

회귀방정식과 PID제어기에 의한 DC모터 제어

서기영* · 이수흠* · 문상필* · 이내일* · 최중수**
 * 경남대학교 전기공학과 · ** 영진대학 전자정보계열

DC Motor Control using Regression Equation and PID Controller

K Y Suh* · S H Lee* · S P Mun* · N I Lee* · J S Choi**
 * Kyungnam University · ** Yeungjin College
 sooheum@kyungnam.ac.kr

ABSTRACT - We propose a new method to deal with the optimized auto-tuning for the PID controller which is used to the process control in various fields. First of all, in this method, initial values of DC motor are determined by the Ziegler-Nichols method. Finally, after studying the parameters of PID controller by input vector of multiple regression analysis, when we give new K, L, T values to multiple regression model, the optimized parameters of PID controller is found by multiple regression analysis program.

1 PID제어기의 구성

우선 설비 시스템에 사용되는 제어기를 구성하기 위하여 PID제어기의 전달함수($G_c(s)$)와 본 논문에서 제안한 DC모터($G_p(s)$)로 모델링된 제어대상의 파라미터들을 이용하여 제어기의 페루프 전달함수를 정식화하고, 이로부터 제어대상의 계단응답을 역라플라스변환에 의하여 계산할 수 있도록 한다. 아래그림은 플랜트 PID제어의 개략도를 나타낸 것이다.

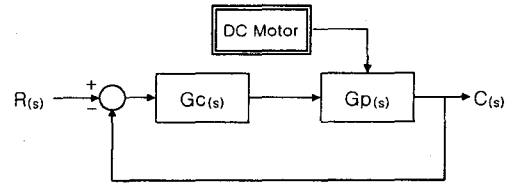


그림 1. 플랜트의 PID제어
 Fig. 1. PID control of plant

I 서 론

산업현장에서 계 구성의 단순성, 견실성 그리고 넓은 적응성의 장점으로 제어기술자에게 널리 사용되는 제어기¹⁾인 PID 제어기는 지난 세월간 마이크로 프로세서의 발전과 더불어 PID 제어계수를 경험적인 방법으로 수동으로 동조해왔던 것을 자동으로 동조하는 연구가 활발히 진행되고 있는 중이다.^{2),3)}

본 연구에서는 이러한 점을 착안하여 PID 제어기의 최적 자동 동조에 관한 새로운 설계방법을 제안하고자 한다.

이 방법은 기존의 Ziegler-Nichols의 한계값도법⁴⁾을 사용하여 초기값을 정한 후 이때의 PID 제어기 계수들을 저장하여 다변량 다중선형회귀모형⁵⁾에 입력값으로 적용시킨 후, 제어대상인 DC모터의 위치제어⁶⁾에 적용하는 방법으로 기존의 Ziegler-Nichols방법보다 빠르고 근사화된 PID 제어기 계수를 얻고자 한다.

II PID제어기의 구성

이 장에서는 기본적인 Ziegler-Nichols의 PID 제어기와 이때의 계수를 입력으로 하여 PID 제어기 계수를 찾아가는 다중 선형회귀모형에 대하여 서술한다.

다음은 기존의 Ziegler-Nichols방법을 통해 산출된 PID계수를 입력으로 하여 구한 다변량 다중선형회귀모형의 블록선도를 그림 2에 나타내었다.

이 블록선도에서는 기존의 Ziegler-Nichols방법에 의해 구해진 PID계수를 저장하여 다변량 다중선형회귀모형의 입력부에 제어대상의 초기값과 함께 벡터형식으로 입력시켜서 모수추정법을 이용한 것으로 회귀모형을 통하여 빠르게 근사화한 PID계수를 구할 수 있다.

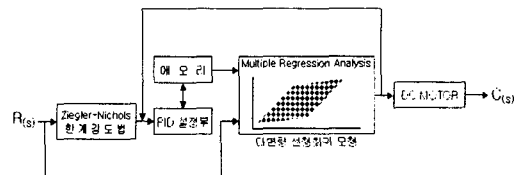


그림 2. 다변량 다중선형회귀모형 블록선도
 Fig. 2. Block diagram of PID control system using multiple regression model

2 제어기 및 제어대상의 정식화

제어대상을 수학적 모델로 유도할 수 있는 경우, 페루프 시스템의 과도 및 정상 상태의 조건을 만족하는 제어기의 파라미터를 결정하는데 여러 가지 설계방식의 적용이 가능하지만 제어 대상이 너무 복잡하여 수학적 모델을 쉽게 얻을 수 없을 때에는 PID제어기 설계의 해석적 접근이 불가능하므로 제어기 설계에 실험적 접근이 필요하다.

따라서, 시뮬레이션에 사용한 PID제어기의 전달함수는 다음과 같이 정의한다.

$$G_C(S) = K_P(1 + \frac{1}{T_I S} + T_D S) \quad (2.1)$$

여기서 K_P 는 제어기의 비례이득, T_I 는 적분시간, T_D 는 미분시간이다.

그리고 Ziegler-Nichols의 한계감도법에 의해 식(2.1)에서 초기 PID 제어계수를 $T_D=0$, $T_I=\infty$ 로 설정함으로써 전달함수는 다음과 같다.

$$G_C(S) = K_P \quad (2.2)$$

제어대상은 본 논문에서 제한한 DC모터의 위치 제어로서 이때의 제어대상의 전달함수는

$$G_P(S) = \frac{\theta}{V} = \frac{K}{s((Js+b)(Ls+R)+K^2)} \quad (2.3)$$

와 같고 식(2.2)와 식(2.3)에 의해서 전방경로 전달함수 $G(s)$ 를 계산하면, 다음과 같다.

$$G(s) = K_P \frac{\theta}{V} = \frac{K_P K}{s((Js+b)(Ls+R)+K^2)} \quad (2.6)$$

최종적으로 제어대상의 페루프 전달함수를 계산하면,

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K_P K}{s((Js+n)(Ls+R)+K^2)+K_P K} \quad (2.7)$$

가 된다.

이제 제어대상의 계수만 결정되면 Ziegler-Nichols의 한계감도법 및 Routh-Hurwitz의 안정도 판별법을 이용하여 PID 제어계수 (K_P, T_I, T_D)를 결정한다.

3 다변량 다중선형회귀모형

다변량 다중선형회귀모형은 목표치인 입력벡터와 임의의 구하고자 하는 값의 오차제곱합을 최소화하는 최소제곱법에 의해서 구해지는 일종의 병렬 분산 처리를 하는 시스템으로서 2.2절에서의 방법으로 구한 PID계수들을 다변량 다중선형회귀모형의 목표벡터에 넣어 그것들에 대한 계산을 하게 되면, 그 목표벡터 범위 내에서의 값들은 기존의 Ziegler-Nichols 방법보다 빠르고 근사화한 응답특성을 볼 수 있게 된다.

다변량 다중선형회귀모형 알고리즘에서 n 개의 p -차원 반응변수벡터 $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ip})'$ 과 m 개의 설명변수 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}$, $i=1,$

$2, \dots, n$ 의 관계에 대하여 다음과 같은 선형회귀모형을 고려하여 보자.

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \beta_{01} + \beta_{11}x_{i1} + \beta_{21}x_{i2} + \dots + \beta_{m1}x_{im} + \epsilon_{i1} \\ Y_{i2} &= \beta_{02} + \beta_{12}x_{i1} + \beta_{22}x_{i2} + \dots + \beta_{m2}x_{im} + \epsilon_{i2} \\ &\vdots \\ Y_{ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{i1} + \beta_{2j}x_{i2} + \dots + \beta_{mj}x_{im} + \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$Y_{ip} = \beta_{0p} + \beta_{1p}x_{i1} + \beta_{2p}x_{i2} + \dots + \beta_{mp}x_{im} + \epsilon_{ip}$$

여기서 β 는 회귀계수라 부르는 모수이며, 오차벡터 $\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{ip})'$ 는 서로 다른 오차벡터와 독립적으로 분포되어 있는 확률변량으로서, $E(\epsilon_i) = 0$, $Var(\epsilon_i) = \Sigma$ 그리고 $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$, $i \neq j$ 의 성질을 가진다.

위의 관계를 행렬을 사용해서 나타내면,

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{np} \end{bmatrix} = [Y_{(1)} | Y_{(2)} | \dots | Y_{(p)}] = \begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ \vdots \\ Y_n' \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1m} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix} = [X_{(1)} | X_{(2)} | \dots | X_{(m)}] = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{bmatrix} \\ \beta &= \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mp} \end{bmatrix} = [\beta_{(1)} | \beta_{(2)} | \dots | \beta_{(p)}] \\ \epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1p} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \dots & \epsilon_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{n1} & \epsilon_{n2} & \dots & \epsilon_{np} \end{bmatrix} = [\epsilon_{(1)} | \epsilon_{(2)} | \dots | \epsilon_{(p)}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1' \\ \epsilon_2' \\ \vdots \\ \epsilon_n' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

이 때, 다변량 선형회귀모형은 다음과 같이 표현된다.

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (2.15)$$

단, $E(\epsilon_{(i)}) = 0$, $Cov(\epsilon_{(i)}, \epsilon_{(k)}) = \delta_{ik} I_n$,

$i, k = 1, 2, \dots, p$

따라서, j 번째 시행(즉, j 번째 관찰개체)의 p 개 관찰값들의 공분산행렬은 Σ 이지만, 각 시행은 서로 무상관의 관계가 있다. 다시말하면, i 번째 반응변수 $Y_{(i)}$ 는

$$Y_{(i)} = X\beta_{(i)} + \epsilon_{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

단 $Cov(\epsilon_{(i)}) = \sigma_{ii} I_N$ 이 성립한다. 그러나 동일한 시행의 반응변수들은 상관관계를 가질 수 있다.

이제 위의 다변량 선형회귀모형식에서 (계획)행렬 X 가 full column rank인 경우, 즉, X 의 계수 $= (m+1)$, 모수행렬 β 의 추정에 대한 문제를 고려하여보자, 어떤 임의의 모수행렬

$\beta = [\beta_{(1)} | \beta_{(2)} | \dots | \beta_{(p)}]$ 에 대해서 오차행렬은 $(Y - X\beta)$ 가 되며, 오차의 제곱합과 교차합의 행렬은

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad (2.16)$$

$= \begin{bmatrix} (Y_{(1)} - X\beta_{(1)})'(Y_{(1)} - X\beta_{(1)}) & \dots & (Y_{(1)} - X\beta_{(1)})'(Y_{(p)} - X\beta_{(p)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (Y_{(p)} - X\beta_{(p)})'(Y_{(1)} - X\beta_{(1)}) & \dots & (Y_{(p)} - X\beta_{(p)})'(Y_{(p)} - X\beta_{(p)}) \end{bmatrix}$ 으로 주어진다. 이 때 i 번째 대각 원소인

$(Y_{(i)} - X\beta_{(i)})'(Y_{(i)} - X\beta_{(i)})$ 를 최소화하는 $\beta_{(i)}$, 즉, $Y_{(i)} = (Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{Ni})'$ 에만 근거한 $\beta_{(i)}$ 의 최소 제곱추정값은 $\hat{\beta}_{(i)} = (X'X)^{-1}X'Y_{(i)}$ 로 주어지며, 따라서 $\text{tr}[(Y - X\beta)'(Y - X\beta)]$ 를 최소화하는 모수행렬 β 는

$\hat{\beta} = [\hat{\beta}_{(1)} \hat{\beta}_{(2)} \dots \hat{\beta}_{(n)}] = (X'X)^{-1}X'[Y_{(1)} Y_{(2)} \dots Y_{(n)}]$ 로 표현된다. 즉, 이는 각 반응변수에 대한 선형 회귀모형의 최소제곱추정량을 모은 꼴이 된다. 또한 일반화된 분산 $|(Y - X\beta)'(Y - X\beta)|$ 도 역시 $\beta = \hat{\beta}$ 에서 최소화 된다. 이제 최소제곱추정값 $\hat{\beta}$ 를 사용하여 얻은 Y 의 예측값은

$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'Y$ 이 되며, 이에 따른 잔차값들은 $\hat{\epsilon} = Y - \hat{Y} = [I - X(X'X)^{-1}X']Y$ 로 계산된다. 여기서 잔차와 예측값, 그리고 X 의 열(column)사이의 직교성에 의하여,

$$\begin{aligned} Y'Y &= (\hat{Y} + \hat{\epsilon})'(\hat{Y} + \hat{\epsilon}) \\ &= \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} + 0 + 0 \\ &= \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.17)$$

의 관계가 성립된다.

III 제어 알고리즘

이 장에서는 Ziegler-Nichols방법과 다변량 선형회귀모형의 알고리즘을 서술한다.

2.2절과 2.3절에서 정의된 PID제어기의 자동 동조 과정을 살펴보면 다음과 같이 요약될 수 있다.

우선, 제어대상의 초기계수를 이용하여 Ziegler-Nichols의 한계감도법에 의한 PID제어기의 초기계수를 설정하고, 이 값들을 적절한 범위 내에서 변화시켜 제어대상에 입력한 후, 제어대상의 계단응답을 분석하여 다변량 선형회귀 모형의 입력값으로 사용하여 모수 추정을 한 후, 새로운 초기값을 다변량 선형회귀 모형에 입력하면 순수한 다변량 선형회귀 모형으로 최적화된 P, I, D 계수와 파형이 그려질 것이다. 이 과정을 순서도로 좀더 자세하게 나타낸 것이 그림 6이다.

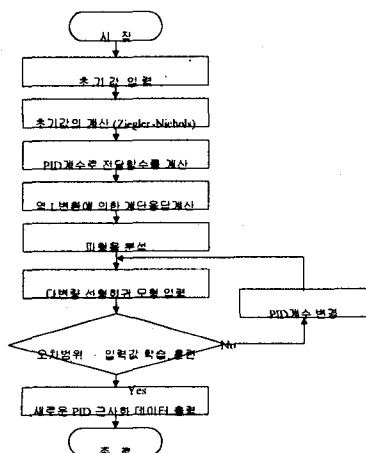


그림 3. 제안된 제어기의 순서도
Fig. 3. Flow chart of the proposed control system

IV 시뮬레이션 및 고찰

위와 같이 구성된 제어기를 시뮬레이션 하기 위해서 수치계산 프로그래밍 언어인 MATLAB⁷⁾을 이용하여 자동 동조 프로그램을 제작 사용하였으며, 시뮬레이션에 사용된 제어 대상은 다음과 같은 3가지 모델을 선정하였다. 먼저 모델 1과 모델 2는 DC모터의 물리적 파라미터가 동일한 가운데 다변량 선형회귀모형의 입력값을 모델 1에서는 회전자관성모멘트, 감쇄율, 토크정수, 전기자저항, 전기자 인덕턴스에 대하여 각각 5단계씩 5⁵개만큼의 입력을 사용하였고, 모델 2에서는 각각 7단계씩 5⁷개를 사용하여 선형회귀모형의 입력값의 변화에 따른 응답을 보인 것이고, 모델 3은 모델 1과 모델 2에서와는 다른 DC모터의 물리적 파라미터와 모델 2의 입력값을 사용하여 그 출력응답을 비교하도록 하였다.

표 1 DC모터의 물리적 파라미터
table 1 Physical parameter of DC motor

구 분	Model 1, 2	Model 3
회전자관성모멘트 (J)	0.01	0.5
감 쇠 율 (b)	0.1	0.05
토크정수 (K=K _c =K _t)	0.01	0.2
전기자 저항 (R)	1	10
전기자 인덕턴스 (L)	0.5	1.2
회귀모형 입력값 개수	3125 78125	78125

제어대상을 첫 번째 경우 모델 1, 2로 정의하였을 때의 Ziegler-Nichols방법, 다변량 다중선형회귀모형(Model 1, Model 2)의 계단응답을 시뮬레이션 한 결과는 그림 4~6에 나타내었다.

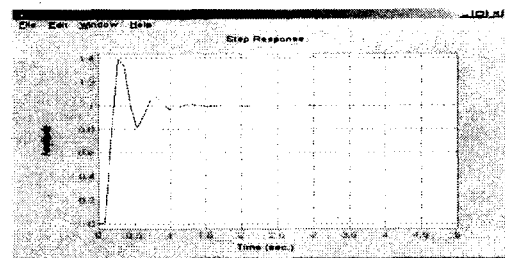


그림 4. Ziegler-Nichols방법에 의한 계단응답 (모델 1,2)
Fig. 4. Step-response by Ziegler-Nichols method(model 1,2)

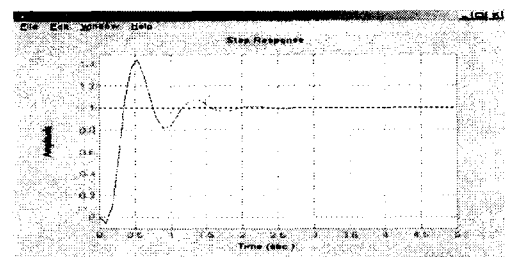


그림 5. 다변량 선형회귀모형에 의해 추론된 계단응답 (모델 1)
Fig. 5. Step-response by multiple regression model(model 1)

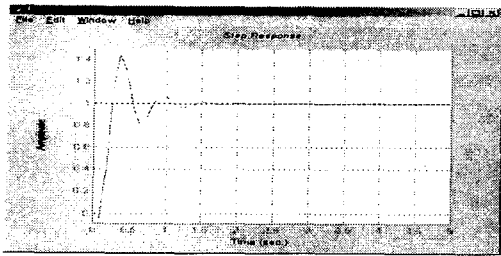


그림 6. 다변량 선형회귀모형에 의해 추론된 계단응답 (모델 2)
Fig. 6. Step-response by multiple regression model(model 2)

모델 1에 대한 시뮬레이션 결과를 살펴보면 Ziegler-Nichols방법에 의한 계단응답이 다변량 선형회귀모형의 과형 보다 더욱 안정됨을 볼 수가 있다. 이는 선형회귀모형의 입력값의 부족에 의해 생기는 것인데 이를 보완한 모델 2에서는 거의 같은 출력과형이 보임을 볼 수가 있다. 선형회귀모형의 입력값의 연산이 끝난후에는 Ziegler-Nichols방법의 복잡한 수치연산을 하지 않게 되어 연산속도가 빠르고 또한 입력값이 높으면 출력데이터가 Ziegler-Nichols방법의 출력값과 거의 비슷한 응답을 보이게 됨을 볼 수 있게 된다.

다음은 제어대상을 모델 3으로 정의하였을 때의 Ziegler-Nichols방법과 다변량 선형회귀모형의 계단응답을 시뮬레이션 한 결과를 그림 7, 8에 나타내었다.

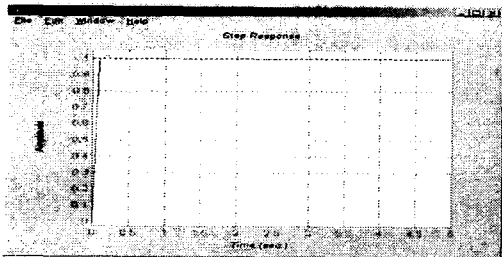


그림 7. Ziegler-Nichols방법에 의한 계단응답 (모델 3)
Fig. 7. Step-response by Ziegler-Nichols method(model 3)

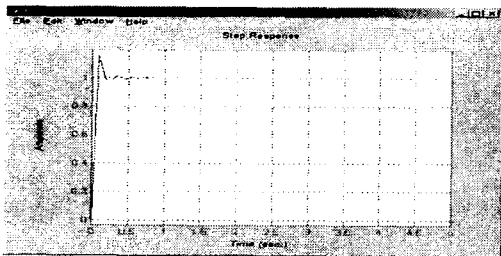


그림 8. 다변량 선형회귀모형에 의해 추론된 계단응답 (모델 3)
Fig. 8. Step-response by multiple regression model(model 3)

모델 3의 결과를 보면, 앞의 모델 2와 마찬가지로 다변량 선형회귀모형에 의한 계단응답특성이 Ziegler-Nichols방법과 거의 유사한 특성을

보이게 됨을 볼 수 있었고, 실제적으로 연산속도도 매우 향상됨을 볼 수 있었다. 모델 1, 2, 3을 살펴보면 Ziegler-Nichols방법과 회귀모형에 의해 추론된 계단응답을 비교해 볼 때, 다변량 선형회귀모형의 입력값의 경우의 수를 높임, 즉 학습률을 높임으로써 Ziegler-Nichols방법에 의한 계단응답과 거의 같은 좋은 과형이 출력되는 것을 볼 수 있다.

V 결 론

본 연구에서는 Ziegler-Nichols방법과 다변량 선형회귀모형을 사용한 자동동조 PID 제어를 제안하고 시뮬레이션을 통하여 그 타당성을 입증하였다.

기존의 Ziegler-Nichols의 방법과 비교하여 이 방법의 특징은 다음과 같다.

1) 다변량 선형회귀모형의 응답은 Ziegler-Nichols방법에서 가지는 수치연산이 없으므로 자동동조시간이 짧다.

2) 입력값의 세밀화 및 증가에 따라 출력응답이 기존의 방법의 출력과 근사적으로 같아질 수 있다.

3) 다변량 선형회귀모형의 응답은 퍼지추론⁸⁾에서 보이는 비선형성이 강한 시스템에서도 적용이 가능하다.

4) Neural-Network의 역전파알고리즘에서⁹⁾의 문제점인 지역값에 빠지는 오류가 거의 없다.

그러나 다변량 선형회귀모형의 입력벡터의 행과 열의 범위를 얼마나 세분화 해야하는지 또한 그것에 따른 정밀도 향상이 완료되는 시점을 찾는 것이 향후 연구과제로 남는다.

참 고 문 헌

1. GAWTHROP, P.J., "Automatic Tuning of Commercial PID Controllers computer control of real-Time processes.", IEEE control system magazine January pp. 37-57, 1990.
2. 林東均 外, "PID 制御機の最適同調", 電氣學會論文誌, 第30卷 B. 第11號, pp. 1075-1084, 1993
3. K.J Astrom et al., "Automatic tuning and adaptation for PID Controllers - A survey", Control Eng, Practice Vol.1 No.4, pp. 699-714, 1993.
4. J.G Ziegler, N.B Nichols, "optimum settings for automatic controllers", Trans ASME Vol.65, pp. 433-444, 1942.
5. 김기영, 전명식, "다변량 통계자료 분석" pp.97-119, 1997
6. 박일서, "지능형 자동화 및 Matlab 활용" pp.223-238, 1999
7. Hwang Woo-hyun, "Matlab Applications" pp.68-476, 1995.
8. Hong Hyeongpyo et al., "A Design of Auto-Tuning PID Controller using Fuzzy Logic", proceeding of The 1992 International Conference on Industrial electronics control, Vol.2, pp. 971-976.
9. 李壽欽, 朴賢泰, 李來一, "전력설비시스템을 위한 퍼지 평가함수와 신경회로망을 사용한 PID제어기의 자동동조" 照明 · 電氣設備學會誌 第13卷 第2號, pp. 63-70, 1999