

# Fractional Brownian Motion 잡음환경 하에서 웨이브렛 변환을 이용한 신호의 검출

김명진

한국의국어대학교 정보통신공학과

## Signal Detection Using Wavelet Transform in Fractional Brownian Motion

Myoung Jin Kim

Dept. of Information & Communications Eng., Hankuk University of Foreign Studies

### 요약

Fractional Brownian motion(fBm)은 long-term persistence 특성을 가진 자연 현상,  $1/f$  잡음, 깊이가 낮은 해저에서의 배경음향잡음 등을 모델링하는데 많이 사용된다. 이 fBm은 nonstationary 유색잡음이다. 이러한 유색잡음 환경 하에서 신호를 검출하기 위한 한 방법은 Fredholm 적분방정식의 해를 구하는 것이다. 이 방정식을 이산화 하면 잡음의 공분산 행렬의 역행렬이 포함되어 계산량이 많다. 본 논문에서는 fBm 잡음의 공분산 행렬을 웨이브렛 변환하여 얻어지는 행렬, 즉 fBm의 멀티스케일 성분들의 공분산행렬은 밴드화된 블록들로 근사화할 수 있다는 성질을 이용하여 적은 계산량으로 신호를 검출하는 알고리즘을 제안한다.

### I. 서론

웨이브렛과 필터뱅크 이론을 이용한 신호 처리 기술은 음성 및 영상의 서브밴드 코딩, 트랜스멀티플렉서 등 많은 분야에 응용되어 왔다 [1]. 이산 웨이브렛 변환은 multirate 신호처리와 매우 밀접하게 연관되어서 신호 시퀀스를 서로 다른 시간 또는 공간 분해능에서의 여러 개의 서브시퀀스로 분해하며, 분해된 서브시퀀스들은 낮은 속도의 하드웨어를 병렬로 사용하여 정보의 손실 없이 처리할 수 있다. 이산 웨이브렛 변환의 다른 장점을 들면 랜덤신호를 multirate 분해를 하였을 때, 특정 서브시퀀스 내의 샘플들 뿐만 아니라 서로 다른 서브시퀀스의 샘플들 간의 상관성이 상당히 작다는 것이다 [2]. 차목문헌 [2]에서는 비정상 확률과정의 공분산 행렬  $\mathbf{R}$ 에 대하여  $\mathbf{R}\mathbf{x}=\mathbf{y}$  형태의 선형 연립방정식의 해를 구하는 고속 알고리즘을 제안하고 있으며 이 방식은 유색잡음 환경하의 필터링이나 신호검출 등에 응용할 수 있다.

자연 현상을 표현하는 많은 종류의 time series 들은 긴 시간 상관성을 가지는 것으로 알

려져 있다. FBm[3]은 긴 시간 존속성을 가지는 확률과정을 표현하는 유용한 모델로 사용되어왔다. 본 논문에서는 배경잡음으로 fBm 잡음이 있는 통신환경에서 신호를 검출하는 과정을 고려하였다. FBm과 같은 유색잡음 환경 하에서 신호를 검출하기 위한 한 방법은 Fredholm 적분방정식의 해를 구하는 것이다. FBm의 멀티스케일 성분들의 공분산행렬은 밴드화된 블록들로 근사화할 수 있다는 성질을 이용하여 적은 계산량으로 신호를 검출하는 알고리즘을 제안한다.

### II. Fractional Brownian Motion

자연 현상을 표현하는 많은 종류의 time series 들은 긴 시간 상관성을 가지는 것으로 알려져 있다. Rational power spectrum 을 가지는 time series 가 지수적으로 감소하는 상관함수를 가지는데 비해 이들의 상관함수는 hyperbolic 하게 감소한다. 따라서 이들의 전력 스펙트럼은 주파수가 0으로 근접함에 따라 무한대로 증가한다.  $1/f$  잡음은 이러한 잡음의 한 종류이며, 적외선 감시 시스템에서 배경 구름의 반사계나 통신 채널의 버스트 에러는  $1/f$  잡음으로서 나타내진다. FBm은 긴 시간 존속성을 가지는 확률과정을 표현하는 유용한 모델로 사용되어왔다. FBm은 Brown 운동을 일반화한 확률과정으로서, 백색잡음에 대하여 소수(fractional) 적분을 한 것으로 생각할 수 있다. FBm은 stationary 하지 않다. 그러나 fBm의 증가분(increment)은 stationary 하며 self-similar 한 특성을 가진다. 확률과정  $x(t)$ 가 self-similar 하다는 것은 임의의  $t_0$ 와  $t_1$ , 그리고 스케일링 지수  $H$ 에 대해서 확률변수  $x(t_0 + \lambda t_1)$ 과  $\lambda^H [x(t_1)]$ 은 동일한 확률분포를 갖는다는 것을 의미한다. 이러한 성질로부터 fBm은 화상의 합성, texture 분류,  $1/f$  모델링 등에 사용된다.

FBm은 Brown 운동의 increment를 moving average 화한 Gaussian 확률과정이다. 구체

적으로, 만일  $B(t)$ 를 Brown 운동이라 하면, fBm은 다음과 같이 정의된다.

$$B_H(0)=0$$

$$B_H(t)-B_H(0)=\frac{1}{\Gamma(H+0.5)}\left\{\int_{-\infty}^0[(t-s)^{H+0.5}-(-s)^{H+0.5}]dB(s)\right. \\ \left.+\int_0^t(t-s)^{H+0.5}dB(s)\right\} \quad (1)$$

여기서  $0 < H < 1$ 이다. 따라서 fBm은 백색잡음을 필터링한 확률과정으로 볼 수 있다. 이 필터의 임펄스 응답은  $t^{H-0.5} / \Gamma(H+0.5)$ 이며 Laplace 변환은  $1/s^{H+0.5}$ 가 된다.  $1/s$ 가 적분에 해당하므로  $1/s^{H+0.5}$ 는 fractional 적분이라 부른다. Brown 운동이 백색잡음을 적분한 것임에 비해 fBm은 백색잡음의 fractional 적분으로 해석할 수 있다.  $H=0.5$ 인 경우는 Brown 운동이 된다. fBm의 샘플패스는 fractal이 되며, fractal 차원은  $D=2-H$ 가 된다. 여기서 파라미터  $H$ 의 값이 작을수록 그래프가 복잡해지며,  $H$ 가 클수록 부드럽게 된다.

fBm은 평균이 0인 nonstationary Gaussian 확률과정이며,  $B_H(t)$ 의 공분산함수는 다음과 같이 표현된다.

$$R_{B_H}(t,s)=E[B_H(t)B_H(s)] \\ =\frac{V_H}{2}(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}), t,s \in \mathbb{R} \quad (2)$$

여기서

$$V_H=Var\{B_H(1)\}=-\frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(2H-1)} \\ =[\Gamma(H+0.5)]^{-2}\left\{\int_{-\infty}^0[(t-s)^{H-0.5}-(-s)^{H-0.5}]^2 ds+\frac{1}{2H}\right\} \quad (3)$$

fBm의 increment는 평균이 0이고 self-similar한 stationary 확률과정이다. Brown 운동의 increment가 독립적인 것과 비교하여 fBm의 increment는  $H=0.5$ 인 경우를 제외하고 독립적이지 않다.

### III. FBM의 웨이브렛 분해 및 멀티스케일 성분들간의 상관함수 특성

#### 1. 웨이브렛 분석

웨이브렛 분석은 제곱적분 가능한 연속시간 신호를 표현하는 수단으로 사용되어 왔는데, 이 분석방식의 특징은 웨이브렛 함수라는 단일 함수의 scaling 및 translation을 사용하여 표현한다는 것이며, 웨이브렛 함수  $\psi(t)$ 는 유한한 0 아닌 구간을 가진다. 우리가 관심을 가지는 것은 연속시간신호의 이산적분분해이다[4]. 제곱적분 가능한 신호의 이산 웨이브렛 분해 표현은 다음과 같다.

$$x(t)=\sum_k \sum_m x_{k,m} \psi(2^k t - m) \quad (4)$$

$$x_{k,m}=2^k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(2^k t - m) dt \quad (5)$$

유한한 0 아닌 구간을 가지는 이산적분 웨이브렛  $\psi(t)$ 의 구성은 다음과 같은 성질을 가진  $N$ 개의 필터계수를 가진 FIR 저역통과필터의 임펄스 응답  $h(n)$ 으로부터 만들어진다.

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (6)$$

여기서  $H(\omega)$ 는  $h(n)$ 의 이산 Fourier 변환이다. 그러면  $H_0(z)=H(z)$ 와  $H_1(z)=H(-1/z)/z$ 는 PR 2-밴드 분석-합성필터가 된다. 또한  $H_0(\omega)$ 는  $\omega=\pi$ 에서  $p$ 개의 영점(zero)을 가져야 한다. 이것은  $H_1(\omega)$ 가  $\omega=0$ 에서  $p$ 개의 영점을 가져야 한다는 것을 의미한다. 웨이브렛 함수의 이러한 성질은 신호  $x(t)$ 의 표현을 매우 효율적이 되도록 한다[2].

#### 2. 이산 웨이브렛 변환 행렬

실제의 응용에서는 유한한  $N$ 개의 데이터  $\{x(n)\}_{n=1}^N$ 과 유한한 공분산 행렬을 다루게 된다. 유한한 길이 데이터를 다루기 위해 신호 데이터는 주기가  $N$ 인 주기신호라 가정한다. 신호를 필터  $H_i(z), i=1, \dots, M-1$ 에 통과시키고 출력을 인수  $M$ 으로 하향 샘플링하는 과정은  $N \times 1$  신호벡터  $\mathbf{x}$ 를  $\frac{N}{M} \times N$  행렬  $\mathbf{H}_i$ 와 곱하는 것으로 표현할 수 있다[2]. 여기서 행렬  $\mathbf{H}_i$ 의 각 행은 필터  $H_i(z)$ 의 임펄스응답의 계수로서 구성된다.  $M$ 개 필터의 출력을 동시에 얻는 과정은  $\mathbf{x}$ 를 행렬  $\mathbf{D}$ 와 곱하여 얻을 수 있다. 여기서  $\mathbf{D}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

RPRF 뱅크를 연속적으로 통과했을 때 출력은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{Q}_{\log_M(N)}(\mathbf{Q}_{\log_M(N)-1}(\Lambda(\mathbf{Q}_2(\mathbf{Q}_1 \mathbf{x})))) \quad (9)$$

이것은 다음과 같이 신호벡터  $\mathbf{x}$ 를 행렬  $\mathbf{Q}$ 와 곱하는 것으로 동등하게 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{Q}_{\log_M(N)}(\mathbf{Q}_{\log_M(N)-1}(\Lambda(\mathbf{Q}_2(\mathbf{Q}_1 \mathbf{x})))) \quad (10)$$

행렬  $\mathbf{Q}$ 를 웨이브렛 변환행렬이라 부른다. 위의 수식에서

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{D}_1$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M/M} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M^{k-1}M/M^{k-1}} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \quad (11)$$

이며  $\mathbf{D}_k$ 는  $k$ 번째 스테이지의 필터  $H_i(z)$ 에

해당하는 행렬  $\mathbf{H}_i^{(k)}$  로 구성된 행렬이다. 직교 웨이브렛의 선택에 의하여 웨이브렛 변환행렬  $\mathbf{Q}$  는 직교행렬이 된다.

3. 웨이브렛 변환된 확률과정의 공분산행렬[2]

확률과정  $x(n)$  의 멀티스케일 분해는 신호를 적절히 선정한 필터뱅크  $h_k(n)$  에 통과시킨 후 출력을 데시메이션 하여 얻거나 신호벡터를 웨이브렛 변환행렬과 곱하여 얻을 수 있다. 위의 필터들이  $p$  개의 vanishing moment 를 가지며,  $x(n)$  는 평균이 0 인 확률과정이라고 가정하자. 입력신호  $v(n)$  이  $n$  이 무한대로 커짐에 따라 점진적으로  $O(n^\alpha)$  로 감쇠한다면 필터출력은 점진적으로  $O(n^{\alpha-p})$  의 속도로 0 에 접근한다. 확률과정  $x(n)$  의 자기공분산  $R(m,n)=E[x(n)x(m)]$  이  $|m-n|$  이 증가함에 따라  $|m-n|^\alpha$  의 속도로 감쇠한다면 (즉 어떤 상수  $C$  에 대하여  $R(m,n) < C|m-n|^\alpha$  를 만족한다면),  $x(n)$  의 웨이브렛 분해에서  $j$  번째 밴드의  $m$  번째 성분신호  $x_j(m)$  과  $k$  번째 밴드의  $n$  번째 성분신호  $x_k(n)$  사이의 상호공분산  $R_w^{j,k}(m,n)=E[x_j(n)x_k(m)]$  은  $R(m,n)$  자신보다 더 빠른 속도로 감쇠한다. 따라서 랜덤과정  $x(n)$  의 공분산에 비하여 멀티스케일 성분들은 sparse 공분산 행렬을 가진다.

다음에는 fBm 확률과정에 대하여 알아보자. 표본화된 fBm 의 공분산 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$R(m,n) = \frac{V_H}{2} (|m|^{2H} + |n|^{2H} - |m-n|^{2H}), \quad 0 < H < 1 \quad (12)$$

벡터  $\mathbf{x} = [x(k)]_{k=1,N}$  의 공분산 행렬을  $\mathbf{R} = [R(m,n)]$  라고 정의하자. 행렬  $\mathbf{R}$  에 웨이브렛 변환행렬  $\mathbf{Q}$  를 전후에 곱하여 만들어지는 행렬을  $\mathbf{R}_w$  라 하자. 즉

$$\mathbf{R}_w = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^T \quad (13)$$

$\mathbf{R}_w$  는 랜덤신호  $x(n)$  의  $N$  개 샘플을 주기신호로 확장한 신호가 직렬 RPRF 뱅크를 통과하여 나오는 출력들의 공분산 행렬이 된다. 그림 1 과 그림 2 에 각각 fBm 의 공분산 행렬 및 웨이브렛 변환된 공분산 행렬의 예를 보인다. 신호 자체의 공분산에 비하여 멀티스케일 성분들은 특정 밴드에 에너지가 밀집되어 있음을 알 수 있다.

IV. FBM 잡음환경 하에서 신호의 고속검출

백색잡음 이외에 fBm 과 같은 유색잡음이 있는 환경 하에서 사전에 알고 있는 신호의 유

무를 검출하는 문제를 고려해 보기로 하자. 이러한 종류의 문제는  $1/f$  형태의 간섭이 있는 통신채널에서의 신호 검출, 산림이나 바다 위를 낮게 날아가는 비행물체의 검출, 구름으로부터의 반사가 있는 적외선 이미지에서 목적물의 추적 등을 예로 들 수 있다. FBM 환경 하에서의 신호검출 문제는 [4]에서 reproducing kernel Hilbert 공간 이론을 이용하여 연구된 바 있다. 신호검출 필터를 구성하는 한 방법은 제 2 종의 Fredholm 적분방정식의 해를 구하는 것이다. 이 적분방정식을 이산시간에서 표현하면 선형 연립방정식이 된다. 검출을 위한 결정변수의 유도는 이 선형 방정식의 해를 구하는 과정으로 귀착된다. FBM 잡음  $X(t)$  와 가우시안 백색잡음이 있는 환경 하에서 알고 있는 신호  $f(t)$  을 검출하는 문제를 고려해보자. 이 문제에서 가설검정 문제를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_0 : r(t) = X(t) + n_w(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

$$H_1 : r(t) = f(t) + X(t) + n_w(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

여기서  $n_w(t)$  는 전력 스펙트럼 밀도가  $N_0/2$  인 가우시안 백색잡음이다. FBM 간섭신호와 백색잡음의 합을  $n(t)$  라 하면, 즉

$$n(t) = X(t) + n_w(t) \quad (15)$$

전체 잡음의 상관함수는 다음과 같이 된다.

$$R_n(t,s) = E[n(t)n(s)] = R_X(t,s) + \frac{N_0}{2} \delta(t-s) \quad (16)$$

최적 검출기의 한 가지 구현방법을 그림 3 에 보인다. 검출을 위한 결정변수는

$$l = \int_0^T r(t)g(t)dt$$

과 같이 표현할 수 있다. 여기서  $g(t)$  는 잡음 공분산함수  $R_n(t,s)$  와 신호  $f(t)$  의 inverse Kernel  $K(t,s)$  로써 구해진다:

$$g(t) = \int_0^T K(t,s)f(u)du \quad 0 < t < T \quad (17)$$

여기서

$$\int_0^T R_n(\tau,u)K(u,t)du = \delta(\tau-t). \quad (18)$$

그러면 결정변수  $l$  은 다음과 같이 된다.

$$l = \int_0^T r(t) \int_0^T K(t,u)f(u)du dt. \quad (19)$$

검출문제를 디지털로 구현하기 위하여 위의 방정식을 스케일  $2^J$  에서 scaling 함수를 사용하여 이산화 한다고 가정하자. 신호  $f(t)$  와  $n(t)$ ,  $r(t)$  를 스케일  $2^J$  에서 근사화한 신호를  $f(J;m)$ ,  $n(J;m)$ ,  $r(J;m)$  이라고 하면 위의 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R}_n \mathbf{K} = \mathbf{I} \quad (20)$$

$$[\mathbf{R}_n]_{lm} = E[n(l)n(m)] = 2^{-J} R_n\left(\frac{Tl}{2^J}, \frac{Tm}{2^J}\right) \quad (21)$$

$$= \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_{nw} = \mathbf{R}_x + \frac{N_0}{2} \mathbf{I}$$

검출을 위한 결정변수는 다음과 같이 표현된다.

$$l = \sum_{i=1}^N r(J,i) \sum_{m=1}^N [\mathbf{R}_n^{-1}]_{im} f(J;m) \quad (22)$$

$$= \mathbf{r}^J T \left( \mathbf{R}_X + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}^J$$

따라서 신호의 검출 문제는 역행렬의 연산 및 행렬과 벡터의 곱의 문제로 변환된 것을 알 수 있다. 이 문제의 해를 직접 구하는데는  $O(N^3)$ 의 연산이 필요하다. 이제 fBm 잡음과 백색잡음의 웨이블릿 분해를 고려해 보자. 행렬  $\mathbf{Q}$ 를 직교 웨이블릿 변환 행렬이라 하자. 그러면 신호 검출 결정변수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$l = \mathbf{r}^J T \left( \mathbf{R}_X + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}^J \quad (23)$$

$$= [\mathbf{Qr}^J]^T \left[ \mathbf{QR}_X \mathbf{Q}^T + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \right]^{-1} [\mathbf{Qr}^J]$$

결과적으로 이 문제는 다음과 같은 선형 연립방정식의 해를 구하는 문제로 귀착된다.

$$\left[ \mathbf{QR}_X \mathbf{Q}^T + \frac{N_0}{2} \mathbf{I} \right] \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (24)$$

백색잡음의 공분산 행렬 및 웨이블릿 변환은 diagonal 행렬이며, 앞서 살펴본 바와 같이 fBm의 공분산 행렬의 웨이블릿 변환은 블록 밴드화된 행렬로 근사화할 수 있으므로 신호검출 문제는 블록 밴드화된 행렬의 역행렬을 구하는 문제가 된다. 따라서 웨이블릿 변환 및 근사화를 사용하면 연산을  $O(\max\{N \log^2 N, N^2\})$ 가 된다.

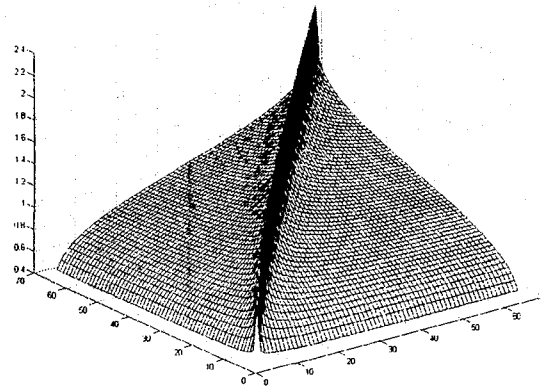
V. 결론

fBm 환경 하에서의 신호검출 문제를 웨이블릿 변환을 이용하여 접근하여 보았다. fBm과 유색잡음 환경 하에서 신호를 검출하기 위한 한 방법은 Fredholm 적분방정식의 해를 구하는 것이다. 이 방정식을 이산화 하면 잡음의 공분산 행렬의 역행렬이 포함되어 계산량이 많다. 본 논문에서는 fBm 잡음의 공분산 행렬을 웨이블릿 변환하여 얻어지는 행렬, 즉 fBm의 멀티스케일 성분들의 공분산행렬은 밴드화된 블록들로 근사화할 수 있다는 성질을 이용하여 적은 계산량으로 신호를 검출할 수 있음을 확인하였다.

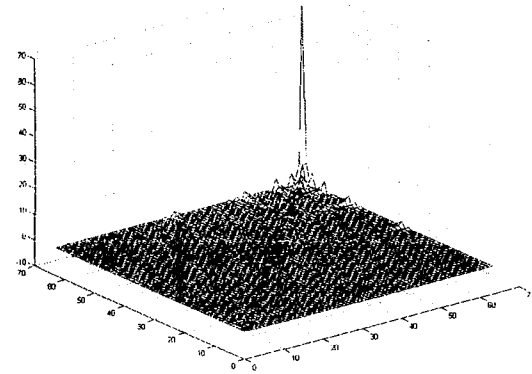
참고문헌

[1] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelet and Filter Banks*, Wellsley, MA: Wellesley\_Cambridge, 1997.  
 [2] A. H. Tewfik and M. Kim, "Fast wavelet based positive definite system solvers," *IEEE Trans. on Signal Processing*, pp. 572-585, Mar. 1994.  
 [3] B. B. Mandelbrot, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM Rev.*, vol. 10, pp. 422-437, 1968.

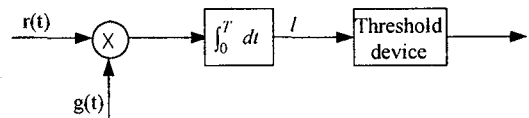
[4] I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Applcat. Math.*, vol. 41, pp. 909-996, 1988.  
 [5] R. J. Barton and H. V. Poor, "Signal Detection in Fractional Gaussian Noise," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 34, pp. 943-959, Jan. 1988.



(그림 1) FBM 확률과정의 공분산 행렬의 예



(그림 2) FBM 확률과정의 웨이블릿 변환된 공분산 행렬



(그림 3) 유색잡음 환경 하에서의 신호 검출