

경사 투영을 사용한 컬러 이미지 스케일링

김준목 *, 정원용 *

경남대학교

Color Image Scaling Using Oblique Projection

Kim, Jun-Mok *, Chong, Won-yong *

Kyungnam University

E-mail : mandream@dreamwiz.com, wychong@kyungnam.ac.kr

요약

본 논문에서는 컬러이미지의 스케일링(scaling)을 위해 경사투영방법을 사용하여 기본적인 보간 방법, 최소자승근사(least square approximation)의 결과들과 비교하여 보았다. 경사투영방법은 최소의 근사오차(approximation error)를 제공하는 수직투영(orthogonal projection)방법과 유사한 결과를 제공하며 전처리 필터 디자인에 자유성을 부여하고, 좀 더 일반화된 형태의 보간 방법이다. 사용된 방법을 기본적인 보간법들과 비교하여 보았을때 더 좋은 PSNR의 결과를 얻을 수 있었으며 최소자승근사 방법과 유사한 결과들을 얻을 수가 있었다.

스플라인의 경우 최적의 전처리 필터를 위한 정확한 수치적 계산이 어렵다는 것이다. 이에 최소의 근사오차를 가진 수직투영 방법과 근접한 효과를 얻을 수 있는 경사 투영근사 방법을 사용한다. 이것은 전처리 필터의 디자인에 가능한 많은 자유성을 부여하고 더욱 일반화된 형태를 제공한다[2].

본 논문에서는 컬러이미지에 여러 가지 보간방법을 사용하여 그 결과를 비교하여 보았다. 기본적으로 컬러 이미지를 HSI로 변환하고 이중 I(intensity)성분만 스케일링을 수행하도록 하였다. 2장에서는 기본적인 원리에 대해 설명하고, 3장은 스플라인의 연속/ 이산표현에 대해 기술한다. 4장은 최소자승근사에 대해 기술하며, 5장은 경사투영에 대해 기술한다. 마지막으로 실험 및 결과와 결론 순으로 기술한다.

I. 서론

정보 전달의 대형화와 신속화에 부응하기 위해 이미지의 확대·축소가 그 어느 때보다 절실히 요구되고 있다. 기존의 고차보간 방법(전형적으로 $n \geq 3$)이 이미지의 확대, 회전등에 매우 좋으나 잠정적인 에일리어싱(aliasing) 문제 때문에 이미지 축소에는 다소 문제가 있다. 최근 축소, 확대 과정에서 발생하는 블록킹(blocking)과 뭉툭화(blurring) 효과를 최소화하기 위하여 샘플링 이전에 연속적인 전처리필터를 적용하는 방법이 제안되었다[1]. 이 방법은 최소 자승공간에서 최적 근사를 하고 축소, 확대된 이미지에 수직투영을 이행한다. 그러나 이 방법의 단점은 고차의

II. 기본적인 알고리즘 원리

보간법을 사용한 이미지 스케일링은 기본적으로 회전없이 단지 좌표축에 따른 스케일링만을 고려한다. 즉 이미지 각각의 행 또는 열을 일차원(1-D)으로 처리함으로써 이미지의 스케일링을 효과적으로 수행할 수 있다. 1-D 신호 $s(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ 의 스케일링은 다음과 같은 방법으로 진행되어진다[1].

1) 이산 1-D 데이터 집합 $s(k)$ 에 일치하는 연속적으로 정의된 함수 $g(x)$ 를 생성한다. 각각의 데이터 점들은 정확한 보간으로 제공되어 진다.

$$g(x)|_{x=k} = s(k)$$

2) 연속으로 정의된 함수 $g(x)$ 로부터 scaling 요소 a 에 의해 크기가 변형된 함수를 생성한다.

$$f(x) = g\left(\frac{x}{a}\right)$$

3) 함수 $f(x)$ 를 정수로 다시 샘플링하거나 주어진 샘플링공간에 근사치를 충당함으로써 표현한다.

본 논문에서는 보편적인 손실이 없도록 보간 함수들을 힐버트 공간 $V(\varphi)$ 에 놓여있다고 가정한다. 이것은 어떤 함수 $s(x) \in V(\varphi)$ 가 이것의 이산적인 값, 또는 샘플링된 값 $s(k)$ 에 의해 유일하게 결정되어짐을 나타낸다. 제안한 스케일링 방법은 단계 3에서 곧바로 샘플링하는 대신 힐버트 공간 $V(\varphi)$ 로 $f(x)$ 를 투영한 값 $\check{f}(x)$ 로서 $f(x)$ 를 근사하는 것이다. 결국 크기 변형된 일차원 디지털 신호는 출력 $\check{f}(x)$ 의 샘플에 일치하게 된다.

III. 연속/ 이산신호의 표현

$V(\varphi) \subset L_2$ 공간내에서 신호가 존재하도록 선택한다.

$$V(\varphi) = \{ s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \varphi(x-k) | c \in l_2 \} \quad (1)$$

이때 l_2 는 수열의 제곱적분 가능한 벡터 공간이다. 단지 생성함수 $\varphi(x)$ 의 선택상의 제한은 다음과 같다.

$$0 < A \leq \widehat{a}_\varphi(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w+2\pi k)|^2 \leq B < +\infty \quad (2)$$

$\widehat{\varphi}(w)$ 는 $\varphi(x)$ 의 푸리에 변환이며 A, B 는 Riesz bounds라고 한다. 이런 제약들은 φ 의 정수 shift는 선형적으로 독립이고 $V(\varphi)$ 내의 각각의 함수 $s(x)$ 는 이것의 계수 $c(k)$ 의 수열에 의해 유일하게 특성화된다.

$\widehat{a}_\varphi(w)$ 은 자기상관함수(autocorrelation) $a_\varphi(k) = \langle \varphi(x), \varphi(x+k) \rangle$ 의 푸리에 변환이다. 개별적인 선택에서 $\varphi(x) = \beta^n(x)$ (n 차의 B-스플라인)

로 선택한다[3].

주어진 표현공간 $V(\varphi)$ 에서 일반적으로 유일한 보간 커널 $\varphi_{int}^n(x)$ 는 다음과 같다.

$$\varphi_{int}^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b^n)^{-1} \beta^n(x-k) \quad (3)$$

$(b^n)^{-1}$ 은 수열 $b^n(k) := \varphi(x)|_{x=k}$ 의 역 컨벌루션으로 생성함수의 샘플된 형태로 나타난다. $\varphi_{int}^n(x)$ 는 카르널 스플라인(cardinal spline)이라고 한다. 만일 B-스플라인 표현(4)와 스플라인 보간의 표현(5)을 가지고 (3)의 카르널 스플라인 표현과 비교하여 보면

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k) \quad (4)$$

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \varphi_{int}^n(x-k) \quad (5)$$

$$c(k) = ((b^n)^{-1}) * s(k) \quad (6)$$

이다.

이들 표현 사이에서의 변환은 디지털 필터링으로 이행할 수 있다. 이 공식은 빠른 스플라인 보간 알고리즘으로 B-스플라인 계수를 회귀적으로 anti-causal 지수 함수적인 필터의 직렬연결로 사용하여 계산된다[4].

IV. 최소자승 근사

주어진 임의의 함수 $f \in L_2$ ($f(x) = g\left(\frac{x}{a}\right)$)인 경우 g 는 입력신호를 보간한 함수이고 a 는 요구되는 스케일링 요소의 값이다[6].

$V(\varphi)$ 로의 f 의 수직투영은 다음과 같이 표현된다.

$$(P_\varphi f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(x), \varphi(x-k) \rangle \varphi(x-k) \quad (7)$$

$\dot{\varphi} \in V(\varphi)$ 는 φ 의 듀얼(dual)이며 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\varphi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_\varphi)^{-1}(k) \varphi(x-k) \quad (8)$$

$(a_\varphi)^{-1}$ 은 자기상관함수 수열의 역 컨벌루션이다($a_\varphi := \langle \varphi(x), \varphi(x-k) \rangle$)

$P_\varphi f$ 는 $V(\varphi)$ 공간에서 f 의 최소 L_2 -에러 근사를 제공한다. 듀얼 해석함수(dual analysis

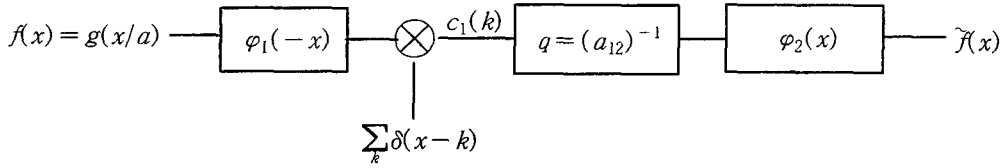


그림 1 경사 투영

function) φ 는 합성 함수 φ 의 선택에 유일하게 결정되기 때문에 복잡하게 된다. 따라서 연속적인 형태에 적용하기 위해 적당한 전처리 필터링을 이행하기는 상당히 어렵다.

V. 경사 투영

그림 1에서와 같이 생성함수 $\varphi_2 = \varphi$ 는 독립적으로 선택이 가능하며 공간사이의 불일치에 의한 에러를 보상하기 위해서 같은 시스템 영역에 놓여있는 벡터에서 입력신호 $f(x)$ 와 이것의 근사 $\tilde{f}(x)$ 를 일치시키기 위한 디지털 교정 필터(correction filter)를 포함한다.

$$C(k) := \langle f(x), \varphi_1(x-k) \rangle \\ = \langle \tilde{f}(x), \varphi_1(x-k) \rangle \quad (9)$$

이런 조건에서 근사 $\tilde{f}(x)$ 는 $V(\varphi_1)$ 의 해석공간에 수직인 $V(\varphi_2)$ 로의 $f(x)$ 의 투영이며 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{f}(x) = P_{2\perp 1} f(x) = \sum_{k \in Z} (q * C_1)(k) \varphi_2(x-k) \quad (10)$$

여기서 $q = (a_{12})^{-1}$ 는 상호상관함수 $a_{12}(k) := \langle \varphi_1(x-k), \varphi_2(x) \rangle$ 의 역 컨볼루션이다. 이 투영의 근사 오차가 $V(\varphi_1)$ 에 수직이라는 특별한 특성을 가진다. 그래서 $\varphi_1 \in V(\varphi_2)$ 또는 $V(\varphi_1) = V(\varphi_2)$ 하지 않으면 투영의 오차는 근사공간 $V(\varphi_2)$ 에 수직이지 않아 이런 형태를 경사(oblique)라고 한다. 경사투영은 일반적으로 최적의 형태가 아니다. 그러나 다음의 두 수학적 결론으로서 수직투영과 유사한 결과를 출력함을 알 수 있다.

첫째 오차의 경계치는 다음과 같이 정의 될 수

있다[6].

$$\forall f \in L_2, \|f - P_2 f\| \leq \|f - P_{2\perp 1} f\| \leq \frac{1}{\cos \theta_{12}} \|f - P_2 f\| \quad (11)$$

$P_{2\perp 1} f$ 는 (8)로 정의되고, $P_2 f$ 는 $V(\varphi_2)$ 위로의 f 의 수직 투영을 나타내고 θ_{12} 는 $V(\varphi_1)$ 과 $V(\varphi_2)$ 사이의 최대의 각도를 나타낸다.

둘째로 양쪽의 근사 방법은 샘플링 구간이 0으로 접근할수록 같은 점근선을 가지게 된다. 수직투영과 경사투영사이의 결과적인 차이는 스케일링이 증가할수록 없어진다.

만일 우리가 $f_a(x) = f(x/a)$ 로 정의하면

$$\|f_a(x) - P_2 f_a\| = C \|f_1^{(L)}\| a^{-L} + O(a^{-(L+1)}) \\ \text{and} \quad (12) \\ \|f_a(x) - P_{2\perp 1} f_a\| = C \|f_1^{(L)}\| a^{-L} + O(a^{-(L+1)})$$

이다.

각각의 경우 C는 같은 상수이다. 정수 $L=n+1$ 은 표현된 차수로 나타난다[7].

VI. 실험 및 결과

평가를 계산하기 위해 보완적인 이미지 축소와 확대를 연속적으로 이행하였다. 입력과 출력사이의 각도 θ_{12} 가 (9)에서 정의된 오차 경계를 넘지 않는다는 중요한 제한 조건을 가지고 기본적인 보간을 수행한다. 정보의 전체적 손실은 근사된 이미지와 초기의 디지털 이미지 사이의 차의 제곱 평균 관계에 의해 계산되고, 데시벨(dB)로 표현된다. 본 논문에서는 SNR(signal to noise rate)의 평가를 위해 가장 널리 사용되고 있는 PSNR(peak signal to noise ratio)을 사용하였다.

임의의 무리수의 스케일링 요소의 집합을 선택하고 이미지를 축소하고 같은 스케일링 요소로 다시 이미지를 확장하였다.

그림 2은 lena 이미지의 $\sqrt{2}$ 배 축소 후 $\sqrt{2}$ 확

대한 결과이다. 경사 투영의 경우, 스플라인 보간보다 2 dB 정도의 PSNR이 증가하였음을 확인할 수가 있다. R, G, B 각각의 이미지 스케일링은 컬러성분의 변화를 유발시킨다. 따라서 컬러를 H, S, I로 분해한 후 그중 'I'성분에 대해 스케일링을 수행하였다. 그림2에서 (b)는 미소한 몽롱화가 나타나고, (c)와 (d)에서는 (b)에 비해 선명한 결과 이미지를 나타내었다. (e)와 (f)는 각각 Bilinear방법과 경사투영방법에 의한 보간결과와 원 이미지와의 차를 경계 값 10을 적용하여 그 차이를 나타내었다.

지의 보간을 통한 스케일링을 수행하였다. 경사 투영은 수직의 투영에 의한 것보다 간단하며 더욱 일반적인 알고리즘을 얻을 수가 있었다. 경사 투영 알고리즘은 기본적인 보간 방법보다 PSNR의 값으로 볼 때 더 좋은 결과를 나타낼 수 있다. 또한 임의의 확대 요소를 처리하는 방법으로서 특히 이미지의 축소에 더욱 적당하다고 할 수 있다. 그러나 경사투영의 연산자를 사용한 이미지의 축소의 경우 $n \geq 3$ 에서 침식의 경향이 나타나고, 가는 선들의 손실이 나타난다. 이는 앞으로 보완하여야 할 것으로 사료된다.



(a) Lena 이미지

(b) Bilinear
PSNR:33.9821dB



(c) 수직 투영 n=2
PSNR: 35.9804dB

(d) 경사 투영n=2
PSNR: 36.0041dB



(e) Bilinear 오차이미지 (f) 경사투영 오차이미지
그림2 보간 결과와 오차 이미지

참고문헌

- [1] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, Enlargement or reduction of digital images with minimum loss of information, IEEE Trans. Image Processing, vol. 4, pp. 247-258, 1995.40, pp. 2207-2232, Sept. 1992.
- [2] C.Lee, M. Eden and M. Unser, "High quality image resizing using oblique projection operator" IEEE Trans, Image Processing, vol. 7 no.5, pp.679-692, 1998
- [3] I. J. Schoenberg, "Cardinal Spline Interpolation", Philadelphia, PA: SIAM 1973
- [4] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "B-spline signal processing, Part II: Efficient design and applications, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, pp. 834-848, Feb. 1993. SIAM, 1973. pp. 167-206, 1969.
- [5] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, B-spline signal processing. Part I: Theory, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, pp. 821-833, Feb. 1993.
- [6] M. Unser and A. Aldroubi. "A general sampling theory for nonideal acquisition devices", IEEE Trans, Signal Processing, vol. 42, 2915-2925, 1997
- [7] M. Unser, approximation power of biorthogonal wavelet expansions, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, pp. 519-527, Mar. 1996.

Ⅶ 결 론

본 논문에서는 경사 투영에 기반 한 컬러이미