

고차스펙트럼 해석법을 이용한 비선형 기계적 시스템에 관한 연구  
이준서\* (충청대학 메카트로닉스 학부), 김명균 (명지대학교 대학원),  
차경옥 (명지대학교 기계공학과)

A Study on the Nonlinear Mechanical Systems using  
Higher Order Spectral Analysis Methods

J. S. Lee\* (Chungcheong College), M. K. Kim (Myongji Univ.),  
K. O. Cha (Myongji Univ.)

ABSTRACT : In this paper higher order spectral techniques are applied to some simple mechanical systems. The system studied is the nonlinear magnetic beam. This is a simply supported beam, driven by an electromagnetic shaker. At the free end, pairs of repelling magnets are placed. By varying the position and number of magnets, the nature of the nonlinearity can be changed, be it skewed or symmetric, and by varying the distance between the magnets the strength of the nonlinearity can also be altered. Using this controllable system, auto higher order spectral methods are applied, assuming only a knowledge of an output signal.

1. 서론

파워스펙트럼을 이용한 선형 전달함수는 공학의 여러 현상들을 해석하고 규명하기 위하여 사용되어 졌다. 하지만 기존의 선형 전달함수만으로는 설명할 수 없는 현상들이 많이 있다.<sup>(1)</sup> 따라서 이러한 현상들을 보다 정확하게 해석하는 데는 고차 통계학을 응용한 고차스펙트럼이 필요하다. 보통 바이스펙트럼으로 대변되고 있는 고차스펙트럼에 대한 연구는 이론적인 측면<sup>(2),(3),(4)</sup>과 응용적인 측면<sup>(5),(6),(7)</sup>으로 크게 분류할 수 있다. 대부분의 현대 과학 분야에서 한계나 장벽은 비선형 문제로 귀착되기 때문에 이러한 비선형 문제의 해석 및 해결이 과학기술 진보에 필수적인 요건이며 계속적으로 풀어가야 할 과제이기도 하다. 선형 시스템 해석과 관련된 스펙트럼 해석 기술에 대한

연구는 대부분 1970년대에 정립되었으나<sup>(8),(9)</sup> 비선형 시스템 해석과 관련된 고차스펙트럼에 관한 연구는 아직까지 확실히 정립되어 있지 않다. 본 논문에서는 비선형 시스템 해석에 이용되는 고차스펙트럼 중 현재 공학분야에 많이 응용되고 있는 바이스펙트럼을 사용하여 기계적 시스템에 존재하는 비선형성을 검출하고 고차 스펙트럼 해석법의 유용성에 대하여 연구하였다.

2. 고차스펙트럼의 고찰

파워스펙트럼이 신호의 파워와 2차모멘트에 관련된 것처럼 바이스펙트럼은 비대칭도(skewness)와 3차모멘트에 관련되어 있다. 파워스펙트럼이 독립적으로 각 주파수 성분을 고려하는 반면 바이스펙트럼은 두 주파수의 변수  $f_1$  과  $f_2$  의 함수이다. 그리고 바이스펙트럼은  $f_1$ ,  $f_2$  그리고  $f_1 + f_2$  주파수 성분 사이의 상호작용(interactions)을 해석할 수 있다. 이것은 실수부와 허수부를 포함하는 복소수 양으로 위상(phase)과 크기(magnitude)정보를 갖고 있지만, 또한 본 연구에서는 크기(magnitude)만을 고려하고자 한다. 또한 두 가지 간단한 보기를 나타내기 위하여 사인파를 사용하였다. 사인파는 정상랜덤신호라는 가정을 따르지 않지만 결과를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 하나의 보기로 사용되었으며, 양의 주파수 성분과 음의 주파수 성분사이의 원하지 않는 교차항을 없애기 위하여 주파수가  $f_1$  인 복소사인파를 사용하였다.

$$x(t) = e^{j2\pi f_1 t} \tag{2.1}$$

위 식을 Fourier 변환으로 하면 다음과 같다.

$$X(f) = \delta(f - p_1) \quad (2.2)$$

여기서,  $\delta$ 는 디락 델타함수이다.

Fig.1에서는 식(2.1)에 대한 신호  $x(t)$ 의 파워스펙트럼을 나타내었다. 만약 식(2.2)의  $X(f)$ 를 결정적 신호의 바이스펙트럼 식에 대입한다면, 신호  $x(t)$ 의 바이스펙트럼은 다음과 같이 정리된다.

$$E_{\text{xxx}}(f_1, f_2) = \delta(f_1 - p_1)\delta(f_2 - p_1)\delta(f_1 + f_2 - p_1) \quad (2.3)$$

위 식 우변에는 세 항의 곱을 포함하고 있다. 위에서 세 개의 항이 모두 제로가 아닐 경우, 바이스펙트럼에서는 단지 제로가 아닌 한 지점만이 있을 것이다. 따라서  $(f_1, f_2)$ 평면에 세 개의 항을 도식해 보으면 Fig.2처럼  $f_1 = p_1$ 과  $f_2 = p_1$ , 그리고  $f_1 + f_2 = p_1$ 인 세 개의 직선이 될 것이다. 이때  $p_1 \neq 0$ 에 대해서 세 직선의 어떠한 상호작용점도 찾을 수 없다. 그러므로 단일 사인파의 바이스펙트럼은 제로이다. 다음에는 주파수  $p_1$ 과  $p_2$ 의 두 개의 복수 사인파를 갖는 신호를 고려하여 이 신호에 Fourier 변환을 시키면,

$$X(f) = \delta(f - p_1) + \delta(f - p_2) \quad (2.4)$$

이고, 이것을 Fig.3에 나타내었다. 또한 이 신호의 결정적 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$E_{\text{xxx}}(f_1, f_2) = \begin{cases} \delta(f_1 - p_1) + \delta(f_1 - p_2) \\ \delta(f_2 - p_1) + \delta(f_2 - p_2) \\ \delta(f_1 + f_2 - p_1) + \delta(f_1 + f_2 - p_2) \end{cases} \quad (2.5)$$

위 식에서 우변을 전개하면 각각 3승인 8개의 항으로 구성된다. 만약 이것을  $(f_1, f_2)$ 평면에 도식한다면, Fig.4에서 나타낸 것처럼  $f_1 = p_1, f_2 = p_1, f_1 = p_2, f_2 = p_2, f_1 + f_2 = p_1$  그리고  $f_1 + f_2 = p_2$ 인 여섯 개의 직선으로 나타난다. 만약  $p_2 = 2p_1$  이라면, 세 직선에 대한 하나의 교점이 있을 것  $(p_1, p_1)$ 이다. 그 교점은 Fig.4에서 점으로 표시되어 생길 것이다. 실제로 주파수가 각각 50Hz와 100Hz인 두개의 사인파에 대한 바이스펙트럼의 보기를 Fig.5에 나타내었으며, (50, 50)Hz에서 피크(peak)가 나타남을 알 수 있다. 3차원 표면에 바이스펙트럼의 크기를 나타내기 위하여 그물망(mesh) 형태의 그림이 때때로 사용되지만 이 방법으로 복잡한 신호를 나타낼 경우 큰 레벨의 신호로 인하여 작은 레벨의

신호가 가려지는 결과를 초래하므로 정확하고, 자세한 내용을 나타내기 위하여 등고선도(contour map)가 사용된다.

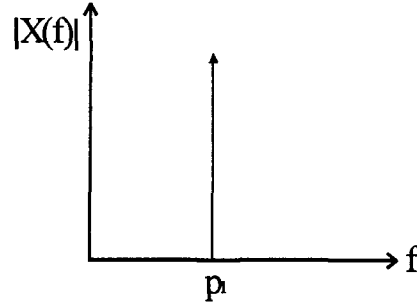


Fig.1 Fourier transform of sine wave

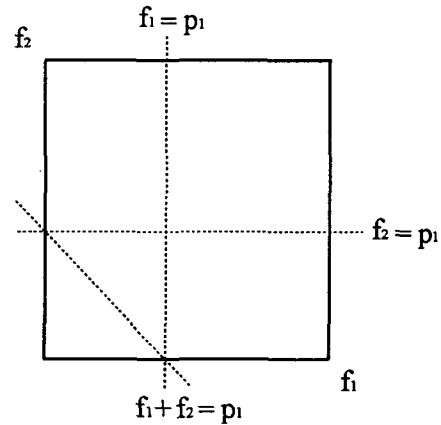


Fig.2 Bispectrum of sine wave

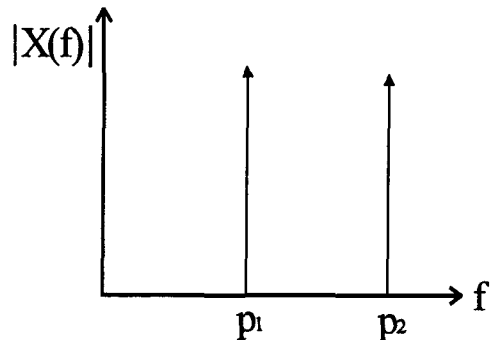


Fig.3 Fourier transform of two sine waves ( $p_2 = 2p_1$ )

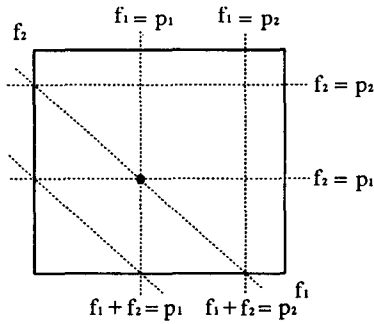


Fig.4 Bispectrum of two sine waves  
( $p_2 = 2p_1$ )

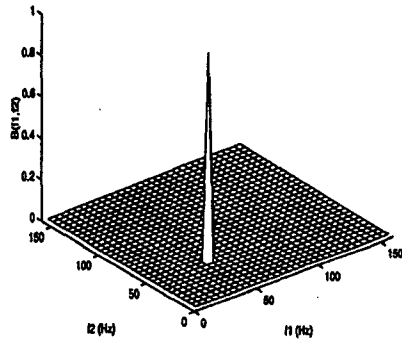


Fig.5 The bispectrum of two sine waves  
(50Hz and 100Hz)

### 3. 실험장치 및 방법

Fig.6에 본 실험에 사용된 실험장치를 도시하였다. 도시된 실험장치는 대칭 비선형 자성보 실험을 위한 실험장치이다. 먼저 선형시스템을 만들 수 있도록 보로부터 모든 자석들을 제거한다. 본 실험장치는 가우시안 신호로 진동을 발생시키는 가진기를 부정정보(statically indeterminate beams)에 장착한 것이다. 보의 끝단에는 상부 자석과 하부 자석의 중간 위치에 보가 위치할 수 있도록 두 쌍의 반발자석들이 비선형 복원력을 발생시키도록 하였다. 자석들 사이의 거리를 변화시킴으로써 비선형성의 강도를 다양화시킬 수 있다. 또한 Fig.7에서와 같이 상위의 자석을 제거함으로써 보가 더 이상 위쪽으로 구속되지 않게 하여 대칭 복원력을 없애 힘의 불균형을 이루게

하였다. 가진기로 입력되는 입력신호와 가속도계로부터의 출력신호는 동시에 검출되어 컴퓨터로 입력되며 신호의 분석을 위해 저장된다. 보상에 장착된 가속도계로부터의 신호는 차단주파수 40Hz의 안티에리어스 필터를 통과하여 100Hz로 262144개로 샘플링 하였다.

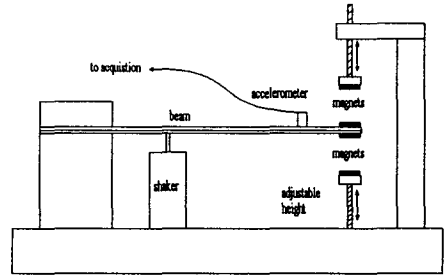


Fig.6 Experimental set up for symmetric magnetic beam

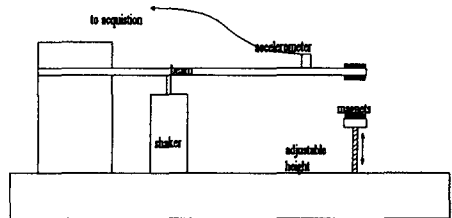


Fig.7 Experimental set up or skewed magnetic beam

### 4. 실험결과 및 고찰

Fig.8은 자성이 없는 보인 선형보에서 검출된 응답신호의 파워 스펙트럼을 나타내었다. 1차 공진주파수는 대략 5Hz 부근이다. 이러한 현상은 베르누이-오일러 방정식을 이용하면 충분히 예측할 수 있다. 부정정보의 경우에 1차 공진주파수는 식(4.1)을 이용하여 구할 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$f_1 = 0.56 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{1}{l^2} = 4.9 \text{ Hz} \quad (4.1)$$

여기서,  $m$ 은 보의 질량,  $E$ 는 영의 계수,  $I$ 는 면적에 대한 2차 모멘트, 그리고  $l$ 은 길이이다. Fig.9에 등고선도로 선형보의 바이코헤런스를 도시하였다.

선형시스템이므로 어떠한 피크값도 나타나지 않음을 확인할 수 있다. Fig.10에 비대칭 자성정보의 정규화된 파워스펙트럼을 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 1차 공진 주파수의 값은 보 끝단에 장착된 자석들의 무게 때문에 증가한다. 대략 8Hz에서 기본주파수가 나타나며 16Hz와 23Hz 영역에서 조화파(harmonics)가 나타나고 있다. 비대칭정보의 오토바이코헤런스를 Fig.11에 나타내었다. (8,8)Hz에서 0.7의 최대값을 갖는 이차위상결합이 검출되었다. 이것은 파워스펙트럼에서 서로 관련되어 있는 약 8Hz와 16Hz사이의 이차위상결합 때문이다. 어떠한 정보도 줄 수 없었던 파워스펙트럼과는 달리 기본 주파수와 첫 번째 발생하는 두 조화파사이의 결합을 바이코헤런스를 통해 쉽게 확인할 수 있다. Fig.12에 대칭 비선형 자성정보의 정규화된 파워스펙트럼을 도시하였다. 자석을 정확하게 정렬하고 강도를 똑같이 맞추기 어려웠으나 보는 수직으로 진동하였다. Fig.13에 대칭 비선형 자성정보의 오토바이코헤런스를 도시하였다. 비록 비대칭 시스템에 비해 최대 크기가 반정도인 0.3의 값을 나타내었으나 (35,35)Hz에서 약간의 이차위상결합 현상이 확인되었다.

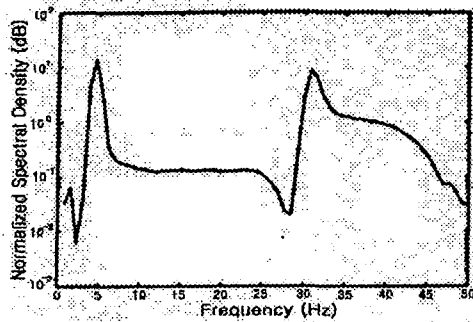


Fig.8 Normalized power spectrum of the linear beam

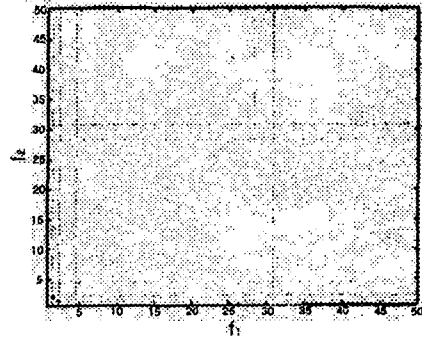


Fig.9 Contour plot of the bicoherence of the skewed magnetic beam

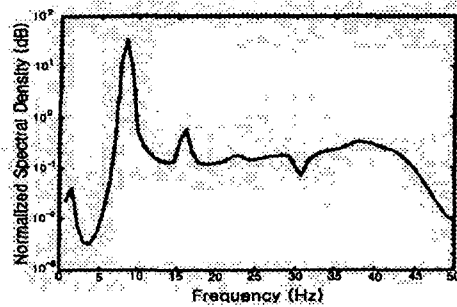


Fig.10 Normalized power spectrum of the skewed magnetic beam

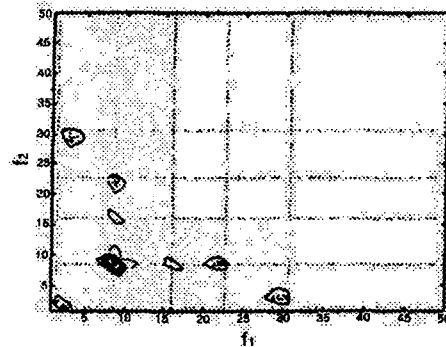


Fig.11 Contour plot of the bicoherence of the skewed magnetic beam

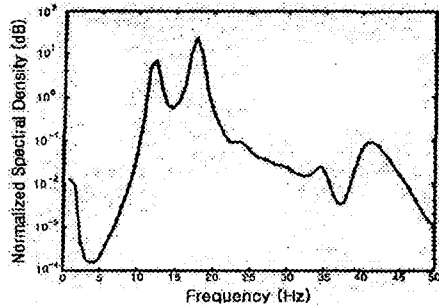


Fig.12 Normalized power spectrum of the symmetric beam

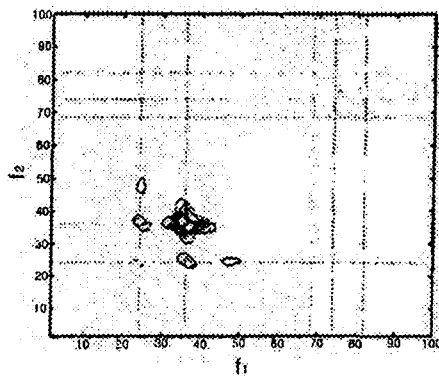


Fig.13 Contour plot of the bicoherence of the symmetric magnetic beam

## 5. 결론

기계적 시스템에 고차스펙트럼 해석법을 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 주파수 영역에서 신호의 에너지 밀도만을 분리, 표현하는 스펙트럼 해석법에 비하여 고차스펙트럼 해석법은 비선형성이 존재하는 시스템에 대하여 완전한 표현법을 제시한다. 고차스펙트럼 해석법은 임의의 주파수 대역에서 다른 신호에 영향을 줄 수 있는 비선형성이 발생하였을 때 그 주파수를 결정하는 유용한 수단이 될 수 있다. 특히 상황감시(condition monitoring) 시스템과 같은 적용분야에서 많은 입력신호 없이 단지 한 채널의 신호만으로도 유용한 정보를 얻을 수 있다. 만

약 시스템에 하나의 결함이 발생하였을 때 고차스펙트럼 해석법은 결함의 유·무를 판독할 수 있는 유용한 신호 해석법이 될 수 있다. 또한 임의의 시스템에서 비선형성이 나타나는지를 감지하는데 이용할 수 있고, 스펙트럼에서 보여지는 피크들 간의 위상결합에 대해 중요한 정보를 제공할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Martin Schetzen, 'The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems', KRIEGER PUBLISHING COM. Reprint Edition, p.310, 1989
2. C. L. Nikias, J. M. Mendel, 'Signal Processing with Higher-Order Spectra', IEEE Signal Processing Magazine, pp 11-37, (July 1993)
3. C. L. Nikias, A. P. Petropula, 'Higher order spectra analysis. a nonlinear signal processing framework', Prentice Hall, (1993)
4. C. L. Nikias, M. R. Raghuveer, 'Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework', Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 7, pp 869-891, (July 1987)
5. S. Elgar and R. T. Guza, 'Observations of Bispectra of Shoaling Surface Gravity Waves', J. Fluid Mech. Vol. 161, p.425-448, Dec. 1985
6. E. J. Powers and R. W. Miksad, 'Polyspectral Measurement and Analysis of Nonlinear Wave Interactions in Fluids', ASME, G00380, p.9-16, 1987
7. R. W. Miksad, F. L. Jones and E. J. Powers, 'Measurements of Nonlinear Interactions During Natural Transition of a Symmetric Wake', Physics of Fluids, Vol. 26, No.6, p.1402-1407, June 1983
8. Seybert, A. F., and Hamilton, J. F., 'Time delay Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Functions', Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, No.1, p.1, 1978
9. Lyon, R. H., 'Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems', MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975
10. L. Cremer, M Heckl, E E Ungar, 'Structure Borne Sound', Springer-Verlag, 1973