 있다.

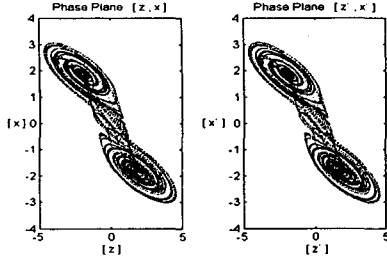


그림 6. x구동 동기화 결과

3. 구동-결합 동기 이론

구동 동기는 시스템에 따라 구동하지 못하는 경우가 생기고 결합 동기는 불안정한 영역이 발생하여 동기화를 이루지 못하는 경우가 있다. 이를 해결하기 위해 결합 동기 이론과 구동 동기 이론을 합성한 구동-동기 이론을 본 논문에서 제시하였다. 구동-결합 동기화 회로를 그림 6에 나타내었다.

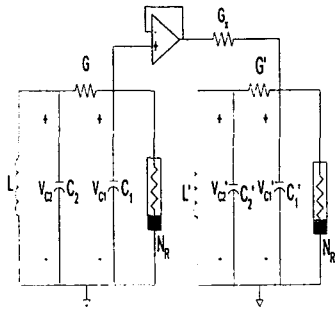


그림 7. 결합-구동 동기화 시스템

그림 7 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \text{송신부의 상태 방정식} \\
 & C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} = G(v_{c2} - v_{c1}) - g(v_{c1}) \\
 & C_2 \frac{dv_{c2}}{dt} = G(v_{c1} - v_{c2}) + i_L \\
 & L \frac{di_L}{dt} = -v_{c1}
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{수신부의 상태 방정식} \\
 & C_1' \frac{dv_{c1}'}{dt} = G'(v_{c2}' - v_{c1}') - g(v_{c1}') + G_x(v_{c1} - v_{c1}') \\
 & C_2' \frac{dv_{c2}'}{dt} = G'(v_{c1}' - v_{c2}') + i_L' \\
 & L' \frac{di_L'}{dt} = -v_{c2}'
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

식 (3-1)과 식 (3-2)의 차 시스템을 구하여 결합 동기와 구동 동기 이론에서 작용한 파라미터 값을 가지고 안정한 G_x 값을 구하면 $G_x > 0.67$ 이 됨을 알 수 있다. 그림 8에 구동-결합 Chua 회로의 동기화 결과를 나타내었다.

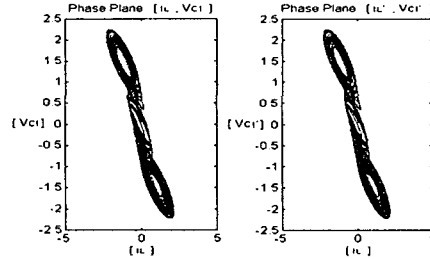


그림 8. 결합-구동 동기화 결과

제안된 구동-결합 동기화 결과 완전한 동기화가 이루어졌음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 Chua 회로에서 새로운 카오스 동기화 방법인 구동-결합 이론을 제시하였다. 제시한 구동-결합 이론은 결합 동기 이론과 결합 동기 이론의 단점을 모두 해결 할 수 있을 것으로 보이며 특히 유선 전송 선로의 동기화 및 암호화 통신에 적용하여 동기화 및 암호화 통신에 활용될 것으로 기대한다.

이 논문은 과학기술부, 과학재단 지정 지역협력 센터인 여수대학교 설비자동화 및 정보 시스템 연구개발센터의 연구비 지원에 의해 연구되었음.

[참 고 문 헌]

- [1] T. Matsumoto, "A Chaotic Attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. on Circuit and System, vol. CAS-31, pp. 1055 - 1058, 1984.
- [2] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 Bifurcation과 Attractor", 대한전기학회 하계 학술대회 논문집, pp. 664 - 666, 1995.
- [3] 배영철, 고재호, 임화영, "구분 선형 함수의 최적 구현에 관한 연구", 한국자동제어학회 회의 논문집, pp. 370 - 373, 1995.
- [4] 배영철, 고재호, 임화영, "Chua 회로에서의 파라미터 변화에 의한 Period-doubling과 Bifurcation에 관한 연구", 한국 자동제어 학술 회의 논문집, pp. 482 - 485, 1995.
- [5] L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert and L. O. Chua, "Experimental Demonstration of Secure Communication via Chaotic Synchronization" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 2, no. 3, pp. 709-713, 1992.
- [6] K. S. Halle, C. W. Wu, M. Itoh and L. O. Chua, "Spread Spectrum Communication through Modulation of Chaos" Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 3, no. 2, pp. 469-477, 1993