모델화 채널필터에 대한 인버스필터링

김성호 , 주창복
경남대학교 전기전자 공학부

Inverse Filtering for a Modelling Channel Filter

Sung-Ho Kim , Chang-Bok Joo
Dept. of Electrical & Electronic Engineering KyungNam Univ.
riven7@channeli.net , wireless@kyungnam.ac.kr

Abstract

In a digital communication system, the transmission channel may introduce error into the digital signal being transmitted.

It would be useful if a process could be devised so that the error could be removed in order to recover the transmitted digital signal.

We design a corrective filter that is inverse filter, which will generate an output signal identical to the input signal. in order for two systems connected in cascade to produce an output which is identical to the input signal, the over-all unit sample response of the cascade connection must be a unit sample function.

I. 서 론

본 논문에서는 대역통과필터 모델에 대하여, 이 필터의 출력으로부터 원래의 입력신호를 구하는 인버스 필터링 문제를 검토하였다. 이러한 인버스 필터를 구현하기 위해서는 모델 시스템을 통과한 신호에 대한 전체적 분석 단계가 필요하다 [1].

예를 들면, 인버스 필터는 안테나로 진입하는 입력신호를 추정할 수 있게 해주며 이것은 결국 출력 신호로부터 알려져 있는 디콘보루션(Deconvolution)이라는 과정, 즉 인버스 필터링을 통해 이루어지게 된다.

그러므로 인버스 필터의 문제는 단순히 콘보루션(convolution)의 역이라고 볼 수 있다. 즉, 콘보루션이 어떤 문제의 위상분석 문제라고 한다면 디콘보루션은 위상의 합성의 문제라고 말할 수 있다.

몇몇 응용에 있어서의 이산 처리 과정에서 원래의 입력 신호를 처리 과정을 통해 복원하기 위해 내재적 영향(inherent effect)을 제거하기 위한 노력이 이루어져 왔다[2,5]. 예를 들어, 디지털 통신 시스템에서 전송 채널은 전송되는 디지털 신호에 에러를 만들어 내며 이 에러를 제거하여 원래의 신호를 복원할 수 있다면 아주 유용할 것이다.

이러한 목적을 성취하기 위해 본 논문에서는 그것에 알 맞는 시스템, 즉 인버스 필터링 문제를 검토하였다.

인버스 시스템[3, 4]은 원래의 시스템과 종속(cascade)으로 연결되어 지므로 전체 시스템의 출력은 원래의 입력 신호로 된다. 이와 같은 인버스 시스템은 두 시스템의 종속 접속으로 출력 신호가 입력 신호로 만들어 져야 하므로 종속 접속의 전체인 임펄스 응답은 반드시 단위 샘플함수가 되어야 한다.

전통적으로 원하는 인버스 필터를 얻기 위해서는 인버스 시스템의 모든 극점(pole)을 계산하게 되며, 이 극점들은 모델 시스템의 모든 영점에 대응되어진다. 그러나 이러한 극점을 이용한 전통적 방법으로는 많은 차수가 요구되는 FIR 필터로 구현하기에는 실용적이지 못하다.

이러한 문제는 IIR필터를 실연함으로서 피할수 있다.

II. Inverse system의 개념

2.1 디콘보루션

그림 1과 같이 나타낸 이산 시간 LTI시스템에서와 같이 $h(n)$에 대한 인버스 시스템함수 $h_i(n)$을 만들 수 있으며, $h_i(n)$을 $h(n)$에 종속 접속시킴으로써 출력 $z(n)$은 시스템의 입력 $x(n)$으로 구해지게 된다.

즉 그림 1에서 두 시스템의 직렬 연결에 의해 전체적으로 시스템은 대한 하나의 입력과 출력의 관계로 나타내어지게 된다.

출력 $y(n)$, 입력 $x(n)$에 대한 LTI 시스템의

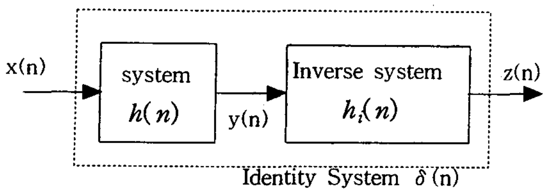


그림 .1 이산시간 LTI 시스템의 인버스 개념
Fig. 1.Inverse system for discrete time LTI system

단위 샘플함수의 응답을 $h(n)$이라 하면 응답 함수에 대한 콘보루션 표현은 다음과 같이 나타내진다.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \text{...............} (1)$$

본 문제는 시스템의 출력 파형의 모습을 알고 있으며 이를 이용해 입력 파형을 알고자 하는 것이다. 이것은 시스템의 전달 함수 $H(e^{jwT})$를 알고 있는 한 추정되어 질 수 있으며, 입력 신호는 마찬가지로 $X(e^{jwT}) = Y(e^{jwT}) / H(e^{jwT})$에 의해 구해질 수 있다. 그러므로 그 역 푸리에 변환에 의하여 x(n)을 얻는다.

이러한 일련의 과정을 디콘보루션(deconvolution)이라 하며 이것을 사용하는 데에는 몇가지의 주의가 필요하다. 특히 복소의 $Y(e^{jwT})$의 데이터 배열이 $H(e^{jwT})$인 데이터 배열로 나누어지는 경우에는 분모가 0인 경우가 생길 수 있게 되므로 주의해야 한다. 또한 디콘보루션 순서는 라운드 오프(round off)와 같은 잡음에 민감하며, 데이터내의 적은 잡음 들 조차도 값을 산출할 때 아주 크게 증폭되어 버리는 경우가 발생할 수도 있게 된다.

그림 1에서와 같이 출력 $z(n)$은 시스템의 입력 $x(n)$으로 구해지게 된다.

즉, 그림 1에서 임펄스 응답은 $h(n)*h_i(n)$이며 $h_i(n)$은 시스템의 임펄스 응답을 만족해야 한다.

$$h(n)*h_i(n) = \delta(n) \quad \text{........................} (2)$$

2.2 인버스 시스템의 존재조건

각종의 응용에서 디콘보루션과 같은 방법은 주어진 시스템에 대한 인버스 시스템 설계에 도움을 준다. 인과성과 안정한 최소 위상 조건의 인버스 시스템의 전달함수 $H_i(z)$에 대해

$$H(z)H_i(Z) = 1 \quad \text{............................} (3)$$

로 된다. $H_i(z) = 1 / H(z)$이기 때문에 $H(z)$는 반드시 모든 극점과 영점들이 단위원 내에 위치해야 한다. 즉, 최소 위상 시스템 또한 단위원 내에 극점과 영점을 가져야 한다. 그러므로 $H(z)$라는 주어진 시스템이 최소 위상 조건을 만족한다면, 이때 시스템은 안정하고 인과성의 인버스 시스템이 존재한다고 볼 수 있으며 실제로 구현되어질 수 있다[1]. 이것은 다른 의미에서 인과성과 안정성이 없는 시스템의 인버스 시스템은 존재하지 않음을 의미한다.

$z = 1/z_o$ $|z_o| < 1$ 에서 단위 원 밖에 하나의 영점을 가지는 비 최소위상 시스템

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - z_o) \text{.................} (4)$$

에 대해서 생각해 본다. 여기서 $H_1(z)$는 최소위상 시스템이며, 등가적으로 식 (4)는 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(z^{-1} - z_o)\frac{(1 - z_o z^{-1})}{(1 - z_o z^{-1})} \\ &= H_1(z)(1 - z_o z^{-1})\frac{(z^{-1} - z_o)}{(1 - z_o z^{-1})} \\ &= H_{\min}(z)\left[\frac{z^{-1} - z_o}{1 - z_o z^{-1}}\right] \text{......................} (5) \end{aligned}$$

$|z_o| < 1$ 이기 때문에 $H_1(z)(1 - z_o z^{-1})$은 최소위상 조건을 만족하며 $(z^{-1} - z_o)/(1 - z_o z^{-1})$은 1차 전역통과(all pass)를 나타낸다. 여기서 단위 원 밖 $z = 1/z_o$점은 $H(z)$의 영점이며, 단위 원 내부의 점 $z = z_o$는 공액 역점(conjagate reciprocal location)으로 영점의 반사점에 대응된다. 그러므로 합리적 시스템 함수 $H(z)$는 아래의 형태를 가지는 인과 시스템으로서 표현되어질 수

있다.

$$H(z) = H_{\min}(z) H_{ap}(z) \quad \text{.......................(6)}$$

여기서 $H_{\min}(z)$은 최소 위상 시스템의 전달함수이며 $H_{ap}(z)$는 전역통과 시스템을 나타낸다. 그러므로 $H(z)$의 어떤 단위 원내에 있는 영점과 극점은 $H_{\min}(z)$내에서 나타난다.

또한 단위 원밖에 있는 어떤 $H(z)$의 영점과 극점들도 상반된 위치의 $H_{\min}(z)$내에 나타나게 된다. 그러므로 인과성으로부터의 최소 위상 시스템은 구현될 수 있다. 즉, 전달 함수의 크기가 동일하게 유지되고 있는 비 최소 위성 시스템의 인과성으로부터 최소 위상 시스템을 만들 수 있으며 이것은 바깥의 영점은 단위 원에 대해 내부의 영점으로 반사시킴으로서 가능해 진다.

예를들어

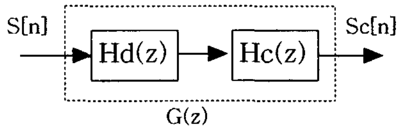


그림 2. 종속 연결 시스템

Fig. 2 Cascaded system

[그림 2] 에서 처럼 만약 S[n]=Sc[n]과 동일하다면 Hc(z)는 Hd(z)의 역함수이다. Hd(z)가 위와 같이 안정하고

인과적인 역함수를 가지는 최소 위상시스템인 경우 완전한 보상이 가능하다. 즉 위와 같은 방법으로 $Hd(z) = Hd_{\min}(z) Hap(z)$로 만들고

$$Hc(z) = \frac{1}{Hd_{\min}(z)} \quad \text{.............................(7)}$$

를 선택하면 $G(z) = Hd(z)Hc(z) = Hap(z)$ 이기 때문에 이 시스템의 주파수 응답은 1 이므로 원래의 주파수 응답에 대한 신호로 복원 되어진다.

III. 대역통과필터의 인버스 필터링

본 절에서는 다음 식과 같이 나타내지는 IIR 대역통과필터의 전달함수에 대해 요구되는 필터 특성의 전달함수를 구하였다.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \ldots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

....(8)

1. 50MHz의 Duty rate 0.5인 주기 펄스 신호의 경우

필터의 주파수 특성이

Sampling Frequency : 10 GHz

Passband Edge : 40MHz - 60MHz

Passband attenuation : <3 dB

Stopband attenuation : >30 dB at the frequency of 10MHz out on both sides of the passband.

$$H(z) = \frac{(0.3947 - 0.7894z^{-2} + 0.3947z^{-4}) * 10^{-4}}{1 - 3.9803z^{-1} + 5.9429z^{-2} - 3.9449z^{-3} + 0.98}$$

....(9)

$$H(z)^{-1} = \frac{1 - 3.9803z^{-1} + 5.9429z^{-2} - 3.9449z^{-3} + 0.}{(0.3947 - 0.7894z^{-2} + 0.3947z^{-4}) * 10}$$

....(10)

2. 50MHz의 Duty Rate 0.8인 주기펄스 신호의 경우

필터의 주파수특성이

Sampling Frequency : 10 GHz

Passband Edge : 50MHz - 200MHz

Passband attenuation : <3 dB

Stopband attenuation : >30 dB by 10MHz out on both sides of the passband.

와 같이 광대역인 경우에 대한 이산시스템과 그 인버스 필터의 전달함수를 다음과 같이 설계하였다.

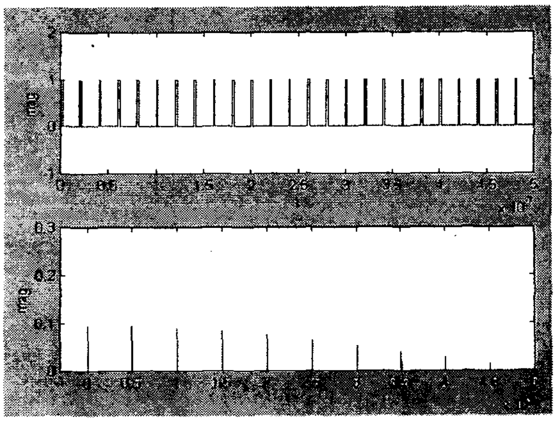
$$H(z) = \frac{0.0021 - 0.0042z^{-2} + 0.0021z^{-4}}{1 - 3.8591z^{-1} + 5.5939z^{-2} - 3.6098z^{-3} + 0.8751}$$

....(11)

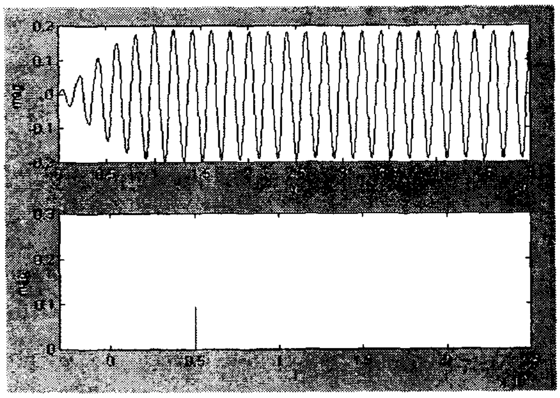
$$H(z) = \frac{1 - 3.8591z^{-1} + 5.5939z^{-2} - 3.6098z^{-3} + 0.8751}{0.0021 - 0.0042z^{-2} + 0.0021z^{-4}}$$

....(12)

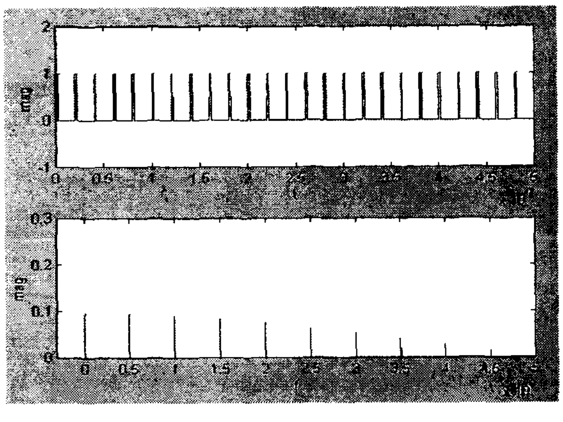
상기와 같이 설계된 인버스 필터의 응답관계를 컴퓨터 시뮬레이션 한 결과는 그림 3과 같다.



(a)Periodic pulse and its frequency spectrum of duty rate 0.1



(b) waveform and its frequency spectrum of (a) after BPF



(c) Result of inverse filtering

그림 3. 인버스 필터링

Fig. 3. Inverse filtering

Ⅳ. 결 론

디지털 통신 시스템에서 전송 채널은 전송되는 디지털 신호에 에러를 만들어 내며 이 에러를 제거하여 원래의 신호를 복원할 수 있다면 아주 유용할 것이다.

본 논문에서는 대역통과 Recursive Filter 모델에 대하여 이 필터를 통과한 출력신호의 모양을 알고 있을 때 원래의 입력신호를 추정하는 인버스 필터링에 대하여 검토해 보았다. 전형적인 디콘볼루션이라는 과정을 통해 이루어지는 인버스 필터링은 비 최소 위상 시스템의 경우에는 단위원에 대해 공액 역 쌍을 구함으로서 최소 위상 시스템과 전역 통과 필터로 계산후 인버스 필터 함수를 구하여 적용시켰다.

50MHz의 Duty Rate 0.1과 0.4, 0.5, 0.8의 주기 펄스신호에 대해 인버스 시스템의 동작에 관한 컴퓨터 시뮬레이션을 행한 결과 예측대로의 좋은 결과로 나타났다.

그러나 실제 채널에서생기는 잡음에 관한 영향을 고려했을 때의 결과는 전달함수의 정의 식에서 나타나 있는 바와 같이 적은 잡음에도 쉽게 영향을 받는다. 그러므로 부가잡음의 영향이 고려되는 필터의 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] Steven A. Tretter, "Introduction to discrete-time signal processing." John Wiely & Sons, 1976.

[2] Marvin E. Frerking, "Digtal signal processing in communication systems." Van nostrand reinhold, New York, 1994.

[3] Jiahua Wang, "An iterative algorithm for inverse filtering." IEEE Trans. vol. ASSP-33, no. 4, pp1051-1054, Aug. 1985.

[4] E. O. Brigham et al., "An iterative technique for determining inverse filters." IEEE Trans. Geosci. Electron., vol. GE-6, no. 2, pp86-96, 1968

[5] Jack Kurzweil, "Digtal Communications." John Wiely & Sons, 1999.